

消費の外部性を考慮に入れた経済動学モデルについて (Dynamic behaviors of economic models with consumption externalities)

平口良司 (Ryoji Hiraguchi)*

立命館大学経済学部 (Faculty of Economics, Ritsumeikan University)

2010 年 3 月 15 日

概要

経済主体の効用関数に、他者の消費の水準が含まれる場合、均衡経路がカオスの挙動を示すことが近年明らかになっている。本論文において、既存研究の成果の概要と、私の近年の研究（重複世代モデルの分析）を説明する。

1 イントロダクション

近年のマクロ経済学においては、外部性を考慮したモデルを分析する機会が多い。外部性とは、ある経済主体の行動が他の経済主体に及ぼす影響のことである。経済モデルに外部性を入れると、不決定性や最適課税に大きな違いが生まれる。例えば、Benhabib and Perri (1994) が明らかにしたように、内生的成長モデルに人的資本の生産に関する外部性を導入すると、均衡経路に外部性が発生することがわかっている。また、ある種の財の生産に正の外部性がある場合、その財に補助金をかけるのが望ましいことも分かっている。つまり外部性のある経済においては消費税の均質性定理 (uniform commodity tax) が成立しないのである。

* 滋賀県草津市野路東 1-1-1 立命館大学経済学部

一方、生産の外部性だけでなく、近年では消費の外部性を考慮に入れたモデルの分析も最近進んでいる。Auray et al. (2002) は貨幣を含んだ無期限期間モデルに消費の外部性を入れた時の均衡経路を分析し、カオス的挙動が発生することを示した。本論文では、彼らの結果の頑健性を確かめるため、同様の問題を重複世代モデルを用いて行い、この場合でもカオスが多くの場合で発生することを示す。

2 モデル

2.1 設定

時間は離散無限である。 $(t = 0, 1, 2, \dots + \infty)$ 。本モデルの主役は2期間生存する消費者である。每期消費者が誕生する。彼らはまた $[0,1]$ 区間に連続的に分布している。時刻 t に生まれる消費者は、まず時刻 t (若年期) に働き、かつ消費する。残りを貯蓄する。そして時刻 $t+1$ (老年期) 消費して経済から退出する。彼らの貯蓄手段は貨幣 M のみである。

彼らは、異時点間にまたがる効用関数

$$\log(c_t) + \log(d_{t+1} - \phi(\bar{d}_t)^\alpha (\bar{c}_t)^{1-\alpha}) - h_t \quad (1)$$

を最大化しようとする。ここで、 c_t は若年期の消費、 d_{t+1} は老年期の消費、 h_t は若年期の労働量=所得、そして $(\bar{d}_t)^\alpha (\bar{c}_t)^{1-\alpha}$: t 期における消費の平均水準 ($\alpha \in (0, 1]$) である。ここで、消費水準を引く意味は、前の時代が贅沢なら、同じ品物から得られる喜びの度合いも下がる。彼らは効用関数を予算制約式 $p_t h_t - p_t c_t = m_{t+1} = p_{t+1} d_{t+1}$ のもとに最大化する。ここで、 m_t は貨幣需要である。変形して、以下の式を得る。

$$h_t = \frac{p_{t+1}}{p_t} d_{t+1} + c_t,$$

2.2 均衡条件

ここでは、競争均衡の条件を導出する。まず、貨幣の需要量と供給量は均衡で一致している。つまり $m_t = M$ が成立する。次に、モノの需要量と生産量も一致している。

$$h_t = d_t + c_t. \quad (2)$$

最後に、消費者の均質性を仮定する。つまり均衡では平均消費量が各個人の消費量に一致しているため、 $\bar{d}_t = d_t$, $\bar{c}_t = c_t$ となる。この条件をもとに、均衡経路を特定する。最適化問題は以下のよう定式化できる。

$$\max \left[\log(c_t) + \log(d_{t+1} - \phi(\bar{d}_t)^\alpha (\bar{c}_t)^{1-\alpha}) - \frac{p_{t+1}}{p_t} d_{t+1} - c_t \right] \quad (3)$$

ここで、平均消費量を示す変数 \bar{d}_t は消費者にとって所与であることに注意されたい。一階条件は $c_t = 1$ と $p_t = p_{t+1} (d_{t+1} - \phi(\bar{d}_t)^\alpha (\bar{c}_t)^{1-\alpha})$ のように与えられる。これら2式を代入して整理すると、

$$1 = \frac{p_{t+1}}{p_t} (d_{t+1} - \phi(\bar{d}_t)^\alpha (\bar{c}_t)^{1-\alpha}) \quad (4)$$

さらに均衡条件 $\bar{c}_t = c_t = 1$, $\bar{d}_t = d_t$, $p_{t+1}d_{t+1} = M$ を代入すると

$$1 = \frac{p_{t+1}/M}{p_t/M} \left(\frac{M}{p_{t+1}} - \phi \left(\frac{M}{p_t} \right)^\alpha \right) \quad (5)$$

ここで新たに変数 $x_t = 1/d_t = p_t/M$ を定義する。一階条件を変形すると $1 = x_{t+1}/x_t (1/x_{t+1} - \phi x_t^{-\alpha})$ 。つまり

$$x_{t+1} = \frac{1}{\phi} (x_t)^\alpha (1 - x_t) \quad (6)$$

のようになる。これは有名な準ロジスティック曲線である。例えば $\alpha = 1$ で $\phi = 0.25$ ならカオスが発生する。ここで、もし写像 $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が与えられた時、もし実数 $p \in [0, 1]$ が存在し、 $f^2(p) > f(p) > p > f^3(p)$ を満たすとき、周期3（そしてそれ以上の任意の周期）の数列が存在する。ロジスティック曲線がこの性質を満たすことは以前より知られている。

また、係数 α が1未満でもカオスを発生させる ϕ は存在する。まず、関数 $g(x) = x^\alpha (1 - x)$ は $\bar{x} = \alpha/(\alpha + 1)$ で極大値 $g(\bar{x}) < 1$ をとる。ここで、今 $\phi = g(\bar{x})$, $f(x) = g(x)/\phi$ とする。 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ である。さらに定数 q を $f(q) = \bar{x}$ かつ $q < \bar{x}$ なるように定める。このとき $q = f^{-1}(p)$ なら $f^2(p) > f(p) > p > f^3(p)$ となる。よってカオス性が発生する。

ところで、外部性が無い場合は、一階条件は $p_t = p_{t+1}d_{t+1}$, $p_{t+1}d_{t+1} = M$ と与えられる。よって $p_t = M$ となる。全時間において価格は安定的である。このことは、消費の外部性の存在がカオスの発生に必須であることを示している。

3 結論と今後の発展

経済主体の効用関数に、他者の消費の水準が含まれる重複世代モデルにおいて、均衡経路がカオスの挙動を示すことを示した。今後の研究課題としては、カオスの挙動のある経済における政府中央銀行の役割を挙げたい。物価の安定を求める政府中央銀行にとって、物価のカオスの挙動は避けたいものである。いったいどのような課税体系、あるいはインフレ率がカオスを防ぐか研究したい。

参考文献

- [1] Auray et al. (2002) Money and external habit persistence: A tale for chaos. *Economics letters* 76, pp121-127.
- [2] Benhabib, J., Perli, R. (1994): Uniqueness and indeterminacy: on the dynamics of endogenous growth. *Journal of Economic Theory* 63, 113-142