数理解析研究所講究録
第 1713 巻 2010 年 124-129

経済動学と数理生態学の交差点

日本大学 経済学部
吉田博之

Intersections between economic dynamics and mathematical population dynamics

Hiroyuki Yoshida
College of Economics
Nihon University

1 はじめに

特定の学問分野が発展するためには，その分野における独自の深化を推し進めることが最も重要である．しかしながら，それだけでは学問の発展のためには十分であると言い難いことも事実である．特定の学問分野がさらに発展するためには，他の学問分野との調和的融合もしくは学際的協業を積極的に推進していくことも不可欠である．例えば，現代の経済学は，物理学や工学などの数学的要素を積極的に導入することにより，その精緻化を進めてきたことは多くの経済学者が認めるところである．

本稿の目的は，経済動学と数理生態学の調和的融合もしくは学際的協業による成果を提示することにある．具体的には，ミクロ経済学における調整過程を数学的に定式化し，それが数理生態学における動学体系と同一の形式を保有することを示すことを目的にしている．

Cournot（1838, Chapter 7）において数学的に展開された複占モデルが本稿で主として取り扱う題材である．Cournot モデルは，特定市場における少数の企業の戦略的相互作用を分析しており，現代のゲーム理論の研究に先鞭をつけたと言っても過言ではない．別の言い方を採用するならば，彼の提示している均衡概念は，Nash 均衡の概念の先取りである．なお，Cournot は新しい均衡概念を提示しただけではなく，その均衡への調整過程について数理的な考察を行なっていることにも注意すべきである．その後，彼の分析は，Theocharis (1960)，Fischer (1961)，および Okuguchi (1976) などによってさらに発展させられている．

2　数学的準備：2つの数理生態学モデル

本節では，数理生態学のモデルとして，2つの有名な体系を紹介する．すなわち，捕食者と被食者との個体数動学を表現する体系（捕食者・被食者モデル）と競合する2種の個体数動学を表現する体系（2種競合モデル）である．

捕食者・被食者モデルは次の微分方程式体系で記述される．xを被食者の個体数，そして，yを捕食者の個体数とする．

$$\frac{\dot{x}}{x} = \varepsilon_1 - a_1 y \tag{1a}$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = -\varepsilon_2 + a_2 x \tag{1b}$$

例えば，xをシマウマの個体数，yをライオンの個体数とする．ライオンが存在しない場合には，シマウマの個体数がε_1の率で増大し，他方，ライオンが存在する場合には，シマウマの個体数の成長率がライオンの存在によって減少することを式（1a）は示している．また，シマウマが存在しない場合には，ライオンの個体数がε_2の率で減少し，他方，シマウマが存在する場合には，ライオンの個体数の成長率がシマウマの存在によって増加することを式（1b）は示している．

捕食者・被食者モデルでは，R^2_{++}において，すべての解の挙動が周期的になることが知られている．生態学的に解釈するならば，この結果は，捕食者と被食者の個体数がともに周期的に変動することを意味する．ただし，この場合の周期的軌道とは，初期値によって配置される単純な閉軌道であり，極限周期軌道（limit cycle）とは異なることに注意しなければならない．

この捕食者・被食者モデルと完全に同型の動学体系を有する経済モデルとして，Goodwin (1967) の成長循環モデルが有名である．彼は，恒常的技術進歩，労働人口の恒常的成長，資本・産出比率の不変性， Sayの法則，そして，実質賃金率に関するPhillips曲線などの経済学的仮定を設定することにより，労働者の分配率と雇用率で構成される微分方程式体系を導出している．彼の論文では，資本制経済における労働者と資本家という階級構造に着眼点が置かれ，成長経路をめぐる循環的変動が内生的に発生することが厳密に論証されている．

次に，競合する2種の個体数動学について紹介をしよう．

$$\frac{\dot{x}}{x} = \varepsilon_1 - a_{11}x - a_{12}y \tag{2a}$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \varepsilon_2 - a_{21}x - a_{22}y \tag{2b}$$

例えば，xをトラの個体数，yをライオンの個体数とする．これらの式によって，トラの個体数の成長率がライオンの存在によって減ぜられ，ライオンの個体数の成長率がトラの存在によって減ぜられることが定式化されている．

本稿では紙幅の制限のために詳細に触れないが，2種競合モデルでは，パラメーターの値の設定によって，2種が共存するケースや一方の個体が生き残り，他方の個体が絶滅するケースが表現できる．なお，この動学体系においては，個体数の循環的な変動を観察することはない．

3 Cournotの複占モデル

本節では，Cournotの複占モデルを考察する．2企業が同質財を生産している市場を想定する．この市場において，以下のような線型の需要曲線が成立しているとする．

$$p = a - b(x_1 + x_2),\ a > 0, b > 0, \tag{3}$$

ここで，pは価格であり，x_1とx_2をそれぞれ企業1と企業2の生産量とする．

また，企業の限界費用が一定であると仮定し，c_iを企業iの限界費用であるとする（$i = 1, 2$）．したがって，企業iの利潤は

$$\pi_1 = [a - b(x_1 + x_2)]x_1 - c_1 x_1, \tag{4}$$

$$\pi_2 = [a - b(x_1 + x_2)]x_2 - c_2 x_2. \tag{5}$$

となる．企業の最適反応関数は，上の利潤最大化条件を整理することによって求められる．

$$x_1 = R_1(x_2) = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{a - c_1}{2b} \tag{6}$$

$$x_2 = R_2(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{a - c_2}{2b} \tag{7}$$

このような反応関数の交点に対応する点は，いわゆるCournot-Nash均衡と呼ばれるものである．我々の例では，Cournot-Nash均衡が一意であることも容易に理解できる．つまり，

$$x_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b},\ x_2^* = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}. \tag{8}$$

ただし，Cournot-Nash均衡の正値性を保証するために，$a - 2c_1 + c_2 > 0$と$a + c_1 - 2c_2 > 0$という仮定を付加する．

それぞれの企業は，利潤最大化生産量と現実の生産量の差に応じて，自己の生産量の成長率を制御しているとする．我々は以下のような調整過程を定式化する．

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} = \alpha_1(R_1(x_2) - x_1), \tag{9a}$$

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} = \alpha_2(R_2(x_1) - x_2) \tag{9b}$$

ただし，α_iは調整速度を表わすパラメーターである．もちろん，$\alpha_i > 0$である．

以上の議論により，次のような生産調整式を得ることができる．

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 \left(-x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{a - c_1}{2b} \right) x_1 \tag{10a}$$

$$\dot{x}_2 = \alpha_2 \left(-\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{a - c_2}{2b} \right) x_2 \tag{10b}$$

以上をまとめると，次のようになる．

定理 1　線型の需要関数，線型の費用関数，そして，生産調整方程式（9）を想定する．このとき，Cournot 調整過程（10）は，生態学における 2 種競合モデルと同型である．

注意 1　本稿では，線型の費用関数を想定したが，2 次式の費用関数でも同様のことが証明できる．

このモデルでは，4 つの定常点が存在するが，本稿では，経済学的に最も興味深い Cournot-Nash 均衡に限定して局所的安定性分析を行なう．

均衡点 (x_1^*, x_2^*) における Jacobi 行列は

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha_1 x_1^* & -(1/2)\alpha_1 x_1^* \\ -(1/2)\alpha_2 x_2^* & -\alpha_2 x_2^* \end{bmatrix}, \tag{11}$$

であり，これに対応する特性方程式は

$$P(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0, \tag{12}$$

と表現される．ただし，

$$b_1 = \alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^*, \tag{13}$$

$$b_2 = (3/4)\alpha_1 x_1^* \alpha_2 x_2^* \tag{14}$$

である．

上記の式から明らかなように，局所安定性分析の必要十分条件である Routh-Hurwitz 条件 $(b_1 > 0, b_2 > 0)$ が常に満たされているので，以下の定理が成立する．

定理 2　Cournot-Nash 均衡が正値であるとき，その Cournot-Nash 均衡は常に局所安定的である．

4　離散的タイムラグの導入

前節では，今期の利潤最大化生産量と今期の自己の生産量との差に基づいて，今期の生産調整が実行されるモデルを考えた．本節では，今期の利潤最大化生産量と過去の自己の

平均的な生産量との差に基づいて，今期の生産調整が実行されるモデルを考える．つまり，企業の生産調整過程において，企業が現在の自己の生産量だけではなく過去の自己の生産量の履歴も考慮に入れることを想定する．このような生産調整過程は以下のように定式化できる．

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} = \alpha_1 \left(R_1(x_2) - \int_{-\infty}^{t} w_1(s) x_1(s) ds \right), \tag{15a}$$

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} = \alpha_2 \left(R_2(x_1) - \int_{-\infty}^{t} w_2(s) x_2(s) ds \right) \tag{15b}$$

ただし，

$$w_i(s) = \left(\frac{n_i}{\tau_i} \right)^{n_i} \frac{(t-s)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} e^{-(n_i/\tau_i)(t-s)}$$

と定義され，n_i は正の整数であり，$\tau_i > 0$ である（$i = 1, 2$）．$n_i = 1$ のとき，関数 $w_i(s)$ は指数分布である．また，$n_i \geq 2$ のとき，関数 $w_i(s)$ は，$s = t - (n_i - 1)\tau_i / n_i$ において最大値をとるひとこぶ型である．なお，$n_i \to +\infty$ のときには，

$$\lim_{n_i \to +\infty} \int_{-\infty}^{t} w_i(s) x_i(s) ds = x_i(t - \tau_i)$$

となる．

ここでは，特に，$n_1 \to +\infty$ かつ $n_2 \to +\infty$ の場合のみを取り扱う．つまり，我々の分析対象とする動学体系は

$$\dot{x}_1(t) = \alpha_1 \left(-x_1(t - \tau_1) - \frac{1}{2} x_2(t) + \frac{a - c_1}{2b} \right) x_1(t) \tag{16a}$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_2 \left(-\frac{1}{2} x_1(t) - x_2(t - \tau_2) + \frac{a - c_2}{2b} \right) x_2(t) \tag{16b}$$

であり，時間遅れ微分方程式である．このような動学体系は，数理生態学における Saito-Shibata モデルと同型である．彼らは，2 種競合の状況を記述する動学体系に離散的な時間遅れを導入し，モデルの拡張を実行している．彼らのモデルでは，2 種競合系の個体数変動にカオスが発生するという重要な結論が得られている．

図 1 は，数値パラメーターを $a = 3, b = 1, c_1 = c_2 = 1, \tau = 1.6, \tau_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 3$ に設定して，数値計算を実行した結果である．この図において，動学体系（16）によって規定される動学的挙動がストレンジ・アトラクターになっていることを観察できる．なお，作図を行なうときに，縦軸・横軸ともに対数表示を施していることに注意されたい．

参考文献

1. A. A. Cournot (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris: Hachette. English edition translated by N. T. Bacon (1960),

Researches in the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, London : Hafner Pub. Co.

2. Fisher, F. (1961), The stability of the Cournot oligopoly solution: The effects of speeds of adjustment and increasing marginal costs, *Review of Economic Studies*, 28, 125–135.

3. Hofbauer, J. and K. Sigmund (1998), *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press

4. Okuguchi, K. (1976), *Expectations and Stability in Oligopoly Models*, Berlin: Springer-Verlag.

5. Shibata, A. and N. Saito (1980), Time delays and chaos in two competing species, *Mathematical Biosciences*, 51, 199–211

6. Theocharis, R. (1960), On the stability of the Cournot solution on the oligopoly problem, *Review of Economic Studies*, 27, 133–134.

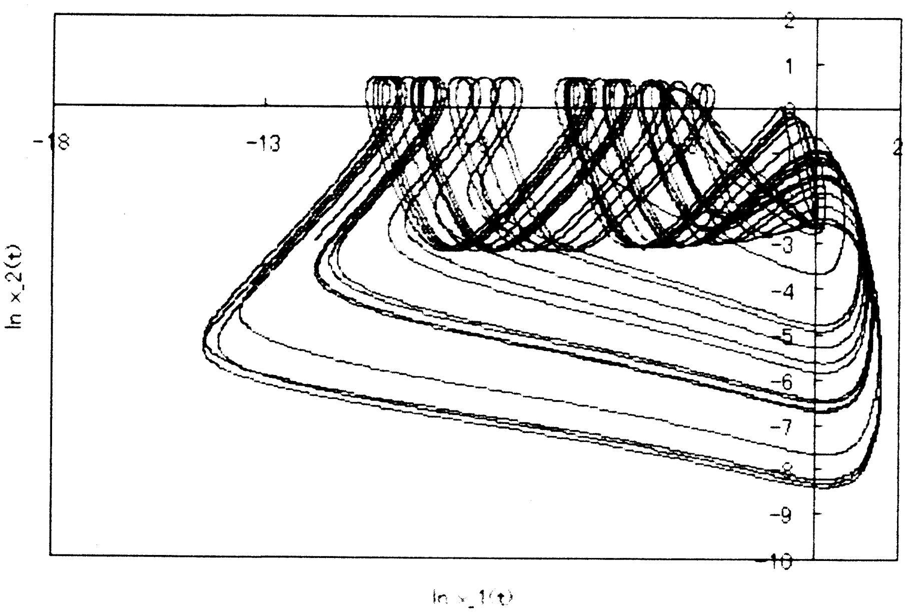

図 1: ストレンジ・アトラクター