数理解析研究所講究録
第1712巻2010年136-139

単射である一次元セルラーオートマトンの標準形

東洋大学　総合情報学部

佐藤忠一

1．まえがき

単射である一次元セルラーオートマトンの代数的理論を線形代数の立場から論じる。一次元セルラーオートマトンの局所関数から有向グラフを作り、その遷移行列および隣接行列の代数構造から並列写像の単射性を調べる。単射の場合は標準形が存在する。

2．諸定義と基本的性質

一次元セルラーオートマトンCA とは$CA=<Z,Q,N,f>$の四組で与えられる。

ここで、Zは整数の集合で各オートマトンが配置されている場所を表わす。Qは各オートマトンが取れる状態の有限集合、NはZの有限部分集合で近傍と呼ばれる。fは$Q^{|N|}\rightarrow Q$なる写像で局所関数と呼ばれ、$|Q|=m$, $|N|=n$のときm状態、スコープ幅nの局所関数という。

$c:Z\rightarrow Q$なる写像cを様相といい各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数fで一斉に変換すると新しい様相c'は$^{\forall}i\in Z$に対して$c'(i)=f(c(i),c(i+1),\cdots,c(i+|N|-1))$ の式で与えられる。$c\rightarrow c'$なる対応を$f_{\infty}(c)=c'$と表わし、f_{∞}を並列写像という。様相の集合を$C(Q)$で表わすとf_{∞}は$C(Q)$ から $C(Q)$ への写像である。

３． 局所関数の行列表示

m 状態スコ - プ幅 n の局所関数 $f: Q^n \to Q$ に対して有向グラフを次の様に作る。Q^{n-1} の元をグラフのノ - ドの集合とし、ノ - ド $x_1 \cdots, x_{n-1}$ からノ - ド $x_2 \cdots, x_n$ に遷移が存在し、そのエッジに $f(x_1 \cdots, x_n)$ の値のラベルを付ける。

このようにして作られた有向グラフの遷移行列を A_f で表す。A_f は０または Q の元の値をとるサイズ $m^{n-1} \times m^{n-1}$ の行列である。A_f は各 $a_j \in Q$ でくくると $A_f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(a_j)$ と書ける。$\mu(a_j)$ を $a_j \in Q$ の隣接行列を $\mu(a_j)$ という。

隣接行列は｛0,1｝上の行列である。Q 上の *word* $w = a_1 \cdots, a_s$ に対して、ワード $w = a_1 \cdots, a_s$ の隣接行列 $\mu(w)$ を以下のように定義する。

$$\mu(w) = \mu(a_1 \cdots, a_s) = \prod_{j=1}^{s} \mu(a_j).$$

Q^* で Q 上の長さ０以上のすべてのワードの集合を表し、Q^+ で Q 上の長さ１以上のすべてのワードの集合を表す。Q^* は連接を乗法とする単位元（null word）を持つ非可環の半環である。Q^* に加法、減法と０元を加え、更に分配の法則を用いて乗法を拡張して非可換環 $R(Q)$ を定義する。$A_f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(a_j)$ は $\{0\} \cup Q$ 上の行列であるが $A_f^{\,2}$ は $R(Q)$ 上の行列である。

このとき次の定理が成立する。

定理. $Q = \{a_1, \cdots, a_m\}$ とする。f を Q 上のスコープ幅 n の局所関数とする。このとき次の命題は全て等価である。

(1) f_∞ は単射である。

(2) $^{\forall} w \in Q^{+}$ に対して, $tr\,\mu(w) = 1$

(3) $^{\forall} w \in Q^{+}$ に対して $\mu(w)$ の固有値の分布は複素平面上でただ１つが１に分布し、他はすべて原点に 分布する。

(4) $^{\forall} w \in Q^{+}$ に対して $\mu(w)$ の固有方程式は

$$| \mu(w) - \lambda I | = (-\lambda)^{k} + (-\lambda)^{k-1},\ k = m^{n-1}$$

(5) $^{\forall} w \in Q^{+}$ に対して $\mu(w)$ は唯一の０でない固有値1の固有ベクトルをもつ。

(6) $^{\exists} s \lneq m^{n-1}, {}^{\forall} w \in Q^{+}$ に対して $rank\mu(w)^{s} = 1$

(7) $^{\exists} s \lneq m^{n-1}, rankA_{f}{}^{s} = 1$

(8) $A_f = \sum_{a \in Q} a\mu(a)$ は唯一の０でない固有値 $(a_1 + \cdots + a_m)$ の固有ベクトルを持つ。

(9) $^{\forall} s \geq 1, tr(A_f{}^{s}) = (a_1 + \cdots + a_m)^{s}$

定理（標準形）

f を m 状態 n スコープの局所関数とする。f_{∞} が単射であるとき、遷移行列 A_f は次のような標準形をもつ。 但し, $\lambda = a_1 + \cdots + a_m$, $*$ は０でない元。

$$A_f \approx \begin{pmatrix} \lambda,0\cdots\cdots\cdots 0,0 \\ 0,0,*,*,\cdots,*,* \\ 0,0,0,*,*,\cdots,* \\ \vdots \qquad\qquad *,* \\ 0,0,\cdots 0,0,\cdots,0 \end{pmatrix}$$

4. 参考文献

[1] T. Sato, 「On cellular automata」, RIMS 1268, 2002

[2] 佐藤忠一「スペクトル分布によるセルラーオートマトの単射性・全射性の

判定」, RIMS 1604, 2008