数理解析研究所講究録
第 1715 巻 2010 年 19-31

A Remark on the Siegel-Weil Formula

京都大学大学院理学研究科　山名俊介 (Shunsuke Yamana)
講演時: Graduate school of mathematics, Kyoto University
本稿執筆時: Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University

1　序

ジーゲル・ヴェイユ公式とは, アイゼンシュタイン級数とテータ函数の積分の間の等式であり, アイゼンシュタイン級数が絶対収束するという仮定の下に Siegel [22, 23] や Weil [24] により証明された. この等式を, Kudla と Rallis [11, 12, 15] は多くの場合に拡張したが, 特に [11] の拡張は十分に調べられているとは言い難い. このことに関して, 筆者によるジーゲル・ヴェイユ公式の最近得られた拡張を本稿で報告したい.

1.1　設定

最初に以下で用いる記号をまとめておく. F を代数体とし, そのアデール環を $\mathbb{A}$ と書く. $V = F^m$ を列ベクトルの空間とし, $(\ ,\ ) : V \times V \to F$ を二次形式, $H = O(V)$ をその直交群とする. 簡単のため, 以下では m を偶数とする. $G = Sp_n$ を階数 n のシンプレクティック群とし, P を G のジーゲル放物型部分群とする. $P = MN$ は Levi 部分群

$$M = \left\{ m(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathrm{GL}_n \right\}$$

を持ち, 冪単根基は

$$N = \left\{ n(b) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & b \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{Sym}_n \right\}$$

である. F の各素点 v に対して, K_v を $G(F_v)$ の標準的極大コンパクト部分群とする. すなわち, v が実素点のとき

$$K_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a\,{}^t b = b\,{}^t a,\ a\,{}^t a + b\,{}^t b = \mathbf{1}_n \right\}$$

であり, v が複素素点のとき

$$K_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \,\middle|\, a\,{}^t b = b\,{}^t a,\ a\,{}^t \bar{a} + b\,{}^t \bar{b} = \mathbf{1}_n \right\}$$

であり, v が有限素点のとき, $\mathfrak{o}_v$ を F_v の整数環として

$$K_v = Sp_n(F_v) \cap \mathrm{GL}_{2n}(\mathfrak{o}_v)$$

である. $K = \prod_v K_v$ とおく.

$(\ ,\ )_{F_v}$ を F_v のヒルベルト記号とし, $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の二次指標 χ_V を

$$\chi_V(x) = \prod_v (x_v, (-1)^{m/2} \det V)_{F_v}, \qquad x = (x_v) \in \mathbb{A}^\times$$

と定義する. G と H は双対簡約対をなし, $\mathbb{A}/F$ の自明でない指標 ψ を固定すれば, $G(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A})$ のヴェイユ表現 $\omega = \omega_\psi$ はシュヴァルツ空間 $\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ に実現される. 特に, $P(\mathbb{A})$ と $H(\mathbb{A})$ の作用は以下の通り:

$$\begin{aligned}
&\omega(h)\Phi(x) = \Phi(h^{-1}x) && h \in H(\mathbb{A}),\\
&\omega(m(a))\Phi(x) = \chi_V(\det a)|\det a|_{\mathbb{A}}^{m/2}\Phi(xa) && a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}),\\
&\omega(n(b))\Phi(x) = \psi(\mathrm{tr}(bQ(x)))\Phi(x) && b \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{A}).
\end{aligned}$$

ここで, $Q(x) = \frac{1}{2}(x_i, x_j) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{A})$ と書いた.

1.2 テータ積分

$\Phi \in \mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, テータ函数を

$$\Theta(g, h; \Phi) = \sum_{x \in V^n(F)} \omega(g)\Phi(h^{-1}x)$$

と定義する. $\Theta(g, h; \Phi)$ は $G(F)$ と $H(F)$ に関して左不変であり, $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ 上の緩増加函数を定める. dh を $H(\mathbb{A})$ のハル測度とする. 双曲型二元二次形式付き空間を $\mathcal{H}$ で表す. V が $\mathcal{H}$ と同型でないときには, $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ の体積が 1 となるように dh を正規化する. テータ函数の積分

$$I(g; \Phi) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta(g, h; \Phi)dh$$

は以下の条件が満たされるとき, 絶対収束することが知られている [24, 命題 8]:

- V が非等方的, または
- $m - r > \varrho$.

ただし, r は V の Witt 指数である.

1.3 アイゼンシュタイン級数

$\mathbb{A}^\times$ のイデールノルムを $|\cdot|$ と書く.

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(n+1), \qquad s_0 = \tfrac{1}{2}(m-n-1)$$

とおく. 複素数 s に対して, 誘導表現 $I(s,\chi_V)=\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\chi_V|\cdot|^s)$ は

$$f^{(s)}(m(a)n(b)g)=|\det a|^{s+\varrho}\chi_V(\det a)f^{(s)}(g)\quad (a\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}),\ b\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{A}))$$

を満たす $G(\mathbb{A})$ の K-有限な滑らか函数の空間上での $G(\mathbb{A})$ の右移動作用である. K-有限な函数 $f^{(s)}: G(\mathbb{A})\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は s に関して正則かつ s を固定したとき $f^{(s)}\in I(s,\chi_V)$ であるとき, $I(s,\chi_V)$ の正則切断と呼ばれる. ラングランズの理論より, $I(s,\chi_V)$ の正則切断 $f^{(s)}$ に対して, アイゼンシュタイン級数

$$E(g;f^{(s)})=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} f^{(s)}(\gamma g)$$

は $\Re s>\varrho$ のとき絶対収束し, 全平面に有理型解析接続され, 函数等式

$$E(g;f^{(s)})=E(g;M(s)f^{(s)})$$

を満たす. ここで, 絡作用素 $M(s): I(s,\chi_V)\to I(-s,\chi_V)$ は, $\Re s>\varrho$ では

$$M(s)f^{(s)}(g)=\int_{\mathrm{Sym}_n(\mathbb{A})} f^{(s)}\left(\begin{pmatrix}0 & -\mathbf{1}_n\\ \mathbf{1}_n & 0\end{pmatrix}n(b)g\right)db$$

により定義される. $\Re s\geq 0$ では, $E(g;f^{(s)})$ は $\chi_V=1$ のとき

$$s\in\{\tfrac{m}{2}-\varrho\mid m\in 2\mathbb{Z},\ n+1<m\leq 2n+2\}$$

で高々一位の極を持ち, $\chi_V\neq 1$ のとき

$$s\in\{\tfrac{m}{2}-\varrho\mid m\in 2\mathbb{Z},\ n+1<m\leq 2n\}$$

で高々一位の極を持つことを除けば, 正則であることが知られている [15].

$g\in G(\mathbb{A})$ を岩澤分解

$$g=pk,\qquad p=m(a)n(b)\in P(\mathbb{A}),\qquad k\in K$$

して, $|a(g)|=|\det a|$ とおく. $\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ を無限素点 v で K_v と $H(F_v)$ の適当な極大コンパクト部分群に関する多項式 Fock 空間に対応する $\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ の部分空間とする. (分かりにくければ, 全ての無限素点 v に対して K_v-有限な函数のなす $\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ の部分空間を代わりに考えても良い). $\Phi\in\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ に対して,

$$f_\Phi^{(s)}(g)=|a(g)|^{s-s_0}\omega(g)\Phi(0)$$

は $I(s,\chi_V)$ の正則切断を定める.

1.4 古典的ジーゲル・ヴェイユ公式

定理 1.1 ([22, 23, 24]). $m>2n+2$ のとき, 任意の $\Phi\in\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, 等式

$$E(g;f_\Phi^{(s_0)})=I(g;\Phi)$$

が成り立つ.

注意 1.2. (1) $m > 2n+2$ は, アイゼンシュタイン級数が絶対収束するための必要十分条件である.

(2) 実際には, Weil は上の等式を一般の古典型簡約対に対して証明した. 一方, W. T. Gan [1, 2] は類似の等式をある種の例外型簡約対に対して証明した.

次節以降は次の問題を考察する.

問題 1.3. 定理 1.1 を $0 < m \leq 2n+2$ の場合に拡張せよ.

2 ジーゲル・ヴェイユ公式の拡張

筆者の主定理を述べる前に, Kudla と Rallis の結果を紹介する.

2.1 テータ積分が絶対収束する場合

$m > 2n+2$ は 1.2 節のテータ積分の絶対収束条件より強いため, ジーゲル・ヴェイユ公式の左辺が絶対収束しなくても右辺が絶対収束することがある. 最初にこの場合に, Kudla と Rallis はジーゲル・ヴェイユ公式を拡張した.

定理 2.1 (Kudla–Rallis [11, 12]). *$\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ とし, 1.2 節のテータ積分の収束条件が成り立つと仮定する. このとき, $E(g; f_\Phi^{(s)})$ は $s = s_0$ で正則であり, 等式*

$$E(g; f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0} = \varkappa I(g; \Phi)$$

が成り立つ. ここで,

$$\varkappa = \begin{cases} 2 & m \leq n+1. \\ 1 & m > n+1. \end{cases}$$

注意 2.2. (1) 定理 2.1 は, V が非等方的であるとき [11] により, $m - r > n+1$ のとき [12] により証明されている. したがって, 現在での [11] の実質的な内容は, 定理 2.1 の $m \leq n+1$ かつ V が非等方的な場合の証明である.

(2) 市野氏 [6] は, [12] に類似の結果をユニタリ群の場合に証明している.

2.2 Regularization

定理 2.1 は一見すると満足すべき結果に見える. ところが, Kudla と Rallis が [15] で導入した regularization 用いれば, $m \leq n+1$ のときには V が非等方的でなくてもテータ積分を定義することができる. つまり, 「1.2 節の第一の条件は本質的ではない」と言える.

regularization を説明するために, $m \leq n+1$ かつ V が等方的であると仮定する. 函数 $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ を固定し, F の良い有限素点 v を選べば, $H(F_v)$ のヘッケ作用素 α で 0 でない固有値 c_α を持ち, $\Theta(g, h; \omega(\alpha)\Phi)$ が $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ 上の急減少函数になるものがある (詳しくは [4] を参照). α の条件より, regularized テータ積分を絶対収束積分

$$c_\alpha^{-1} \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta(g, h; \omega(\alpha)\Phi) dh$$

により定義できる. この定義は一見 ad hoc に見えるけれども, テータ積分の収束域からの唯一の $H(\mathbb{A})$-不変な拡張を実現している. すなわち, 上の積分は v や α の取り方によらず, テータ積分 $I(g;\Phi)$ が絶対収束する Φ に対してはそれと一致する. 以下では regularized テータ積分も $I(g;\Phi)$ と書く.

アイゼンシュタイン級数は $\Re s=0$ で一般的に正則であり, V が等方的なときには regularization を用いれば, 以下の等式が証明される.

定理 2.3 (Kudla [10]). $m=n+1$ かつ V は $\mathcal{H}$ と同型ではないと仮定する. このとき, 任意の $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, 等式

$$E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)|_{s=0} = 2I(g;\Phi)$$

が成り立つ.

注意 2.4. Kudla は regularization 作用素として, ヘッケ作用素ではなく, 微分作用素を用いているため, F を総実体にしている. 定理 2.7 に関しても同様である.

2.3 Regularized ジーゲル・ヴェイユ公式

以下では $m \le n$ とする. F の有限アデール環を $\mathbb{A}_\mathrm{f}$, F の無限素点の集合を S_∞ と書く. $v \in S_\infty$ に対して, $G(F_v)$ のリー環の複素化を $\mathfrak{g}_v$ と書き,

$$\mathfrak{g} = \prod_{v\in S_\infty} \mathfrak{g}_v, \qquad K_\infty = \prod_{v\in S_\infty} K_v$$

とおく. $U = V \oplus \mathcal{H}^{n+1-m}$ とおき, 以下の $(\mathfrak{g}, K_\infty)\times G(\mathbb{A}_\mathrm{f})$-加群を導入する:

$$\Pi(V) = \{f_\Phi^{(s_0)} \mid \Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))\},$$
$$\Pi(U) = \{f_\Psi^{(-s_0)} \mid \Psi \in S(U^n(\mathbb{A}))\}.$$

注意 2.5. V と U がこのような関係にあるとき, V は U の補空間と呼ばれる. $-s_0 = \frac{1}{2}(\dim U - n - 1)$ より $\Pi(U) \subset I(-s_0, \chi_V)$ である.

v が有限素点のとき F_v の剰余体の位数を q_v とすれば, F の局所ゼータ因子は

$$\zeta_v(s) = \begin{cases} \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) & v \text{ が実素点のとき} \\ 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s) & v \text{ が複素素点のとき} \\ (1-q_v^{-s})^{-1} & v \text{ が有限素点のとき} \end{cases}$$

である. 局所エル因子 $L_v(s,\chi_V)$ を [25] のように定義し, $a(s)$ と $b(s)$ を

$$a_v(s) = L_v\left(s - \frac{n-1}{2}, \chi_V\right) \prod_{j=1}^{[n/2]} \zeta_v(2s-n+2j),$$

$$b_v(s) = L_v\left(s + \frac{n+1}{2}, \chi_V\right) \prod_{j=1}^{[n/2]} \zeta_v(2s+n+1-2j)$$

のオイラー積で与える. 絡作用素 $M(s)$ の正規化を $M^\circ(s) = \frac{b(s)}{a(s)} M(s)$ とする.

命題 2.6. $\Pi(U)$ には唯一の $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbb{A}_\mathrm{f})$-既約商表現が存在し，それは $\Pi(V)$ に同型である．$M^\circ(s)$ は $s = -s_0$ で正則であり，$M^\circ(-s_0)$ の $\Pi(U)$ への制限は商写像 $\Pi(U) \to \Pi(V)$ を実現する．

Proof. 特異表現に関する J. S. Li の一般的結果 [18] より，$\Pi(V)$ は既約ユニタリ表現である．$\Pi(U)$ の各素点での成分の既約商表現はハウ予想より唯一であり，それら既約商が $\Pi(V)$ の成分に同型であることは [13, 14, 16, 17] から確かめられる．[19, 20, 7] より $a(s)^{-1}M(s)$ が s の整函数であることが知られている．さらに $b(s)$ は右半平面 $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re s > 0\}$ で極も零も持たないので，第二の主張が従う．最後の主張は有限素点では [14] により，無限素点では直接確かめられる． □

定理 2.7 (Kudla–Rallis [15])**.** 0 でない定数 c_0 が存在して以下が成り立つ: $I(s, \chi_V)$ の正則切断 $f^{(s)}$ が $f^{(-s_0)} \in \Pi(U)$ であるとき，$\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ を

$$M^\circ(-s_0)f^{(-s_0)} = f_\Phi^{(s_0)}$$

を満たす任意の函数とすれば，

$$\mathrm{Res}_{s=-s_0} E\bigl(g; f^{(s)}\bigr) = c_0 I(g; \Phi).$$

注意 2.8. 池田氏 [8] 及び市野氏 [4] による定理 2.7 の別証明と精密化，ユニタリ群や直交群の場合の類似の結果 [5, 9] も知られている．

2.4 主定理

定理 2.9 (Y. [26])**.** $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ とし，$m \le n$ と仮定する．

(1) V が $\mathcal{H}$ と同型ではないとき，$E\bigl(g; f_\Phi^{(s)}\bigr)$ は $s = s_0$ で正則であり，

$$E\bigl(g; f_\Phi^{(s)}\bigr)|_{s=s_0} = 2I(g; \Phi).$$

(2) $V = \mathcal{H}$ のとき，

$$E\bigl(g; f_\Phi^{(s)}\bigr)|_{s=s_0} = 0.$$

さらに，

$$\frac{\partial}{\partial s} E\bigl(g; f_\Phi^{(s)}\bigr)\Big|_{s=s_0} = 2I(g; \Phi).$$

注意 2.10. (1) V が等方的ならば，当然右辺は regularization により定義される．

(2) 筆者 [26, 27] は類似の等式を m が奇数の場合やユニタリ群や直交群，四元数ユニタリ群の場合にも証明した．比例定数は，シンプレクティック群の場合の $m = 1$ のときのみ 1 であり，それ以外では 2 になる．

(3) $m = n = 1$ の場合のジーゲル・ヴェイユ公式の証明が Helminck [3] にある．

3　定理 2.9 の証明

証明は三段階からなる．最初にアイゼンシュタイン級数の函数等式と右半平面 $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re s > 0\}$ での解析的挙動を組み合わせて，$E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)$ が $s = s_0$ で正則であることを証明する．次に regularized ジーゲル・ヴェイユ公式をアイゼンシュタイン級数の函数等式を用いて書き直せば，定理 2.9 の等式が比例因子の差を除いて得られることを示す．最後に両辺の階数 $m-1$ のフーリエ係数を比較して比例定数を決定する．

3.1　$E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)$ の $s = s_0$ での正則性

F の素点 v を固定する．$V_v = F \otimes_v F_v$ とおき，$F_v^\times$ の指標 χ_{V_v} を

$$\chi_{V_v}(x) = (x, (-1)^{m/2} \det V)_{F_v}$$

で定める．誘導表現 $I(s, \chi_V)$ や絡作用素 $M(s)$ の局所的な対応物を $I_v(s, \chi_{V_v})$ や $M_v(s)$ と表す．局所ヴェイユ表現を ω_v と書き，

$$R(V_v) = \{f_{\Phi_v}^{(s_0)}(g) = \omega_v(g)\Phi_v(0) \mid \Phi_v \in S(V_v^n)\}$$

とおけば，$\Pi(V)$ は $R(V_v)$ の制限テンソル積である．$f_{\Phi_v}^{(s_0)}$ を以前と同様に拡張して，$I_v(s, \chi_{V_v})$ の正則切断 $f_{\Phi_v}^{(s)}$ を定める．命題 2.6 の証明や以下の議論では $I_v(s, \chi_{V_v})$ や $R(V_v)$ の加群構造に関する情報が重要であることを注意する．

　v が有限素点であり，χ_v が不分岐のとき，K_v 上 1 であるような $I_v(s, \chi_{V_v})$ の切断を $f_{0,v}^{(s)}$ と書く．Gindikin-Karpelevich の方法により

$$\frac{b_v(s)}{a_v(s)} M_v(s) f_{0,v}^{(s)} = f_{0,v}^{(-s)}$$

が証明される．これが $M^\circ(s)$ の定義の意味であるが，次の補題も成り立つ:

補題 3.1. F の任意の素点 v と任意の $\Phi_v \in S(V_v^n)$ に対して，$\frac{b_v(s)}{a_v(s)} M_v(s) f_{\Phi_v}^{(s)}$ は $s = s_0$ で正則である．

Proof. 初めに v が有限素点の場合を考える．このとき $a_v(s)$ は $s = s_0$ で正則かつ $a_v(s_0) \neq 0$ であり，$b_v(s)$ は $s = s_0$ で一位の極を持つ．一方 [14] より $R(V_v)$ は $M_v(s_0)$ の核に含まれるので，求める結果が得られる．

　v が複素素点の場合は [11, 命題 4.13] のように Gindikin-Karpelevich の方法を使って証明できるので，v が実素点の場合を考える．V_v の符号を (p, q) とし，直交分解 $V_v = V_v^+ \oplus V_v^-$ を固定する．ここで，$\dim V_v^+ = p$, $\dim V_v^- = q$, $(\ ,\ )|_{V_v^+}$ は正値，$(\ ,\ )|_{V_v^-}$ は負値である．V_v 上の正値二次形式 $(\ ,\ )_+$ を

$$(\ ,\ )_+|_{V_v^+} = (\ ,\ )|_{V_v^+}, \qquad (\ ,\ )_+|_{V_v^-} = -(\ ,\ )|_{V_v^-}$$

により定義し，$\Phi^0 \in S(V_v^n)$ を

$$\Phi_v^0(x) = e^{-\pi \sum_{j=1}^n (x_j, x_j)_+}$$

と定義する．このとき $k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K_v$ に対して

$$f^{(s)}_{\Phi^0_v}(k) = \omega_v(k)\Phi^0_v(0) = \det(a+\sqrt{-1}b)^{(p-q)/2}$$

である．$R(V_v)$ は $(\mathfrak{g}_v, K_v)$-加群として $f^{(s_0)}_{\Phi^0_v}$ により生成されることが知られているから，$\frac{b_v(s)}{a_v(s)}M_v(s)f^{(s)}_{\Phi^0_v}$ が $s=s_0$ で正則であることを示せばよい．

$$\Gamma_n(s) = \pi^{n(n-1)/4}\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma\left(s-\frac{j}{2}\right)$$

とおけば，[21, (1.31)] より

$$M_v(s)f^{(s)}_{\Phi^0_v} = \frac{(\sqrt{-1})^{n(p-q)/2}2^{n(1-s)}\pi^{n\varrho}\Gamma_n(s)}{\Gamma_n\left(\frac{1}{2}\left(s+p+\frac{1}{2}\right)\right)\Gamma_n\left(\frac{1}{2}\left(s+q+\frac{1}{2}\right)\right)}f^{(-s)}_{\Phi^0_v}$$

となり，正則性が直接確かめられる． □

$\Phi = \otimes_v\Phi_v \in S(V^n(\mathbb{A}))$ を固定し，$I(s,\chi_V)$ の有理型切断 $h^{(s)}$ を

$$h^{(-s)} = M^\circ(s)f^{(s)}_\Phi$$

により定義する．1.3 節で述べた関数等式を適用して

$$E\big(g;f^{(s)}_\Phi\big) = \frac{a(s)}{b(s)}E\big(g;h^{(-s)}\big).$$

補題 3.1 より $h^{(s)}$ は $s=-s_0$ で正則だから，$E\big(g;h^{(s)}\big)$ は $s=-s_0$ で高々一位の極を持つ．したがって，正則性の証明は

$$\operatorname{ord}_{s=s_0}\frac{a(s)}{b(s)} = \begin{cases} 1 & V \text{ が } \mathcal{H} \text{ と同型でないとき} \\ 2 & V=\mathcal{H} \text{ のとき} \end{cases}$$

から完了する．$V=\mathcal{H}$ のとき，$E\big(g;f^{(s)}_\Phi\big)|_{s=s_0}$ は恒等的に零になる．

注意 3.2. 左半平面ではこれまで，アイゼンシュタイン級数の解析的挙動について知られている実用的な結果は少なかった．例えば，[15] の定理 4.12 を挙げると

定理 3.3 (Kudla–Rallis). F を総実体とする．$I(s,\chi_V)$ の正則切断 $f^{(s)} = \otimes_v f^{(s)}_v$ を固定し，無限素点を含む F の素点の有限集合 S を $v \notin S$ なら $f^{(s)}_v = f^{(s)}_{0,v}$ となるように取り，$b^S(s) = \prod_{v\notin S}b_v(s)$ とおく．このとき $b^S(s)E\big(g;f^{(s)}\big)$ は $\Re s<0$ で正則である．

しかし，$b^S(s)$ は $s=s_0$ で

$$\ell_S = \#S + \#S_\infty\left[\frac{n-m}{2}\right]$$

位の零点を持つため, 定理 3.3 は「$E(g; f^{(s)})$ が $s = s_0$ で高々 ℓ_S 位の極を持つ」と述べているに過ぎない. 一方 $R(V_v)$ は $I_v(s, \chi_{V_v})$ の既約部分加群であり, 上の証明から $f_v^{(s_0)} \notin R(V_v)$ となる素点の分だけ $E(g; f^{(s)})$ の $s = s_0$ での極の位数が増加することが観察できる. 有限素点では $I_v(s_0, \chi_{V_v})$ の socle 列の長さは 2 だが, 実素点では $I_v(s_0, \chi_{V_v})$ の加群構造はかなり複雑であり, 一般に $I_v(s_0, \chi_{V_v})$ と $\mathrm{Soc}(I_v(s_0, \chi_{V_v}))$ の間に多数の部分加群が存在する ([16] を参照). 実素点 v で $I_v(s_0, \chi_{V_v})$ の socle 列の長さが大体 $\left[\frac{n-m}{2}\right]+2$ であることに, 上の見積もりは対応していると考えられる.

3.2 regularized ジーゲル・ヴェイユ公式の変形

補題 3.1 より線形写像 $A : \Pi(V) \to I(-s_0, \chi_V)$ を

$$A(f^{(s_0)}) = \lim_{s \to s_0} M^\circ(s) f^{(s)}$$

により定義できる. ここで, 正則切断 $f^{(s)}$ は

$$f^{(s)}(g) = |a(g)|^{s-s_0} f^{(s_0)}(g)$$

と定める. ラングランズの理論より

$$M^\circ(-s_0) \circ A(f^{(s_0)}) = \delta f^{(s_0)}, \qquad \delta = \frac{b(-s_0)}{a(s_0)} \lim_{s \to s_0} \frac{b(s)}{a(-s)}.$$

$\delta \neq 0$ は容易に分かる. さらに $A(\Pi(V)) \subset \Pi(U)$ も容易に分かり, V が $\mathcal{H}$ と同型ではないと仮定して, 定理 2.7 を $h^{(-s)} = M^\circ(s) f_\Phi^{(s)}$ に適用すれば,

$$\begin{aligned} E(g; f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0} &= \lim_{s \to s_0} \frac{a(s)}{b(s)} E(g; h^{(-s)}) \\ &= -\frac{a(s_0)}{\mathrm{Res}_{s=s_0} b(s)} \mathrm{Res}_{s=-s_0} E(g; h^{(s)}) \\ &= c_1 I(g; \Phi). \end{aligned}$$

ここで,

$$c_1 = -\frac{a(s_0)}{\mathrm{Res}_{s=s_0} b(s)} \delta c_0 = \frac{b(-s_0)}{\mathrm{Res}_{s=-s_0} a(s)} c_0$$

とおいた. 同様にして, $V = \mathcal{H}$ の場合には定理 2.9(2) を証明できる.

3.3 比例定数の決定

最後に $c_1 = 2$ を示せば, 定理 2.9 の証明は完了する. $\ell = m - 1$ とおき, G の部分群を次のように定める:

$$G_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{n-\ell} & & & \\ & a & & b \\ \hline & & \mathbf{1}_{n-\ell} & \\ & c & & d \end{array} \right) \in G \right\}$$

$a \in \mathrm{GL}_{n-\ell}(\mathbb{A})$ に対して

$$m_0(a) = m\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_\ell \end{pmatrix}\right)$$

とおく. $\beta_0 \in \mathrm{Sym}_\ell(F) \cap \mathrm{GL}_\ell(F)$ を固定し,

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-\ell} & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_n(F)$$

とおく. $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式 $\mathcal{F}$ に対して,

$$\mathcal{F}_\beta(g) = \int_{\mathrm{Sym}_n(F)\backslash \mathrm{Sym}_n(\mathbb{A})} \mathcal{F}(n(b)g)\psi(-\mathrm{tr}(\beta b))db, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

は $\mathcal{F}$ のフーリエ係数である. 3.2 節の計算より

$$E_\beta(g; f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0} = c_1 I_\beta(g;\Phi)$$

である. $\Theta_\beta(g,h;\Phi)$ は [15, 補題 6.10] より $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ 上項別絶対可積分であるから, regularization 作用素を外すことができ, $g_0 \in G_0(\mathbb{A})$ に対して

$$\begin{aligned} I_\beta(g_0;\Phi) &= \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta_\beta(g_0,h;\Phi)dh \\ &= \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \sum_{x\in V^n(F),\ Q(x)=\beta} \omega(g_0)\Phi(h^{-1}x)dh \\ &= \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \sum_{y\in V^{\ell_0}(F),\ Q(y)=\beta_0} \omega(g_0)\Phi(0,h^{-1}y)dh \\ &= I_{\beta_0}(g_0;\Phi_0) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\Phi_0 \in S(V^\ell(\mathbb{A}))$ を $\Phi_0(y) = \Phi(0,y)$ と定めた.

一方, アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数は, [11] の補題 2.4 より

$$\begin{aligned} E_\beta(g; f_\Phi^{(s)}) &= \sum_{j=0}^{n-\ell} E_\beta^j(g; f_\Phi^{(s)}), \\ E_\beta^j(g; f_\Phi^{(s)}) &= \sum_{\gamma\in Q_j^{n-\ell}(F)\backslash \mathrm{GL}_{n-\ell}(E)} f_{\Phi,\beta,j}^{(s)}(m_0(\gamma)g) \end{aligned}$$

と与えられる. ここで

$$\begin{aligned} Q_j^n &= \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n \;\middle|\; a \in \mathrm{GL}_{n-j},\ d \in \mathrm{GL}_j \right\}, \\ w_j &= \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{n-j} & & & \\ & & & \mathbf{1}_j \\ \hline & & \mathbf{1}_{n-j} & \\ & -\mathbf{1}_j & & \end{array}\right), \\ f_{\Phi,\beta,j}^{(s)}(g) &= \int_{\mathrm{Sym}_{\ell+j}(\mathbb{A})} f_\Phi^{(s)}\left(w_{\ell+j}n\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)g\right)\psi\left(-\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}b\right)\right)db \end{aligned}$$

とおいた. $E_\beta^j(g;f_\Phi^{(s)})$ は $\mathrm{GL}_{n-\ell}(\mathbb{A})$ 上の保型形式と見て, 相異なる中心指標を持ち, $E_\beta^0(g;f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0}$ と $I_\beta(g;\Phi)$ の中心指標は一致するので,

$$E_\beta^0(g_0;f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0} = c_1 I_{\beta_0}(g_0;\Phi_0)$$

が得られる. さらに,

$$E_\beta^0(g_0;f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0} = E_{\beta_0}(g_0;f_{\Phi_0}^{(s)})|_{s=0}$$

は容易に分かり, β_0 と Φ を適当に取れば $E_{\beta_0}(g_0;f_{\Phi_0}^{(s)})|_{s=0} \neq 0$ にできるので, 定理 2.3 から $c_1 = 2$ を得る.

注意 3.4. $c_1 = 2$ から V が $\mathcal{H}$ と同型でないとき, 定理 2.7 の比例定数 c_0 は

$$c_0 = \frac{2\mathrm{Res}_{s=-s_0} a(s)}{b(-s_0)}$$

と決定できる. 池田氏 [8] や市野氏 [4] も少し異なる定式化だが, 比例定数を決定していることを述べておく.

References

[1] W. T. Gan, *A Siegel-Weil formula for exceptional groups*, J. Reine Angew. Math. **528** (2000) 149–181.

[2] W. T. Gan, *A Siegel-Weil formula for automorphic characters: Cubic variation of a theme of Snitz*, J. Reine Angew. Math. **625** (2008) 155–185.

[3] G. F. Helminck, *Eisenstein series on the metaplectic group: an algebraic approach*, Math. Centre Tracts **161**, Math. Centrum Amsterdam 1983.

[4] A. Ichino, *On the regularized Siegel-Weil formula*, J. Reine Angew. Math. **539** (2001) 201–234.

[5] A. Ichino, *A regularized Siegel-Weil formula for unitary groups*, Math. Z. **247** (2004) 241–277.

[6] A. Ichino, *On the Siegel-Weil formula for unitary groups*, Math. Z. **255** (2007) 721–729.

[7] T. Ikeda, *On the location of poles of the triple L-functions*, Compos. Math. **83** (1992) 187–237.

[8] T. Ikeda, *On the residue of the Eisenstein series and the Siegel-Weil formula*, Compos. Math. **103** (1996) 183–218.

[9] D. Jiang and D. Soudry, *On the genericity of cuspidal automorphic forms of $SO(2n+1)$, II*, Compos. Math. **143** (2007) 721–748.

[10] S. Kudla, *Central derivatives of Eisenstein series and height pairings*, Ann. Math. **146** (1997) 545–646.

[11] S. Kudla and S. Rallis, *On the Weil-Siegel formula*, J. Reine Angew. Math. **387** (1988) 1–68.

[12] S. Kudla and S. Rallis, *On the Weil-Siegel formula II. The isotropic convergent case*, J. Reine Angew. Math. **391** (1988) 65–84.

[13] S. Kudla and S. Rallis, *Degenerate principal series and invariant distributions*, Isr. J. Math. **69** (1990) 25–45.

[14] S. Kudla and S. Rallis, *Ramified degenerate principal series representations for $Sp(n)$*, Isr. J. Math. **78** (1992) 209–256.

[15] S. Kudla and S. Rallis, *A regularized Siegel-Weil formula: the first term identity*, Ann. Math. **140** (1994) 1–80.

[16] S. T. Lee and C.-B. Zhu, *Degenerate principal series and local theta correspondence II*, Isr. J. Math. **100** (1997) 29–59.

[17] S. T. Lee and C.-B. Zhu, *Degenerate principal series and local theta correspondence III*, J. Algebra **319** (2008) 336-359.

[18] J.-S. Li, *Singular unitary representations of classical groups*, Invent. Math. **97** (1989) 237–255.

[19] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, ϵ-factors of representations of classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **83** (1986) 4589–4593.

[20] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, *Rankin triple L-functions*, Compos. Math. **64** (1987) 31–115.

[21] G. Shimura, *Confluent hypergeometric functions on the tube domain*, Math. Ann. **260** (1982) 269–302.

[22] C. L. Siegel, *Indefinite quadratisehe Formen und Funktionentheorie I*, Math. Ann. **124** (1951) 17–54.

[23] C. L. Siegel, *Indefinite quadratisehe Formen und Funktionentheorie II*, Math. Ann. **124** (1952) 364–387.

[24] A. Weil, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*, Acta Math. **113** (1965) 1–87.

[25] A. Weil, *Basic Number Theory, third edition*. Springer-Verlag, 1974.

[26] S. Yamana, *On the Siegel-Weil formula:the case of singular forms*, preprint.

[27] S. Yamana, *On the Siegel-Weil formula for quaternionic unitary groups*, preprint.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan
e-mail:yamana@sci.osaka-cu.ac.jp