数理解析研究所講究録
第 1714 巻 2010 年 90-95

レンズ空間のスピン構造に由来した Reshetikhin-Turaev $SU(2)$ 不変量について

京都大学・数理解析研究所　岡崎　建太 (Kenta Okazaki)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1 概要

1980 年代後半に Witten[2] は, 半単純コンパクト Lie 群 G に由来する 3 次元多様体の量子不変量の構成について提唱した. その後 Reshetikhin と Turaev[3] はこれを数学的に厳密に定義することに初めて成功した (Reshetikhin-Turaev G 不変量). Kirby-Melvin[4] は $G=SU(2)$ の場合に, この不変量がより精密な不変量の和に分解することについて言及した. Sato[8] は 1 の $(4n+2)$ 乗根におけるレンズ空間の精密化不変量の値を具体的に計算した.

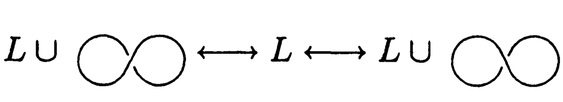
本稿では, 1 の $4n$ 乗根におけるレンズ空間の精密化不変量 (スピン構造に由来する Reshetikhin-Turaev $SU(2)$ 不変量) について, 部分的に計算を行ったのでそれを報告する.

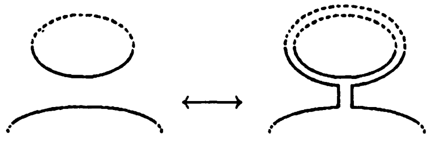
2 Reshetikhin-Turaev 不変量とその精密化不変量

この節では Reshetikhin-Turaev 不変量とその精密化不変量の定義について復習する.

本節を通じて, 3 以上の整数 r を一つ固定する. 整数 n に対して 1 の原始 n 乗根を $\zeta_n=\exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ とおき, $[n]=[n]_r=(\zeta_r^n-\zeta_r^{-n})/(\zeta_r-\zeta_r^{-1})$ とおく.

任意の連結な有向閉 3 次元多様体 M は, 3 次元球面 S^3 を, S^3 内のある枠付き絡み目 L に沿って手術することによって得られることが知られている [1]. このとき L を M の**手術表示**という. 連結な閉有向 3 次元多様体 M_1, M_2 とそれらの手術表示 L_1, L_2 について, M_1 と M_2 が同相であるための必要十分条件は, L_1 と L_2 が **Kirby 移動**と呼ばれる次の移動を有限回施すことによって移りあうことである, ということが知られている [1].





M を連結な閉有向 3 次元多様体, $L = L_1 \cup \cdots \cup L_N$ を M の手術表示, B を L の絡み数行列とする. このとき M の **Reshetikhin-Turaev** $SU(2)$ **不変量** $\tau_r^{SU(2)}(M)$ を次で定義する.

$$\tau_r^{SU(2)}(M) = \varphi_r(L)/c_+^{\sigma_+} c_-^{\sigma_-} \tag{1}$$
$$\varphi_r(L) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_N \le r} [i_1] \cdots [i_N]\, Q_r^{SU(2)}(L_1^{i_1} \cup \cdots \cup L_N^{i_N})$$
$$c_\pm = \sum_{1 \le i \le r} [i]\, Q_r^{SU(2)}(U_\pm^i)$$

ただし S^3 内の枠付き絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_N$ と整数 $1 \le i_1, \ldots, i_N \le r$ に対して $Q_r^{SU(2)}(L_1^{i_1} \cup \cdots \cup L_N^{i_N})$ を 1 の原始 r 乗根における L の量子 $SU(2)$ 不変量（= 色付き Jones 多項式）とし, $\sigma_\pm$ を B の正負の固有値の数, $U_\pm$ を framing ± 1 の自明な結び目とする.

命題 2.1 ([3]). 連結な閉有向 3 次元多様体 M に対して, (1) の値は M の手術表示 L の取り方に依らない. したがって $\tau_r^{SU(2)}(M)$ は M の位相不変量である.

r が偶数のとき, この不変量は精密化 Reshetikhin-Turaev 不変量と呼ばれる不変量の和に分解することが知られているので, その定義について復習する. 先程と同様に, M を連結な閉有向 3 次元多様体, $L = L_1 \cup \cdots \cup L_N$ を M の手術表示, B を L の絡み数行列とする.

M の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 1 次コホモロジー類 $\theta \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は, $Bt \equiv 0 \mod 2$ であるような元 $t \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N$ と 1 対 1 に対応することが知られている [4]. また M のスピン構造 s は, $Bx \equiv (b_{11}, \ldots, b_{NN})^T \mod 2$ であるような元 $x \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N$ と 1 対 1 に対応することが知られている [4]. ただし $b_{11}, \ldots, b_{NN}$ は B の対角成分.

$r \equiv 2 \mod 4$ のとき, 連結な閉有向 3 次元多様体 M とそのコホモロジー類 $\theta \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対して, 次のように定める. ただし $t \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N$ は前述の意味で θ に対応する元である.

$$\tau_r^{SU(2)}(M, \theta) = \varphi'_r(L, t)/c_{+,1}^{\sigma_+} c_{-,1}^{\sigma_-} \tag{2}$$
$$\varphi'_r(L, t) = \sum_{\substack{1 \le i_1, \ldots, i_N \le r \\ i_k \equiv t_k + 1 \mod 2}} [i_1] \cdots [i_N]\, Q_r^{SU(2)}(L_1^{i_1} \cup \cdots \cup L_N^{i_N})$$
$$c_{\pm,1} = \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ i:\mathrm{odd}}} [i]\, Q_r^{SU(2)}(U_\pm^i)$$

$r \equiv 0 \mod 4$ のとき, 連結な閉有向 3 次元多様体 M とそのスピン構造 s に対し

て, 次のように定める. ただし $x \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N$ は前述の意味で s に対応する元である.

$$
\begin{aligned}
\tau_r^{SU(2)}(M,s) &= \varphi_r''(L,x)/c_{+,0}^{\sigma_+}\, c_{-,0}^{\sigma_-} \qquad (3) \\
\varphi_r''(L,x) &= \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_N\le r \\ i_k \equiv x_k+1 \mod 2}} [i_1]\cdots[i_N]\, Q_r^{SU(2)}(L_1^{i_1}\cup\cdots\cup L_N^{i_N}) \\
c_{\pm,0} &= \sum_{\substack{1\le i\le r \\ i:\text{even}}} [i]\, Q_r^{SU(2)}(U_\pm^i)
\end{aligned}
$$

命題 2.2 ([4]). (2), (3) の値は M の手術表示 L の取り方に依らない. よって $\tau_r^{SU(2)}(M,\theta)$, $\tau_r^{SU(2)}(M,s)$ はそれぞれ対 (M,θ), (M,s) の不変量となる. これらの不変量を**精密化 Reshetikhin-Turaev 不変量**という.

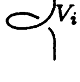
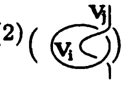
定義より, M の全てのコホモロジー類あるいはスピン構造について精密化 Reshetikhin-Turaev 不変量を足し上げたものは M の Reshetikhin-Turaev $SU(2)$ 不変量に一致することがわかる.

3 レンズ空間に対する不変量の値

(a,b) 型のレンズ空間 $L(a,b)$ について, 不変量 $\tau_r^{SU(2)}(L(a,b))$, $\tau_{4n+2}^{SU(2)}(L(a,b),\theta)$ の値は Jeffrey[5], Yamada[6], Li-Li[7], Sato[8] らによって計算されている. 本節ではレンズ空間の, スピン構造に由来した精密化 Reshetikhin-Turaev 不変量 $\tau_{4p}^{SU(2)}(L(a,b),s)$ の値の計算について概説する. 以下奇数 p を固定する. また, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ における n の逆数を $\bar{n}$ と表す.

注意: a が奇数のとき, $L(a,b)$ のスピン構造は1つしかないので, 精密化不変量の計算は従来の Reshetikhin-Turaev $SU(2)$ 不変量の計算に帰着できる. ゆえに, 以後 a は偶数と仮定する. このとき $L(a,b)$ のスピン構造はちょうど2つだけ存在する.

補題 3.1. 3 以上の整数 r に対して, 次が成り立つ.

$Q_r^{SU(2)}($  $) = \zeta_{4r}^{i^2-1}\, Q_r^{SU(2)}(\ |^{V_i}\ )$, $\quad Q_r^{SU(2)}($  $) = \dfrac{[ij]}{[j]}\, Q_r^{SU(2)}(\ |^{V_j}\ )$

Gauss 和に関する以下の公式は初等的に証明することができる.

補題 3.2. p, q を互いに素な整数の組, B を整数係数 N 次対称行列, $c \in \mathbb{Z}^N$ とするとき, 次が成り立つ.

$$
\sum_{0\le i_k<pq} \zeta_{pq}^{B[i]+c^Ti} = \sum_{0\le i_k<p} \zeta_p^{qB[i]+c^Ti} \sum_{0\le i_k<q} \zeta_q^{pB[i]+c^Ti}
$$

ただし $B[i] = i^TBi$ と表記した.

補題 3.3. B を整数係数 N 次対称行列, $c\in\mathbb{Z}^N$, p は奇数で $\det B$ と互いに素であるとするとき, 次が成り立つ.

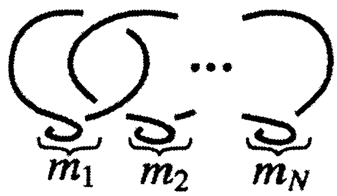
$$\sum_{0\le i_k<p}\zeta_p^{B[i]+c^Ti}=\zeta_p^{-\bar{4}\cdot\overline{B}[c]}\left(\frac{\det B}{p}\right)\left(\sum_{0\le i<p}\zeta_p^{i^2}\right)^N$$

ただし $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ は jacobi 記号であり, B の余因子行列を $\tilde{B}$ とするとき, $\overline{B}=\overline{\det B}\cdot\tilde{B}$ とおいた.

さて, a/b の連分数展開を次のように与える.

$$\frac{a}{b}=m_1-\cfrac{1}{m_2-\cfrac{}{\ddots-\cfrac{1}{m_N}}}\qquad m_k\in\mathbb{Z},\ |m_k|\ge 2$$

下図の枠付き絡み目を $L_{a,b}$ とおくとき, これはレンズ空間 $L(a,b)$ の手術表示であることが知られている. ただし, 各 m_k は絡み目成分の framing を表す. $L_{a,b}$ は連分数展開の取り方に依存していることに注意されたい.



$L_{a,b}$ の絡み数行列は $B=\begin{pmatrix} m_1 & 1 & & \\ 1 & m_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & m_N\end{pmatrix}$ であり, $\det B=a$ が成り立つ.

$y=(y_1,\dots,y_N)^T\in\mathbb{Z}^N$ を $y_0=1, y_1=\alpha,\ y_k=-m_{k-1}y_{k-1}-y_{k-2}(k\ge 2)$ で定めると, $By=(-1,0,\dots,0,a\alpha+b)^T\equiv(1,0,\dots,0,1)^T \mod 2$ が成り立ち, さらに $x=(x_1,\dots,x_N)^T\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N$ を $x_k\equiv y_k+1 \mod 2\,(k=1,\dots,N)$ で定めると, $Bx\equiv(m1,\dots,m_N)^T \mod 2$ が成り立つことがわかる. この x に相当する M のスピン構造を $s_\alpha(\alpha=0,1)$ とおく. ゆえに初等的な計算により

$$\begin{aligned}
&\varphi''(L_{a,b},s_\alpha)\\
&=\sum_{\substack{0<i_k\le 4p\\ i_k\equiv y_k \mod 2}}[i_1]\cdots[i_N]\,Q_{4p}^{SU(2)}(L_{a,b}^{i_1,\cdots,i_N})\\
&=(-1)^{m_1(y_1-1)+\cdots+m_N(y_N-1)}\sum_{\substack{0<i_k\le 4p\\ i_k\equiv y_k \mod 2}}\zeta_{16p}^{m_1(i_1^2-1)+\cdots+m_N(i_N^2-1)}[i_1][i_1i_2][i_2i_3]\cdots[i_{N-1}i_N][i_N]\\
&=\frac{(-1)^{m_1(y_1-1)+\cdots+m_N(y_N-1)}2^N\zeta_{16p}^{-\mathrm{tr}B+B[y]}}{(\zeta_{8p}-\zeta_{8p}^{-1})^{N+1}}\sum_{\pm}\pm\zeta_{8p}^{u_\pm^Ty}\sum_{0\le j_k<4p}\zeta_{4p}^{B[j]+(By+u_\pm)j}.
\end{aligned}$$

がわかる. ただし $u_\pm = e_1 \pm e_N$ (e_k は単位ベクトル) とおき, 2番目の等式で補題3.1を用いた. 一方で

$$c_{+,0}^{\sigma_+} c_{-,0}^{\sigma_-} = \frac{-2^{3N/2}\zeta_{16p}^{-3(\sigma_+-\sigma_-)}}{(\zeta_{8p}-\zeta_{8p}^{-1})^N}\zeta_8^{\epsilon(p)(\sigma_+-\sigma_-)}\left(\sum_{0\le i<p}\zeta_p^{i^2}\right)^N .$$

であることがわかるので (ただし $p \equiv \pm 1 \mod 4$ のとき $\epsilon(p) = \pm 1$ とおいた), 補題3.2と補題3.3を用いれば

$$\tau_{4p}(L(a,b),s_\alpha) = \left(\frac{a}{p}\right)\zeta_{4p}^{-3s(b,a)}\sqrt{2}\sum_{\pm}\frac{\zeta_{8pa}^{\mp}}{\zeta_{8p}-\zeta_{8p}^{-1}}\cdot\xi_\pm$$

$$\xi_\pm = (-1)^{m_1y_1+\cdots+m_Ny_N}\zeta_8^{\epsilon(p)(\sigma_+-\sigma_-)}\zeta_p^{(((-1)^{N+1}(a\alpha+b)\pm1)/2)^2(\frac{1}{4}B^{-1}-\overline{4B})[e_N]}$$

$$\cdot 2^{-2N+1}\sum_{0\le i_k<4}\zeta_4^{pB[i]-(By+c_\pm)i}$$

となる. ここで $s(b,a)$ は Dedekind 和であり, 関係式

$$3(\sigma_+-\sigma_-) - \mathrm{tr}B = B^{-1}[e_1] + B^{-1}[e_N] - 12s(b,a)$$

を用いた.

今回は $\xi_\pm$ を連分数展開に依らない形で表すことはできなかったが, 特別な場合として次を示すことができた.

定理 3.4. p を奇数, a を p と互いに素な正の偶数とするとき, 次が成り立つ.

$$\tau_{4p}(L(a,1),s_0) = \left(\frac{a}{p}\right)\sqrt{2}\zeta_8^{-\epsilon(p)}\cdot\frac{\zeta_{16p}^{3}\zeta_p^{-\overline{8}a/2}}{\zeta_{8p}-\zeta_{8p}^{-1}}$$

$$\tau_{4p}(L(a,1),s_1) = \left(\frac{a}{p}\right)\sqrt{2}\zeta_8^{-\epsilon(p)}\cdot\frac{\zeta_{16p}^{3-a}\eta(a)}{\zeta_{8p}-\zeta_{8p}^{-1}}$$

ただし, $p \equiv \pm 1 \mod 4$ のとき $\epsilon(p) = \pm 1$ とおき, $\eta(a)$ を次のように定めた.

$$\eta(a) = \begin{cases} 1 & a \equiv 0 \mod 4 \\ -\zeta_p^{-\overline{4a}} & a \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$$

参考文献

[1] Kirby, R., *A calculus for framed links in S^3*. Invent. Math. **45** (1978), 35–56.

[2] Witten, E., *Quantum field theory and the Jones polynomial.* Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399.

[3] Reshetikhin, N., Turaev, V. G., *Invariants of* 3-*manifolds via link polynomials and quantum groups.* Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597.

[4] Kirby, R., Melvin, P., *The* 3-*manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for* $\mathrm{sl}(2, C)$. Invent. Math. **105** (1991), no. 3, 473–545.

[5] Jeffrey, L., *Chern-Simons-Witten Invariants of Lens Spaces and Torus Bundles and the Semiclassical Approximation.* Commun. Math. Phys. **147** (1992), 563–604.

[6] Yamada, S. *The absolute value of the Chern-Simons-Witten invariants of lens spaces.* J. Knot Theory Ramifications **4** (1995), no. 2, 319–327.

[7] Li, B. H., Li, T. J., *Generalized Gaussian sums: Chern-Simons-Witten-Jones invariants of lens-spaces.* J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), no. 2, 183–224.

[8] Sato, C., *Perturbative Invariants of lens spaces associated with cohomology classes* J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), no. 7, 913–929.