数理解析研究所講究録
第 1715 巻 2010 年 127-134

Twisted exterior square L-functions and Shalika periods on GU(2, 2)

大阪市立大学大学院理学研究科　森本　和輝 (Kazuki Morimoto)
Graduate School of Science, Osaka City University

1 概要

論文 [4] で、Jacquet と Shalika は GL_{2n} のユニタリー尖点的保型表現に対して、exterior square L-関数の積分表示を与え、部分 L-関数が s=1 で極を持つための条件を Shalika 周期で特徴付けた。彼らの結果から、GL_{2n} のユニタリー尖点的保型表現で、SO_{2n+1} のユニタリー尖点的保型表現からの持ち上げからくるものを特徴付けることができる。本稿では、GU(2, 2) の twisted exterior square L-関数に関して、[4] の類似の積分表示を考え、その結果としてこの部分 L-関数が s=1 で極を持つための条件を Shalika 周期のユニタリー類似で特徴づける。本稿は古澤昌秋氏との共同研究の結果に基づいている。

2 序

F を数体とし、そのアデール環を $\mathbb{A}_F$ と書く。ψ を $\mathbb{A}_F/F$ の非自明な指標とする。E を F の 2 次拡大としそのアデール環を $\mathbb{A}_E$ と書く。E の元 x に対して、非自明なガロア群の元 $\theta \in \mathrm{Gal}(E/F)$ による像を $\bar{x}$ と書く。同様に、$M_n(E)$ の元 g の全ての成分を非自明なガロア群の元 $\theta \in \mathrm{Gal}(E/F)$ で移した行列を $\bar{g}$ と書く。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。この時 J についての similitude unitary group GU(2, 2) を次のように定義する；

$$\mathrm{G} = \mathrm{GU}(2,2) = \{g \in \mathrm{GL}_4(E) \mid {}^t\bar{g}Jg = \lambda(g)J,\, \lambda(g) \in F^\times\}$$

また、任意の F-代数 A に対して、次のように書く；

$$\mathrm{G}(A) = \{g \in \mathrm{GL}_4(E \otimes_F A) \mid {}^t\bar{g}Jg = \lambda(g)J,\, \lambda(g) \in A^\times\}$$

特に、$\mathrm{G}(\mathbb{A}_F)$ の中心は $\mathbb{A}_E$ なので、任意の保型表現の中心的指標は E のイデール類群 $\mathbb{A}_E^\times/E^\times$ の指標となる。さらに、G の L-群は次のように表せられる (cf. [7])；

$${}^L\mathrm{G} = {}^L\mathrm{G}^0 \rtimes \mathrm{Gal}(E/F) = (\mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F),$$

ここで、ガロア群の非自明な元 $\theta \in \mathrm{Gal}(E/F)$ の作用は $\theta(g, \lambda) = (J^{-1}\,{}^tg^{-1}J,\, \lambda \det g)$ で与えられる。同様に、任意の代数群 H に対してその L-群を ${}^LH$、L-群の連結成分を ${}^LH^0$ と書くことにする。

次に ^{L}G の twisted exterior square map を定義する。$\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ の exterior square map を $\wedge^2$ と書く。さらに同じ記号を用いて、$\mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ の 6 次元表現 $\wedge^2$ を次で定める：

$$\wedge^2 : \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C}) \qquad (g,\lambda) \mapsto (\wedge^2 g)\lambda$$

補題 1. (Lemma2.1 [6]) $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ の 6 次元表現 $\wedge^2$ は ^{L}G の表現に拡張できる。

実際、この表現 $\wedge_t^2$ は

$$\wedge_t^2(g,\lambda,1) = \lambda \wedge^2 (g), \quad \wedge_t^2(1,1,\theta) = A$$

であたえられる。ただし、A は $\mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ の行列で $A \wedge^2 (g,\lambda) A^{-1} = \wedge^2 \circ \theta(g,\lambda)$ と $A^2 = 1$ を満たすものをとる。

ここで、このような拡張は一意的ではないことに注意しておく。実際、上の条件を満たす A をひとつとって $\wedge_t^2$ を定義しても、非同型な $\wedge^2$ の ^{L}G への拡張 $\wedge_t^2 \otimes \mathrm{sign}$ が存在する。従って、行列 A に条件をつけてひとつ固定する必要がある。ここでは、行列 A を $\mathrm{tr}(A) > 0$ を満たすようにとる。このようにして定義された表現を twisted exterior square 表現と呼ぶ。

注意：論文 [6] で、Kim と Krishnamurthy は G の twisted exterior square 持ち上げを構成している。つまり、$\mathrm{G}(\mathbb{A}_F)$ の大域的に generic な尖点的表現 π に対して、十分大きな素点の有限集合 T があって、$\Pi_v \cong \wedge_t^2(\pi_v)\ v \notin T$ となる $\mathrm{GL}_6(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π が存在することを示している。

ここで、本稿の主定理を述べておく。(π, V_π) を G の大域的に generic な既約ユニタリー尖点的保型表現、ξ をイデール類群 $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$ のユニタリー指標、S を F の素点の有限集合で、S の外では全てのデータは不分岐となる集合とする。また、ψ_{S_0} は次節で定義される部分群 N の指標とする。このとき、つぎがなりたつ。

主定理. L-関数 $L^S(s) = L^S(s,\pi,\wedge_t^2 \otimes \xi) = \prod_{v \notin S} L(s,\pi_v,\wedge_t^2 \otimes \xi_v)$ は、ある正の数 $\eta > 0$ があって半平面 $Re\ s > 1-\eta$ に有理型関数として拡張できる。この L-関数が s=1 で極を持つための必要十分条件は、$\xi^2 \omega_\pi|_{\mathbb{A}_F^\times}$ は自明な指標であり, V_π のなかに K-有限ベクトル φ で つぎの周期積分が消えないベクトルが存在する：

$$Sh(\varphi) = \int_{\mathbb{A}_F^\times \mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \varphi\left(n\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^* \end{pmatrix}\right) \psi_{S_0}(n)\xi(detg)\, dn\, dg.$$

3 積分表示

この節では、twisted exterior square L-関数の積分表示について説明する。(π, V_π) と ξ を前節の通りとする。P を G のジーゲルパラボリック部分群とすると、P は Levi 分解 MN をもつ:

$$M = \left\{ m(g,\lambda) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \lambda \cdot {}^t\bar{g}^{-1} \end{pmatrix} \mid g \in \mathrm{GL}_2(E), \lambda \in F \right\},$$

$$N = \left\{ n(X) = \begin{pmatrix} 1_2 & X \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \mid X \in \mathrm{Herm}_2(E) \right\},$$

ここで、

$$\mathrm{Herm}_2(E) = \{ S \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(E) \mid {}^t\bar{S} = S \}.$$

N の任意の指標はある $S \in \mathrm{Herm}_2(E)$ によって、

$$\psi_S\left(\begin{pmatrix} 1_2 & X \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}\right) = \psi[\mathrm{tr}(SX)]$$

で与えられる。今、$D \in F^\times$ を $-D \notin (F^\times)^2$ となるようにとる。このとき、$\eta = \sqrt{-D}$ に対して $E = F(\eta)$ と書ける。次の $S_0 \in \mathrm{Herm}_2(E)$ で定まる指標を考える：

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\eta & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき、ψ_{S_0} の M における固定部分群は

$$\left\{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \lambda {}^t\bar{g}^{-1} \end{pmatrix} \mid {}^t\bar{g}S_0 g = \lambda S_0\right\}.$$

さらに、この部分群の連結成分は

$$\mathrm{GL}_2(F) \times E^\times / \{(a \cdot 1_2, a^{-1}) \mid a \in F^\times\}$$

に同型であることがすぐにわかる。

GL_2 の Borel 部分群 B_2 を上三角行列からなる部分群として、GL_2 のアイゼンシュタイン級数を

$$E(g,s) = \sum_{\gamma \in B_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} f(\gamma g, s)$$

で定義する。ここで、２変数の Schwartz-Bruhat 関数 Φ と π の中心的指標 ω_π に対して、

$$f(g,s) = \int_{\mathbb{A}_F^\times} \Phi((0,t)g)|t|^{2s}\xi^2\omega_\pi(t)\xi(detg)|detg|^s d^\times t$$

で定義された切断を考える。このとき、次で定義される Rankin-Selberg 積分を考える：

$$Z(s,\varphi) = \int_{\mathbb{A}_F^\times \mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \varphi\left(n\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^* \end{pmatrix}\right)\psi_{S_0}(n)E(g,s)\,dn\,dg \tag{1}$$

ここで、$\varphi \in V_\pi$、$g^* = \mathrm{det}g \cdot {}^tg^{-1}$。

この Rankin-Selberg 積分は Jacquet と Shalika の exterior square L-関数の積分表示の類似である。特に、彼らの積分表示と同じ Eisenstein 級数を使っているので、この積分の収束に関してつぎのことがわかる。(cf. [4])

命題 1. $Z(s,\varphi)$ はアイゼンシュタイン級数が極をもつ点を除き収束する。

さらに、この積分について次の基本的な結果が成り立つ：

命題 2. ϕ を $\phi(g) = \varphi(gw^{-1})$ で定まる尖点的形式とすると、$Z(s,\varphi)$ は $Res >> 0$ で次の積分にほどくことができる。

$$Z(s,\varphi) = \int_{\mathbb{A}_F^\times U_2(\mathbb{A}_F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)} \int_{\mathbb{A}_F} W_\phi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \end{pmatrix}\iota(g)\right] f(g,s)\,dx\,dg, \tag{2}$$

ここで、w と $\iota(g)$ は次で与える：$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2$ に対して、

$$\iota(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

さらに、 W_ϕ は ϕ の *Whittaker* 関数で次で定義される：

$$W_\phi(g) = \int_{(E\backslash \mathbb{A}_E)^2} \int_{(F\backslash \mathbb{A}_F)^2} \psi(-tr_{E/F}(\eta z) + c) \cdot \phi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & w \\ 0 & 1 & \bar{w} & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z} & 1 \end{pmatrix} g\right] da\, dc\, dz\, dw$$

この命題から、$Z(s,\varphi)$ が Euler 積分であることがわかる。つまり、φ と Φ を適当にとることで局所積分の積に分解できる：

$$Z(s,\varphi) = \prod_v Z_v(\Phi_v, W_v, s)$$

ここで、$Z_v(\Phi_v, W_v, s)$ は積分 (2) の局所類似である。
アイゼンシュタイン級数の性質（cf. [5]）から次のことがすぐにわかる。

命題 3. 積分 $Z(s,\varphi)$ は、もし $\xi^2\omega_\pi|_{F^\times} \neq 1$ なら $s=1$ で正則。一方、もし $\xi^2\omega_\pi|_{F^\times} = 1$ なら, 積分 $Z(s,\varphi)$ は $s=1$ において位数が高々 1 の極を持ち、その留数は

$$Sh(\varphi) = \int_{\mathbb{A}_F^\times \mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \varphi\left(n \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^* \end{pmatrix}\right) \psi_{S_0}(n)\xi(detg)\, dn\, dg.$$

に比例する。

Rankin-Selbarg 積分 (1) は任意の尖点的保型表現に対して考えることができ、また上のようにほどくことが出来る。従って、特につぎのことがわかる。

命題 4. (σ, V_σ) を大域的に *generic* ではない $\mathrm{G}(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現とする。このとき、任意の $\varphi \in V_\sigma$ に対して、$Sh(\varphi) = 0$ が成り立つ。

4 不分岐な局所積分

この節と次節では局所的な話題のみを考える。ただし、素点が分裂するときには、局所積分が Jacquet と Shalika の局所積分（cf. [4]）と本質的に変わらないので、素点が分裂していない場合のみを考えればよい。従って、素点 v での F の完備化を F_v と書くと、$E_v = E \otimes_F F_v$ は F_v の 2 次拡大になる。また、π、ξ、ψ、W、Φ の局所成分をそれぞれ π_v、ξ_v、ψ_v、W_v、Φ_v とする。
この節では、不分岐な局所積分の計算について解説するので、全てのデータは不分岐であると仮定する。つまり、π_v は不分岐表現、E_v は F_v の不分岐 2 次拡大、ξ_v は $F^\times$ の不分岐指標とする。この計算には quasi-split 代数群の Casselman-Shalika 公式を用いる。Casselman-Shalika 公式とは不分岐表現の Whittaker 関数の分

裂トーラスでの値をある L-群の表現の指標で表すというものである。この公式に関しては、原著 [1]、準分裂代数群が non-reduced 双対ルート系を持つ場合は [11]、quasi-split 代数群が reduced 双対ルート系を持つ場合は [2] などを参照してほしい。特に、今の場合は [2] の記法に従う。
T を G の極大トーラス、T_d を G の極大 $F-$ 分裂トーラスとする。quasi-split 代数群の Casselman-Shalika 公式は次の条件を満たす部分群 H の L-群の表現によって記述される：
(1) 連結分裂 F_v-部分群
(2) H のルート系は G の双対ルート系
(3) H の極大トーラスは G の極大 F_v-分裂トーラス
今の場合、H として

$$\mathrm{GSp}(4,F_v)=\{g\in \mathrm{GL}(4,F_v)\mid {}^tgJg=\lambda J\quad \lambda\in \mathrm{GL}(1,F_v)\}$$

をとればよい。このとき、代数群 H の L-群の連結成分は

$${}^LH^0=\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})$$

となる。t_{π_v} を π_v の佐武パラメータとすると、これは、${}^L\mathrm{G}={}^L\mathrm{G}^0\rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ における ${}^L\mathrm{G}^0$ の共役類である。実際、これは次で与えられる：

$$t_{\pi_v}=(s_{\pi_v},\theta)\in {}^L\mathrm{G}^0\rtimes \mathrm{Gal}(E/F).$$

ここで、s_{π_v} を明示的に与える。そこで、π_v が Borel 部分群上の不分岐指標 χ_v からの誘導表現の既約商とする。さらに、ϖ を F_v の原始元とすると，s_{π_v} は次で与えられる：

$$s_{\pi_v}=(\mathrm{diag}(a,b,1,1),\lambda)\in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$$

ここで、$a=\chi(\mathrm{diag}(\varpi,1,\varpi^{-1},1)),b=\chi(\mathrm{diag}(1,\varpi,1,\varpi^{-1})),c=\chi(1,1,\varpi,\varpi)$ とする。
Casselman-Shalika 公式は t_{π_v} よりも s_{π_v} を用いて記述される。包含写像 $\iota:T_d\to T$ から、$\iota^*:{}^LT_d^0\to {}^LT^0$ が自然に定義できる。このとき、$\iota^*(s_{\pi_v})=\overline{s_{\pi_v}}$ とおく。さらに、$X_*(T_d)$ を T_d の指標全体とすると、L-群の定義から、${}^LT_d^0$ の余指標全体 $X^*({}^LT_d^0)$ に同型である。このとき、T_d の元 t に対して $X_*(T_d)\cong X^*({}^LT_d^0)$ の元を対応させることが出来る。従って、t から $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})$ の既約表現 V_t が定まる。ただし、t が highest weight ベクトルに対応しなければ、$V_t=0$ とする。今の場合の Casselman-Shalika 公式は次で与えられる：

命題 5. (Casselman-Shalika 公式) 上の記号の下で、$t\in T_d$ に対して

$$W_v(t)=Tr(\overline{s_{\pi_v}}|V_t)\delta_{\mathrm{G}}(t)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、δ_{G} は G の *Borel* 部分群の *modulus* 関数.

Casselman-Shalika 公式により、つぎのことを示せる：

命題 6. F_v の指標 $x\mapsto \psi(Tr(\eta)x)$ は位数 0 とし、Φ_v は整数格子の特性関数とする。このとき、測度を適当に決めておくと、

$$Z_v(\Phi_v,W_v,s)=L(s,\pi_v,\wedge_t^2\otimes\xi_v)$$

5 局所積分についての補題

この節では、主定理の証明に必要な局所積分についての結果をのべる。まず、直接的な計算から次のことを示すことができる：

命題 7. *Schwartz-Bruhat* 関数 Φ_v と *Whittaker* 関数 W_v で次を満たすものが存在する；

$$Z_v(\Phi_v, W_v, 1) \neq 0$$

次に、局所積分の評価を与える。つぎの補題は GL_n の場合に [5] に示されている。今の場合も、π_v がユニタリー表現であることに注意すれば、[5] での議論を適当に書き換えることで次のことが示せる。

補題 2. F_v が非アルキメデスなら、W_v を任意の *Whittaker* 関数、F_v がアルキメデスなら、W_v を K-有限な *Whittaker* 関数とする。このとき、任意の $g \in \mathrm{G}$ に対して,

$$\int_{UZ_0\backslash B_0} |W_v(bg)|^2\, db < \infty$$

が成り立つ。ここで $B_0 = T_dU$ とし，Z_0 は G の中心と T_d の共通部分部分とする．ただし，T_d と U は次で与えられる：

$$T_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda b^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda, a, b \in F_v^\times \right\},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z & y \\ 0 & 1 & \bar{y} & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z, w \in F_v \quad x, y \in E_v \right\}.$$

Whittaker 関数に関しては、有限関数と Schwartz-Bruhat 関数によるよく知られた近似（cf. [3],[9]）がある。この近似と補題 2 により次の近似が証明できる。証明にはいくらか準備が必要であるが、記号が煩雑になるのでここでは証明しない。詳しくは [4] を参照してほしい。

命題 8. ユニタリー指標 χ と正の数 $s > 0$ によって、$|a|^s\chi(a)(log|a|)^n$ の形で書ける ${F_v}^\times$ の有限関数の線形和全体を X とおく。また、X の元の積で表せられる $({F_v}^\times)^2$ の有限関数の全体を Y とおく。このとき、有限個の $f_i \in Y$ があって、任意の *Whittaker* 関数 W_v に対して、$\phi_\chi \in S(F_v^2 \times K_v)$ で次を満たすものが存在する：

$$W_v(tk) = \delta_{B_0}^{\frac{1}{2}}(t) \sum_i \phi_i(a, b, k) f_i(a, b)$$

ここで k は $\mathrm{G}(F_v)$ の極大コンパクト部分群 K_v の元で、

$$t = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & 1 & \\ & & & ab^{-1} \end{pmatrix}.$$

上の命題を使って次の結果が示せる。

命題 9. 任意の π_v について、$Z_v(\Phi_v, W_v, s)$ が半平面 $\mathrm{Re}\, s > 1 - \eta$ で絶対収束するような $\eta > 0$ が存在する。

6 主定理の証明

前節の補題を使って、主定理の証明をする。証明の大筋は [4] に従う。

Proof. $\varphi \in V_\pi$ を滑らかなベクトルで、それに付随した Whittaker 関数が局所 Whittaker 関数の積に書けるベクトルとする。また、Φ を 2 変数の Schwartz-Bruhat 関数で $\Phi = \otimes \Phi_v$ と書ける関数とする。ただし、$v \notin S$ では Φ_v が整数環の格子の特性関数となるようにとる。Re s が十分大きい時には, 次のように書くことが出来る：

$$Z(s,\varphi) = L^S(s) \prod_{vS} Z_v(\Phi_v, W_v, s).$$

命題 9 から、正の数 $\eta > 0$ を Re $s > 1-\eta$ で局所積分が収束し正則するようにとれる。さらに、命題 7 から, 局所積分は恒等的に零ではない。従って、L-関数は半平面 Re $s > 1-\eta$ の有理型関数に拡張できる。ここで、この L-関数は Langlands-Shahidi 理論によって、全平面の有理型関数への拡張が証明されることに注意しておく。(cf. [6],[8])

周期積分 $Sh(\varphi)$ がある φ について消えないと仮定する。すると、線形性と連続性から, 付随する Whittaker 関数が局所 Whittaker 関数の積になるようなある φ に関しても周期積分は消えない。このとき、W は $v \notin T$ のときは W_v が spherical Whittaker 関数となるような、ある素点の有限集合 $T \supseteq S$ があって、$\otimes W_v$ と書くことができる。

Φ を Schwartz-Bruhat 関数で局所関数の積で、すべての v について $\Phi_v(0) \neq 0$、かつすべての $v \notin T$ にで Φ_v が整数環の格子の特性関数となるようにとる。 このとき大域積分は $s=1$ で極をもつ。

$$Z(s,\varphi) = L^T(s) \prod_{v \notin T} Z_v(\Phi_v, W_v, s) \tag{3}$$

と、命題 9 から局所積分は $s=1$ で正則となるので、局所 L-関数は $s=1$ で極をもつ。

極の位数が 1 より高いとすると、φ と Φ を上の条件をみたし、さらに $Z_v(\Phi_v, W_v, s) \neq 0$ となるように選ぶことができる。このとき、式 (3) により, 大域積分は位数が 1 より高い極をもつので、これは命題 3 に矛盾する。従って、$L^T(s)$ は $s=1$ で 1 位の極をもつ. ここで、つぎの式が成り立つことに注意する：

$$L^S(s) = L^T(s) \prod_{v \in T \setminus S} L(s, \pi_v, \wedge_t^2 \otimes \xi_v). \tag{4}$$

命題 7 と命題 9 から、局所 L-因子は $s=1$ で零でなく、かつ正則である。故に、式 (4) から L-関数 $L^S(s)$ は $s=1$ において 1 位の極をもつ。

一方、$\xi^2 \omega_\pi|_{\mathbb{A}_F^\times} \neq 1$ と仮定する。このとき、命題 3 から、大域積分 $Z(s,\varphi)$ は全ての Φ と φ について $s=1$ で正則である。また命題 7 から、$v \in S$ について、W_v と Φ_v を $Z_v(1) \neq 0$ となるようにとれる。従って、

$$L^S(s) = \frac{Z(s,\varphi)}{\prod_{v \notin S} Z_v(\Phi_v, W_v, s)}$$

は $s=1$ で正則でなければならない。

逆に、$\xi^2 \omega_\pi|_{\mathbb{A}_F^\times} = 1$ と仮定する。 周期積分はすべての滑らかな φ に関して収束し、Frechet 位相に関して、連続的に φ に依存する。このことから、周期積分が全ての滑らかな φ について消えることと、 周期積分が全ての K-有限な φ について消えることとは同値である。従って、周期積分が全ての φ について消えるとすると、命題 3 により大域積分 $Z(s,\varphi)$ は $s=1$ において、どんなデータをとっても正則である。 □

注意：論文 [10] で考えられている L-関数は、本稿でいうところの twisted exterior square L-関数である。我々は generic な保型形式に対して積分表示を構成したのに対し、菅野氏は正則な保型形式についてこの L-関数の積分表示を与えている。

謝辞：この研究集会での講演の機会を与えてくださった都築正男先生、様々な形での励まし、助言をしてくださった市野篤史先生に感謝します。

参考文献

[1] W. Casselman and J. Shalika: *The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function,* Compositio Math. 41 (1980), no. 2, 207–231.

[2] W. T. Gan and J. Hundley: *The spin L-function of quasi-split* D_4, IMRP Int. Math. Res. Pap. 2006, Art. ID 68213, 74 pp.

[3] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro and J. Shalika: *Automorphic forms on* GL(3) *I, II* Ann. of Math. (2) 109 (1979), no. 1 169–212 and no. 2, 213–258.

[4] H. Jacquet and J. Shalika: *Exterior square L-functions,* Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), 143–226, Perspect. Math., 11, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[5] H. Jacquet and J. Shalika: *On Euler products and the classification of automorphic representations I,* Amer. J. Math. 103 (1981), no. 3, 499–558.

[6] H. Kim and M. Krishnamurthy: *Twisted exterior square lift from* $\mathrm{GU}(2,2)_{E/F}$ *to* GL_6/F, J. Ramanujan Math. Soc. 23 (2008), no. 4, 381–412.

[7] J. Rogawski: *Analytic expression for the number of points mod p,* The zeta functions of Picard modular surfaces, 65–109, Univ. Montreal, Montreal, QC, 1992.

[8] F. Shahidi: *On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain L-functions.* Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 3, 547–584.

[9] D. Soudry: *On the Archimedean theory of Rankin-Selberg convolutions for* $\mathrm{SO}_{2l+1} \times \mathrm{GL}_n$, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 28 (1995), no. 2, 161–224.

[10] T. Sugano: *On the L-function Associated with Hermitian Modular Forms of Genus 2* Bull. Fac. Educ. Mie. Univ. 42(Natur. Sci): 1-28, 1991

[11] B. Tamir: *On L-functions and intertwining operators for unitary groups.* Israel J. Math. 73 (1991), no. 2, 161–188.