数理解析研究所講究録
第 1720 巻 2010 年 81-98

パンルヴェ III 型方程式のある解に対応した $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐

首都大学東京大学院理工学研究科　奥原 沙季 (Saki Okuhara)
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University

本稿では，調和写像に関連した理論による，$\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐の構成法について述べるとともに，それがある状況においてはパンルヴェ III 型方程式の解を導出することを考察する．しかしながら，特殊ラグランジュ部分多様体の多少の紹介も込めて，まずは基本的なところから始めたい．

1　特殊ラグランジュ部分多様体と調和写像

特殊ラグランジュ部分多様体は，Harvey-Lawson ([8]) によって定義された，カラビ - ヤウ多様体の実部分多様体である．当初は複素多様体の極小部分多様体としての位置付けであったものの，ミラー対称性予想の一つに主要な対象として登場して以来 ([16])，3 次元のものを中心に様々な研究が行われてきた．

参考文献としては [5], [8], [10]，邦文は未だ少ないが，岩波数学辞典第 4 版に記述のある他 (「スペシャル幾何学」の項)，[4], [11] などがある．

1.1　特殊ラグランジュ部分多様体

定義 1.1 (カラビ - ヤウ多様体). (M,J,ω) を m 次元ケーラー多様体とする．ここで (M,J) は複素多様体，ω はケーラー形式．M 上の至るところ零にならない正則 m 形式 Ω で，次の関係式

$$\frac{\omega^m}{m!} = (-1)^{m(m-1)/2}\left(\frac{i}{2}\right)^m \Omega\wedge\bar{\Omega}$$

をみたすものが存在するとき，(M,J,ω,Ω) をカラビ - ヤウ (Calabi-Yau) 多様体という．

注意 1.2. カラビ - ヤウ多様体の定義は (同値でないものも含めて) 複数ある．

定義 1.3 (キャリブレーション). (M,g) を m 次元リーマン多様体，φ を M 上の k 次閉微分形式とする ($k\leq m$)．任意の向き付けられた k 次元部分空間 $V\subset T_xM$ $(x\in M)$ に対して，

$$\varphi|_V \leq \mathrm{vol}_V$$

が成り立つとき，φ を M 上のキャリブレーション (calibration) という．但し，vol_V は g から誘導される，V 上の標準的な体積要素．

また vol_V は V 上の k 次元微分形式であるから，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して，$\varphi|_V = \alpha \mathrm{vol}_V$ が成り立つ．ここで，$\varphi|_V \leq \mathrm{vol}_V$ とは $\alpha \leq 1$ であることと定める．

N を M と適合した向きをもつ，M の k 次元部分多様体とする．このとき，点 $x \in N$ における接空間 T_xN は T_xM の向き付けられた部分空間である．任意の点 $x \in N$ について，

$$\varphi|_{T_xN} = \mathrm{vol}_{T_xN}$$

が成り立つとき，N をキャリブレートされた (calibrated) 部分多様体，または φ 部分多様体とよぶ．

キャリブレートされた部分多様体は極小部分多様体になる．実際，N がコンパクトである場合にそのことを示したのが次の命題である．

命題 1.4. [5, Prop. 7.1] (M,g) をリーマン多様体，φ を M 上の k 次キャリブレーションとする．また，N を φ でキャリブレートされた M のコンパクト k 次元部分多様体とする．このとき，N は同一ホモロジー類内で体積最小である．

定義 1.5 (特殊ラグランジュ部分多様体)**.** (M,J,ω,Ω) を m 次元カラビ - ヤウ多様体，N は M の実 m 次元部分多様体で，M と適合した向きをもつとする．

このとき，N が M の特殊ラグランジュ (special Lagrangian) 部分多様体であるとは，N が Ω の実部 $\mathrm{Re}\Omega$ でキャリブレートされた部分多様体，すなわち

$$\mathrm{Re}\Omega|_{T_xN} = \mathrm{vol}_{T_xN} \quad (x \in N)$$

が成り立つことと定義する．

注意 1.6. 正則 m 形式 Ω は $e^{i\theta}$ 倍の自由度をもつ．そのため，特殊ラグランジュ部分多様体も $e^{i\theta}$ 倍の自由度をもって存在する．

特殊ラグランジュ部分多様体はキャリブレートされた部分多様体であるから，特に極小部分多様体でもある．またその名の通り，特殊ラグランジュ部分多様体は (M,J,ω,Ω) のラグランジュ部分多様体である，すなわち，M の実 m 次元部分多様体 N であって，$\omega|_{T_xN} \equiv 0$ $(x \in N)$ をみたす．

ラグランジュ部分多様体の観点からは，N が特殊ラグランジュ部分多様体であるための同値条件として，次の命題が成り立つ．

命題 1.7. [5, Prop. 8.3] m 次元カラビ - ヤウ多様体 (M,J,ω,Ω) の実 m 次元部分多様体 N が，M の特殊ラグランジュ部分多様体となるのは，任意の点 $x \in N$ と適当な向きについて $\omega|_{T_xN} \equiv 0$ かつ $\mathrm{Im}\Omega|_{T_xN} \equiv 0$ が成り立つときであり，かつそのときに限る．

1.2 調和写像

極小部分多様体は調和写像と深い関わりをもつ．実際，その関係性は各々の定義を振り返ることによって確かめることができる．調和写像の理論は [13] に詳しい．

(M,g), (N,h) をそれぞれ m 次元，n 次元の連結リーマン多様体，$\psi : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．このとき，ベクトル束 $T^*M \otimes \psi^{-1}TN$ の C^∞ 級切断 $d\psi \in \Gamma(T^*M \otimes \psi^{-1}TN)$ と $T^*M \otimes \psi^{-1}TN$ 上の接続 ∇ を用いて得られる，ベクトル束 $T^*M \otimes T^*M \otimes \psi^{-1}TN$ の C^∞ 級切断

$$\nabla d\psi \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \psi^{-1}TN)$$

を ψ の第 2 基本形式 (the second fundamental form) という．

また，その跡 (trace)

$$\mathrm{tr}(\nabla d\psi) = \sum_{i=1}^{m} \nabla d\psi(x)(e_i, e_i) \in \Gamma(\psi^{-1}TN)$$

($e_1, \ldots, e_m$ は T_xM の正規直交基底) を ψ のテンション場 (tension field) とよぶ．$\mathrm{tr}(\nabla d\psi)$ は T_xM の正規直交基底のとり方によらない．

定義 1.8 (調和写像)**.** C^∞ 級写像 $\psi \in C^\infty(M,N)$ が調和写像 (harmonic map) であるとは，M 上で

$$\mathrm{tr}(\nabla d\psi) \equiv 0$$

が成り立つことである．

(M,g), (N,h) を それぞれ m 次元，n 次元リーマン多様体，$u : N \to M$ を N から M への C^∞ 級はめ込みとする．$u^*g = h$ が成り立つとき，u を等長はめ込みという．

∇, ∇' をそれぞれ M, N のレビ - チビタ接続とする．等長はめ込み $u : (N,h) \to (M,g)$ に対して，

$$A : T^*N \times T^*N \to TN^\perp, \quad A(X,Y) = \tilde{\nabla}_X du(Y) - du(\nabla'_X Y)$$

を u の第 2 基本形式という．但し $\tilde{\nabla}$ は ∇ の誘導接続．また T_xN $(x \in N)$ の h_x に関する正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対し，

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{A(e_i, e_i)}{n}$$

を N の平均曲率ベクトル場という．ここで，H は T_xN の正規直交基底のとり方によらない．

定義 1.9 (極小部分多様体)**.** N が M の極小部分多様体であるとは，N の平均曲率ベクトル場が恒等的に零になることである．

調和写像 $u : N \to M$ が等長はめ込みであるとき，部分多様体 N の第 2 基本形式 A は，調和写像 u の第 2 基本形式 ∇du と等しい．またこのとき，調和写像のテンション場と平均曲率ベクトル場の間に $nH = \mathrm{tr}(\nabla du)$ という関係が成り立つ．したがって，調和写像 $u : N \to M$ が等長はめ込みであることと，N が M の極小部分多様体であることは同値である．

今後，特に調和写像が共形である場合を扱う．

定義 1.10. (M,g), (N,h) をリーマン多様体，$\psi : M \to N$ を C^∞ 級写像とするとき，$\psi \in C^\infty(M,N)$ が共形 (conformal) 写像であるとは，ある関数 $\xi \in C^\infty(M)$ が存在して $\psi^* h = e^{2\xi} g$ が成り立つことである．

特に，リーマン面 S から複素 n 次元射影空間 $\mathbb{C}P^n$ への調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}P^n$ について，S の複素局所座標を z，$\mathbb{C}^{n+1}$ 上のエルミート内積を $\langle \, , \, \rangle$ とするとき，同値関係

$$\psi : S \to \mathbb{C}P^n \text{は共形写像} \Longleftrightarrow \langle d\psi(\frac{\partial}{\partial z}) \, , \, d\psi(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \rangle = 0$$

が成り立つ．

1.3 $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐と共形調和写像

定義 1.11 (特殊ラグランジュ錐)**.** N が $\mathbb{C}^n$ 内の特殊ラグランジュ錐であるとは，$\{0\} \in N$ かつ $N - \{0\}$ が $\mathbb{C}^n$ の特殊ラグランジュ部分多様体であり，任意の $t > 0$ について $N = tN$ が成り立つことと定義する．

一般に，$\mathbb{C}^n$ 内の特殊ラグランジュ錐と S^{2n-1} の極小ルジャンドル部分多様体の間には，次のような対応がある．

命題 1.12. [12] N が $\mathbb{C}^n$ 内の特殊ラグランジュ錐であるのは，$\Sigma = N \cap S^{2n-1}$ が S^{2n-1} の極小ルジャンドル部分多様体であるときであり，かつそのときに限る．

また，極小ルジャンドルはめ込み $\phi : \Sigma \to S^{2n-1}$ と極小ラグランジュはめ込み $\psi : \Sigma \to \mathbb{C}P^n$ について，以下の命題が成り立つ．

ここで，$\phi : \Sigma \to S^{2n-1}$ が極小ルジャンドルはめ込みであるとは，ϕ が極小はめ込みであり，かつ像 $\phi(\Sigma)$ が S^{2n-1} のルジャンドル部分多様体であることをいう．極小ラグランジュはめ込みについても同様．

命題 1.13. [12] Σ を S^{2n-1} の向き付けられた連結部分多様体，$\phi : \Sigma \to S^{2n-1}$ を極小ルジャンドルはめ込みとする．このとき，$\psi = \pi \circ \phi : \Sigma \to \mathbb{C}P^n$ は極小ラグランジュはめ込みである．

また逆に，$\psi : \Sigma \to \mathbb{C}P^n$ を極小ラグランジュはめ込みとすると，ψ に対して極小ルジャンドルはめ込み $\tilde{\phi} : \tilde{\Sigma} \to S^{2n-1}$ が存在する．ここで，$\tilde{\Sigma}$ は Σ の普遍被覆空間．

Σ が特に単連結の場合，命題 1.13 より極小ラグランジュはめ込み $\psi : \Sigma \to \mathbb{C}P^n$ と極小ルジャンドルはめ込み $\phi : \Sigma \to S^{2n-1}$ は (合同を除いて) 一対一に対応する．

以上を $n = 3$ の場合について考える．

N を $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐とする．N と 5 次元球面 S^5 の共通部分 $S := N \cap S^5$ にはリーマン面の構造が入り，かつ S は S^5 の極小ルジャンドル部分多様体となる．但し，S の向きと計量は S^5 から誘導されたものとする．

次に，S から S^5 への包含写像を ϕ とする．このとき $\phi : S \to S^5$ は共形調和写像である．また，S^5 から複素 2 次元射影空間 $\mathbb{C}P^2$ への標準的な射影を π とすると，$\phi(S)$ の π による像 $\pi(\phi(S))$

は $\mathbb{C}P^2$ の極小ラグランジュ部分多様体となり，合成写像 $\psi := \pi \circ \phi : S \to \mathbb{C}P^2$ もまた共形調和写像となる．

反対に，リーマン面 S からの極小ラグランジュはめ込み $\psi : S \to \mathbb{C}P^2$ が与えられたとき，命題 1.13 より，$\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐および極小ルジャンドルはめ込み $\phi : \tilde{S} \to S^5$ が得られる ($\tilde{S}$ は S の普遍被覆空間).

1.4 調和写像と戸田格子方程式系

以下，S をリーマン面，z を S の複素局所座標とする．

調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}P^n$ が与えられたとき，$\psi = \psi_0$ かつ $\psi_k : S \to \mathbb{C}P^n$ が調和写像となる列 $\{\psi_k\}$ をつくることができる ([1])．これを調和写像列という．

この構成によると，各写像 $\psi_k : S \to \mathbb{C}P^n$ は自明束 $S \times \mathbb{C}^{n+1}$ の複素直線部分束 $L_k = \psi_k{}^*L$, $L := \{(x,v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \,|\, v \in x\}$ と一対一に対応し，点 $x \in S$ における各 L_k のファイバーは互いに $\mathbb{C}^{n+1}$ 上のエルミート内積 $\langle\, ,\, \rangle$ について直交する．したがって，調和写像列 $\{\psi_k\}$ は，互いに直交する複素直線部分束の列 $\{L_k\}$ を与える．

複素直線部分束 L_k, L_j が互いに直交するとき，対応する調和写像 ψ_k, ψ_k は互いに直交するという．

注意 1.14. 調和写像列 $\{\psi_k\}$ は必ずしも任意の $k \in \mathbb{Z}$ において定義されない．ψ_k が正則，つまり S の複素局所座標を z として $\partial \psi_k / \partial \bar{z} = 0$ が成り立つとき，ψ_{k+1} は定義されない．同様に，ψ_k が反正則，すなわち $\partial \psi_k / \partial z = 0$ であるとき，ψ_{k-1} は定義されない．

ある $k \in \mathbb{Z}$ で ψ_k が正則 (反正則) ならば，任意の $l \leq k+1$ ($l \geq k-1$) で ψ_l は定義されない，すなわち $\{\psi_k\}$ は有限列となる．

定義 1.15 (超極小写像)**.** 調和写像列 $\{\psi_k\}$ が任意の $k \in \mathbb{Z}$ で定義されるとき，調和写像 $\psi = \psi_0 : S \to \mathbb{C}P^n$ を非等方的 (non-isotropic) であるという．そうではないとき，ψ は超極小 (superminimal) または等方的 (isotropic) であるという．

命題 1.16. [1] 調和写像列 $\{\psi_k\}$ のある k 個連続した要素が互いに直交するならば，$\{\psi_k\}$ のすべての k 個連続した要素は互いに直交する．

調和写像列 $\{\psi_k\}$ が互いに直交する k 個連続した要素をもつとき，$\{\psi_k\}$ は k 直交性をもつという．任意の調和写像列は，2 直交性をもつ．また，調和写像列 $\{\psi_k\}$, $\psi_k : S \to \mathbb{C}P^n$，がもつのは多くとも n 直交性までであり，$n+1$ 直交性はもたない．

さらに調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}P^n$ が共形写像であるとき，対応する調和写像列は 3 直交性をもち，このときすべての要素 ψ_k は共形写像となる．

定義 1.17 (超共形写像)**.** 調和写像列 $\{\psi_k\}$ が周期的であるとき，調和写像 $\psi = \psi_0 : S \to \mathbb{C}P^n$ は超共形 (superconformal)，または非等方的 (non-isotropic) であるという．

$n = 1$ の場合，すなわち $\psi : S \to \mathbb{C}P^1$ のとき，ψ は常に超極小である．$n = 2$ のとき，特に次のことが成り立つ．

命題 1.18. [1] 共形調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}P^2$ は超極小であるか，または超共形である．

いま，調和写像列 $\{\psi_k\}$ に対応して構成される複素直線部分束の列を $\{L_k\}$ とする．このとき，L_k の正則切断 f_k について次のような性質が成り立つ．ここで L_k の切断 s が正則であるというのは，$\partial s/\partial\bar{z}$ が $\mathbb{C}^{n+1}$ 上のエルミート内積 $\langle\, ,\,\rangle$ について L_k と直交することと定義する．

$f_0 \in \Gamma(L_0)$ を，$L_0 = \psi^* L$ の零にならない任意の正則切断とすると，各点 $f_k \in \Gamma(L_k)$ は L_k の零にならない正則切断であって，次の関係式をみたす写像列 $\{f_k\}$ を一意に構成することができる ([1]).

$$\frac{\partial f_k}{\partial z} = f_{k+1} + \frac{\partial}{\partial z}(\log|f_k|^2) f_k, \quad \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}} = -\frac{|f_k|^2}{|f_{k-1}|^2} f_{k-1}. \tag{1.1}$$

このとき $\{f_k\}$ の任意の２点 f_k, f_l は $\langle\, ,\,\rangle$ について直交する: $\langle f_k, f_l\rangle = 0$.

次の微分方程式系

$$\begin{cases} (w_i)_{z\bar{z}} = e^{w_{i+1}-w_i} - e^{w_i - w_{i-1}} \\ w_i = w_{i+n+1} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ w_0 + \cdots + w_n = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

を周期的２次元戸田格子方程式系という．これはよく知られているように可積分系の一種であり，幾何学的な対象と関係が深い．

また，(1.2) に条件 $n = 2, w_0 = 0$ を付け加えて簡約化した方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = e^{-2f} - e^f, \quad f : S \to \mathbb{R} \tag{1.3}$$

をティツェイカ (Tzitzéica) 方程式という．ここで，$f = w_1$ とした．

さて，$\psi : S \to \mathbb{CP}^n$ が超共形写像であるとき，$\{\psi_k\}$ から２次元戸田格子方程式系の解を構成することができる ([1]).

反対に，戸田格子方程式系の解 $\{w_k\}$, $w_k : S \to \mathbb{C}$ が与えられたとき，(原理的には) 調和写像 $\psi : S \to \mathbb{CP}^n$ を構成することも可能である．そのために，戸田枠と呼ばれる行列値関数 $F : S \to GL(n, \mathbb{C})$ を定義する ([2]).

U を S の開集合，z を U の複素局所座標とする．調和写像列 $\{\psi_k\}$ より構成された写像列 $\{f_k\}$ に対し，$F : U \to GL(n, \mathbb{C})$ を $F = \begin{pmatrix} | & & | \\ f_0 & \cdots & f_{n-1} \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |f_0|^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & |f_{n-1}|^{-1} \end{pmatrix}$ と定めると，F は $SU(n)$ への写像となる．この写像 F を ψ の戸田枠 (Toda frame) とよぶ．このとき，$d + F^{-1}dF$ は平坦接続となる．

$$d(F^{-1}dF) + \frac{1}{2}\left[(F^{-1}dF) \wedge (F^{-1}dF)\right] = 0. \tag{1.4}$$

また，$F^{-1}dF$ は $\{f_k\}$ から構成される戸田格子方程式系の解 $\{w_k\}$ を用いて表すことができる，

すなわち，

$$
\begin{aligned}
F^{-1}dF &= F^{-1}\frac{\partial F}{\partial z}dz + F^{-1}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \\
&= \{(A)_z + B\}dz + \{(A)_{\bar{z}} - {}^t B\}d\bar{z},
\end{aligned}
$$

$$
A = \frac{1}{2}\mathrm{diag}\,(w_0, \ldots, w_{n-1}),
$$

$$
B = \begin{pmatrix}
0 & & & & e^{(w_0 - w_{n-1})/2} \\
e^{(w_1 - w_0)/2} & 0 & & & \\
& e^{(w_2 - w_1)/2} & \cdots & & \\
& & \cdots & 0 & \\
& & & e^{(w_{n-1} - w_{n-2})/2} & 0
\end{pmatrix}
$$

となる．

逆に戸田格子方程式系の解 $\{w_k\}$ が与えられたとき，上の行列 A, B から $su(n)$ 値 1 次微分形式 $\alpha = \{(A)_z + B\}dz + \{(A)_{\bar{z}} - {}^t B\}d\bar{z}$ が定義されるが，このとき戸田枠 $F : U \to SU(n)$ は α に関する常微分方程式系 $dF = F\alpha$ の解となる．したがって，F を求めるには常微分方程式系 $dF = F\alpha$ を解けばよい．特に，U が単連結である場合，F は $SU(n)$ 倍を除いて一意に定まる．

$\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ が超極小写像であるときも類似の議論が成り立つ．

1.5 $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐とティツェイカ方程式

$\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐 N に対して得られる共形調和写像を $\phi : S \to S^5$, $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ とする．このとき N に対応する戸田格子方程式系の解 $\{w_k\}$ を求めたい．そのためには (1.1) をみたす正則切断の列 $\{\phi_k\}$ を求める必要がある．

U を S の開集合，$z = x + iy$ を U の複素局所座標とする．また $\mathbb{C}^3$ 上の計量は標準的なものとする．前述の議論により，次の補題が成り立つ．

補題 1.19. (1.1) をみたし，$\phi_0 = \phi$ であるような正則切断の列 $\{\phi_k\}$ が一意に存在する．

$\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ が超共形調和写像であると仮定する．このとき補題 1.19 より，(1.1) をみたし $\phi_0 = \phi$ となる正則切断の列 $\{\phi_k\}$ が存在する．$\{\phi_k\}$ は適当な複素局所座標 z をとることで周期的，すなわち任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\phi_k = \phi_{k+3}$ をみたす列となる．したがって，$\{\phi_k\}$ より構成された戸田格子方程式系の解 $\{w_k\}$，$w_k = \log|\phi_k|^2$ も周期的である．いま $|\phi_0| = |\phi| = 1$ より $w_0 = 0$ であるから，解 $w_1 = -w_2$ は特に (1.3) の解となる．

(1.1) を用いて写像列 $\{\phi_k\}$ を具体的に計算すると，

$$
\phi_0 = \phi, \quad \phi_1 = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \phi_2 = -\left|\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\right|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}
$$

となり，ティツェイカ方程式の解は $w_1 = \log|\phi_1|^2 = 2\log|\partial\phi/\partial z|$ と表される．

1.6 ティツェイカ方程式とパンルヴェ III 型方程式

ここで，ティツェイカ方程式とパンルヴェ III 型方程式の関係について述べる．

ティツェイカ方程式 (1.3) を，S の複素局所座標 z の極座標表示 $z = re^{i\theta}$ $(r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて表すと，

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(u(r,\theta)) = e^{-2u(r,\theta)} - e^{u(r,\theta)}$$

となる．特に $u(r,\theta)$ が θ 不変であるとき，

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)(u(r)) = e^{-2u(r)} - e^{u(r)} \tag{1.5}$$

と表されるが，これはパンルヴェ III 型とよばれる常微分方程式に等しい．

パンルヴェ (Painlevé) 方程式は 2 階常微分方程式の一種で，可積分系として非常に有名である．パンルヴェ方程式はその性質により I 型〜 VI 型に分類され，その内 III 型の一般型は

$$y_{xx} = \frac{{y_x}^2}{y} - \frac{y_x}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C})$$

と表される．

(1.5) がパンルヴェ III 型方程式となることは変数変換によって確かめられる．

1. $u(r) = v(r) + \log r^{-1/2}$ に変換:
$$\frac{1}{4}\left(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r\right) = re^{-2v} - e^v r^{-1/2}.$$

2. $r = ax^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0,\ x \in \mathbb{R}_{>0})$ に変換:
$$v_{xx} + \frac{1}{x}v_x = \frac{16}{9}\left(a^3 e^{-2v} - a^{3/2}x^{-1}e^v\right).$$

3. $y(x) = e^{v(x)}$ に変換:
$$y_{xx} = \frac{y_x^2}{y} - \frac{y_x}{x} - \frac{16}{9}a^{3/2}\frac{y^2}{x} + \frac{16}{9}a^3\frac{1}{y}.$$

III 型はその複素パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ によって，さらに 4 つの型に分類される．ティツェイカ方程式に対応するのは (D_7) 型で，上の一般型に $\gamma = 0,\ \alpha\delta \neq 0$ (または $\delta = 0,\ \beta\gamma \neq 0$) という条件を付け加えたものである．

この場合，対応するパラメータは $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{16}{9}a^{3/2}, 0, 0, \frac{16}{9}a^3\right)$ であり，$a \neq 0$ より (D_7) に相当することがわかる．

パンルヴェ方程式に関する参考文献としては，[14] などがある．

2 一般化されたワイエルシュトラス型表現公式

調和写像論や曲面論に関連して，一般化されたワイエルシュトラス型表現公式という理論がある ([3])．これは一言でいえば，単連結リーマン面から対称空間への調和写像の構成法であり，そのような調和写像すべてを構成し得るという意味で，非常に体系的であるといえる．

尚，原論文の著者名の頭文字をとって，DPW 法や DPW 表現とよばれることもある．

2.1 ループ群

以下，G をコンパクト半単純リー群，$\mathfrak{g}$ を G のリー環，$S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ とする．

次の関数空間

$$\Lambda G = \left\{ \gamma : S^1 \to G \,\middle|\, \gamma \text{ は } C^\infty \text{級} \right\}$$

を G のループ群 (loop group) という．同様に，

$$\Lambda \mathfrak{g} = \left\{ \xi : S^1 \to \mathfrak{g} \,\middle|\, \xi \text{ は } C^\infty \text{級} \right\}$$

を G のループ環 (loop algebra) という．$\Lambda G, \Lambda \mathfrak{g}$ はそれぞれ無限次元リー群，無限次元リー環である．

次に $\sigma : G \to G$ を位数 k の自己同型，$K = G^\sigma$ を σ の固定部分群，$\omega = e^{2\pi i/k}$ とする．また，σ から誘導される $\mathfrak{g}$ の自己同型も σ で表す.

このとき定義される関数空間

$$(\Lambda G)_\sigma = \left\{ \gamma : S^1 \to G \,\middle|\, \gamma(\omega\lambda) = \sigma\gamma(\lambda),\ \lambda \in S^1 \right\}$$

をねじれループ群 (twisted loop group) という．リー環 $\mathfrak{g}$ に対しても同様にねじれループ環 $(\Lambda \mathfrak{g})_\sigma$ が定義できる．

G の複素化 $G^\mathbb{C}$，領域 $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$，$K^\mathbb{C}$ の部分群 H に対し，

$$(\Lambda_H^+ G^\mathbb{C})_\sigma = \left\{ \gamma \in (\Lambda G^\mathbb{C})_\sigma \,\middle|\, \gamma \text{ は } D \text{ へ正則に拡張され，} \gamma(0) \in H \right\}$$

と定める．特に $H = K^\mathbb{C}$ のとき，H を省略して表すこととする．

$G^\mathbb{C} = G \cdot \tilde{B}$ を $G^\mathbb{C}$ の岩澤分解とする．このとき，以下のループ群の分解が知られている．

定理 2.1. [3, Thm. 2.2] 次の微分同相が成り立つ.

$$\Lambda G \times \Lambda_{\tilde{B}}^+ G^\mathbb{C} \cong \Lambda G^\mathbb{C}.$$

したがって定理 2.1 により，任意の $\gamma \in \Lambda G^\mathbb{C}$ に対し，$\gamma = ab$ をみたす $a \in \Lambda G$, $b \in \Lambda_{\tilde{B}}^+ G^\mathbb{C}$ が一意に存在する．

ねじれループ群に対しても，同様の定理が成り立つ．ここで $K^\mathbb{C} = K \cdot B$ を $K^\mathbb{C}$ の岩澤分解とする．B は $K \cap B = \{e\}$ をみたす $K^\mathbb{C}$ の可解部分群であり，対応するリー環の分解 $\mathfrak{k}^\mathbb{C} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}$ をもつ．

定理 2.2. [3, Thm. 2.3] 次の微分同相が成り立つ.

$$(\Lambda G)_\sigma \times (\Lambda_B^+ G^\mathbb{C})_\sigma \cong (\Lambda G^\mathbb{C})_\sigma.$$

2.2 対称空間，対称空間への調和写像

定義 2.3 (リーマン対称空間). リーマン多様体 (M,g) がリーマン対称空間 (Riemannian symmetric space) であるとは，任意の点 $p \in M$ に対して，次の条件をみたす写像 $s_p : M \to M$ が存在することである．
(1) p は s_p の孤立固定点
(2) s_p は回帰的 (対合的，involutive)，すなわち $s_p{}^2 = id$
(3) s_p は等長変換

定義 2.4 (リーマン対称対). G を連結リー群，K を G の閉部分群とする．組 (G,K) がリーマン対称対 (Riemannian symmetric pair) であるとは，次が成り立つことと定める．
(1) $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$ をみたす G の回帰的自己同型 $\sigma(\neq id)$ が存在する．但し，G^σ は G の固定部分群，$(G^\sigma)_0$ は G^σ の単位元を含む連結成分である．
(2) $\mathrm{Ad}_G(K)$ は $\mathrm{Ad}_G(G)$ のコンパクト部分群．

次の命題は，リーマン対称対がリーマン対称空間であることを示している．

命題 2.5. [9, Prop. 3.4] (G,K) をリーマン対称対とする．このとき，G/K の G 不変なリーマン計量 g が存在して，(G,g) はリーマン対称空間となる．

注意 2.6. 上の命題とは逆に，リーマン対称空間からリーマン対称対を構成することも可能である ([9, Thm. 3.3]).

S を単連結リーマン面，G/K を対称空間，$\sigma : G \to G$ を回帰的自己同型とする．また G および K のリー環 をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で，$\mathfrak{g}$ のカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と表す.

命題 2.7. [3, Prop. 3.3] $f : S \to G/K$ が調和写像であるのは，条件

$$\begin{cases} \tilde{F}^{-1} d\tilde{F} = \dfrac{1}{\lambda}\alpha_1{}' + \alpha_0 + \lambda\alpha_1{}'' & \left(\begin{array}{l} \alpha_0 \text{ は } M \text{ 上の } \mathfrak{k} \text{ 値 1 次微分形式} \\ \alpha_1 \text{ は } M \text{ 上の } \mathfrak{p} \text{ 値 1 次微分形式} \end{array}\right) \\ \pi \circ \tilde{F} = f & \end{cases}$$

をみたす写像 $\tilde{F} : S \to (\Lambda G)_\sigma$ が存在するときであり，かつそのときに限る．

したがって，対称空間への調和写像 $f : S \to G/K$ に対し初期値が与えられたとき，ねじれループ群への写像 $\tilde{F} : S \to (\Lambda G)_\sigma$ を定義することができる．

定義 2.8. [3, Def. 3.4] $f : S \to G/K$ を調和写像とし，かつ $f(p_0) = eK$ をみたすとする．また，$F : S \to G$ は f のリフトで，$F^{-1}dF = \alpha_0 + \alpha_1$ をみたすとする．

このとき，$\tilde{F}^{-1}d\tilde{F} = \lambda^{-1}\alpha_1{}' + \alpha_0 + \lambda\alpha_1{}''$，初期値 $\tilde{F}(p_0) = k \in K$ を積分して得られる写像 $\tilde{F} : S \to (\Lambda G)_\sigma$ を，f の拡張されたリフト (extended lift) という．

2.3 ループ群と戸田格子方程式系

1.4 節では，超共形調和写像 $\psi: U \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ から構成される戸田格子方程式系を用いて写像 $F: U \to SU(n)$ を定義したが，この議論はループ群 $\Lambda SU(n)$ へと広げることができる．

$S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ に対し，U 上の $su(n)$ 値 1 次微分形式 α_λ を

$$\alpha_\lambda = \{(A)_z + B\}dz + \{(A)_{\bar{z}} - {}^tB\}d\bar{z},$$

$$A = \frac{1}{2}\mathrm{diag}(w_0, \ldots, w_{n-1}),$$

$$B = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & & & & & e^{(w_0 - w_{n-1})/2} \\ e^{(w_1 - w_0)/2} & 0 & & & & \\ & e^{(w_2 - w_1)/2} & \cdots & & & \\ & & \cdots & 0 & & \\ & & & e^{(w_{n-1} - w_{n-2})/2} & 0 & \end{pmatrix}$$

で定義する．$\lambda = 1$ のとき，α_1 は戸田枠を与える 1 次微分形式に他ならない．また，$d + \alpha_\lambda$ は $su(n)$ 値平坦接続を与える，すなわち

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0$$

をみたす．したがって，$\{\alpha_\lambda\}$ は平坦接続の族である．

U が単連結のとき，滑らかな 1 パラメータ族 $\{F_\lambda\}, F_\lambda: U \to SU(n), F_\lambda{}^{-1}dF_\lambda = \alpha_\lambda$ で各 F_λ が超共形写像 $\psi_\lambda: U \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の戸田枠となるものが存在する．これを ψ の拡張された戸田枠 (extended Toda frame) という．

逆に $F_\lambda: U \to SU(n)$ が拡張された戸田枠の元になるための条件は，次で表される．ここで $\omega = e^{2\pi i/3}, \Omega = \mathrm{diag}(1, \omega^{-1}, \omega^{-2})$ である．

$$\begin{aligned} &F_\lambda^{-1}dF_\lambda = (\alpha_1{}'\lambda + \alpha_0{}')\,dz + (\alpha_{-1}{}''\lambda^{-1} + \alpha_0{}'')\,d\bar{z}, \\ &\alpha_1{}', \alpha_0{}', \alpha_{-1}{}'', \alpha_0{}'': U \to sl(3, \mathbb{C}),\ \det(\alpha_1{}') \neq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\text{任意の } \lambda \in S^1 \text{ に対して，}\quad (F_\lambda^{-1}dF_\lambda)(z, \omega\lambda) = \Omega\,(F_\lambda^{-1}dF_\lambda(z, \lambda))\,\Omega^{-1}. \tag{2.7}$$

したがって，次の命題が成り立つ．

命題 2.9. [2, 10] $F_\lambda: U \to SU(n)$ が超共形写像 $\psi_\lambda: U \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ を与えるのは，$F_\lambda^{-1}dF_\lambda$ が条件 (2.6), (2.7) をみたすときであり，かつそのときに限る．

これらの議論はさらに，ねじれループ群へと拡張できる．

2.4 一般化されたワイエルシュトラス型表現公式

以下，S を単連結リーマン面，G/K を対称空間とする．次の空間 $\mathscr{H}, \tilde{\mathscr{H}}$ の間には全単射がある．

$$\mathscr{H} = \left\{ f: S \to G/K \;\middle|\; f \text{ は調和写像}, f(0) = eK \right\},$$

$$\tilde{\mathscr{H}} = \left\{ \tilde{F} : S \to (\Lambda G)_\sigma \,\middle|\, \tilde{F}\text{は拡張されたリフト}, \tilde{F}(0) = k \in K \right\} / \sim .$$

ここで，同値関係 $\sim$ を

$$\tilde{F}_1 \sim \tilde{F}_2 \Longleftrightarrow \text{あるゲージ変換 } g : S \to K \text{ が存在して，} \tilde{F}_2 = \tilde{F}_1 g \text{ が成り立つ}$$

で定義する．

以降，$\mathscr{H}$ と $\tilde{\mathscr{H}}$ を同一視して話を進める．

$$\Lambda_{-1,\infty} := \left\{ \xi : S^1 \to (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\sigma \,\middle|\, \lambda\xi\text{は } D \text{ へ正則に拡張される} \right\} \subset (\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\sigma$$
$$D = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| < 1\}$$

は原点のみに極をもち，$(\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\sigma$ の閉部分空間となる．

$\xi \in (\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\sigma$ をフーリエ級数展開したとき，ξ は

$$\xi = \sum_{k \geq -1} \lambda^k \xi_k, \quad \begin{cases} k\text{が偶数のとき} & \xi_k \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \\ k\text{が奇数のとき} & \xi_k \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

と表される．逆に，$\xi \in (\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\sigma$ が上の式をみたすならば $\xi \in \Lambda_{-1,\infty}$ である．

次に，調和写像を構成するにあたって，初期値となる正則 1 形式を定義する．

定義 2.10 (正則ポテンシャル)**.** S 上の $\Lambda_{-1,\infty}$ 値正則 1 形式を，正則ポテンシャルという．

正則ポテンシャルからなる空間を $\mathscr{P}$ とかく．

$\mu \in \mathscr{P}$ のとき，μ は $\Lambda_{-1,\infty}$ に値をとるから，フーリエ級数展開して

$$\mu = \sum_{k \geq -1} \lambda^k \mu_k, \quad \begin{cases} k\text{が偶数のとき} & \xi_k \text{ は } \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \text{ 値正則 1 形式} \\ k\text{が奇数のとき} & \xi_k \text{ は } \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \text{ 値正則 1 形式} \end{cases}$$

と表すことができる．

また，$\mu \in \mathscr{P}$ は

$$\mu = \xi dz, \quad \begin{cases} \xi : S \to \Lambda_{-1,\infty} \\ \xi = \sum_{k \geq -1} \lambda^k \xi_k \end{cases}$$

と表され，次をみたす．

$$d\mu + \mu \wedge \mu = \bar{\partial}\mu = 0.$$

これを積分すると

$$g_\mu^{-1} dg_\mu = \mu, \quad g_\mu(0) = e$$

となる写像 $g_\mu : S \to (\Lambda G^{\mathbb{C}})_\sigma$ を一意に得る．この g_μ に対して，分解 $(\Lambda G^{\mathbb{C}})_\sigma = (\Lambda G)_\sigma \cdot (\Lambda_B^+ G^{\mathbb{C}})_\sigma$ により，

$$g_\mu = \Phi_\mu b_\mu, \quad \begin{cases} \Phi_\mu : S \to (\Lambda G)_\sigma, & \Phi_\mu(0) = e \\ b_\mu : S \to (\Lambda_B^+ G^{\mathbb{C}})_\sigma \end{cases}$$

となる Φ_μ, b_μ が一意に存在する．したがって，$\mathscr{P}$ から $\mathscr{H}$ への写像

$$\Phi : \mathscr{P} \to \mathscr{H}, \quad \Phi(\mu) = [\Phi_\mu]$$

が定義される．さらに次が成り立つ．

命題 2.11. [3, Lem. 4.5] $\Phi : \mathscr{P} \to \mathscr{H}$ は全射である.

これによって，任意の調和写像 $f : S \to G/K$ はある正則ポテンシャル $\mu \in \mathscr{P}$ から得られることがわかる．この写像 $\Phi : \mathscr{P} \to \mathscr{H}$ を，一般化されたワイエルシュトラス型表現公式という.

2.5 $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐と等質空間

1.3 節で，$\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐が与えられたとき，リーマン面 S からの極小ルジャンドルはめ込み $\phi : S \to S^5$ および極小ラグランジュはめ込み $\psi : S \to \mathbb{C}P^2$ が得られること，またその逆の構成もできることをみた．この関係に基づき，$\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐をある等質空間によって特徴付けることができる ([12])．以下，$\omega = e^{2\pi i/3}$ とする.

次の旗多様体を考える.

$$FL = \left\{ (w, W) \in S^5 \times Gr_{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}^3) \;\middle|\; w \in W \right\}.$$

極小ラグランジュはめ込み $\psi : S \to \mathbb{C}P^2$ に対して定まる極小ルジャンドル水平リフト $\phi : S \to S^5$ を用いて，写像 $\Phi : S \to FL$ を

$$\Phi : S \to FL, \quad \Phi = (\phi, l_0 \oplus l_1)$$

と定義する．但し l_0, l_1 は ψ より定められる，各点で互いに直交する S 上の複素直線束.

一方，次の自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(SU(3))$ を考える.

$$\begin{aligned}
&\sigma := \xi \nu, \\
&\nu(g) = SgS^{-1} \ (g \in SU(3)), \quad S = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2), \\
&\xi(g) = T\left({}^t g^{-1}\right) T^{-1} \ (g \in SU(3)), \\
&\qquad T \in U(3) \text{ は，} Te_1 = e_1,\ Te_2 = e_3,\ Te_3 = e_2 \text{ をみたす.}
\end{aligned}$$

このとき，$SU(3)$ の固定部分群を $K = \left\{ \mathrm{diag}(1, a, a^{-1}) \in SU(3) \right\}$ に対し，同型 $FL \cong SU(3)/K$ が成り立つ.

$SU(3)$ のリー環を $\mathfrak{g} = su(3)$，K のリー環を $\mathfrak{k}$，σ の固有値 $(-\omega)^j$ $(j = 0, \ldots, 5)$ に対する固有空間を $\mathfrak{g}_j$ とすると，$\mathfrak{g}$ は次のように分解できる.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \textstyle\sum_{j \neq 0} \mathfrak{g}_j.$$

特に，$\mathfrak{g}_1$ は具体的に

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = sl(3, \mathbb{C}) \;\middle|\; X = \begin{pmatrix} & & \alpha \\ \alpha & & \\ & \beta & \end{pmatrix} \right\}$$

と表される.

命題 2.12. $\psi : S \to \mathbb{C}P^2$ を，水平リフト $\phi : S \to S^5$ をもつ極小ラグランジュはめ込みとする．このとき，リフト $\Phi : S \to FL$ が条件

$$d\Phi^{(1,0)} \in T^{(1,0)}S \otimes \Phi^*[\mathfrak{g}_1] \tag{2.8}$$

をみたすように ϕ を選ぶことができる．

逆に，(2.8) をみたす任意の調和写像 $\Phi : S \to FL$ に対して，$pr_1 \circ \Phi : S \to S^5, \pi \circ pr_1 \circ \Phi : S \to \mathbb{C}P^2$ はそれぞれ極小ルジャンドルはめ込み，極小ラグランジュはめ込みとなる．但し $pr_1 : FL \to S^5$ は第 1 成分への射影，$\pi : S^5 \to \mathbb{C}P^2$ は標準的な射影である．

注意 2.13. 一般に，(2.8) をみたす写像を原始 (primitive) 写像という．

3 ある正則ポテンシャルに対応した $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐

3.1 主結果

次は主定理である．

定理 3.1. z を $\mathbb{C}$ の複素局所座標，$\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ とする．一般化されたワイエルシュトラス型表現公式により，$\mathbb{C}$ 上正則ポテンシャル

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} & & z^{t_0} \\ z^{t_0} & & \\ & z^{t_1} & \end{pmatrix} dz \quad (t_0, t_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{3.9}$$

に対して得られる調和写像を $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^2$ とする．このとき，次が成り立つ．
(1) ψ は超共形かつ極小ラグランジュはめ込みである．
(2) ψ は $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐を与える．
(3) 定義域 $\mathbb{C} - \{0\}$ において，ψ はティツェイカ方程式の偏角不変な解を与える．また，この解はパンルヴェ III 型方程式の $(0, +\infty)$ 上滑らかな解に変数変換される．

以下，$G = SU(3)$, G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} & & z^{t_0} \\ z^{t_0} & & \\ & z^{t_1} & \end{pmatrix}$, σ は 2.5 節で定めた $SU(3)$ の自己同型とする．

補題 3.2. 一般化されたワイエルシュトラス型表現公式によって，正則ポテンシャル (3.9) から得られる調和写像 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^2$ は，超共形である．
［証明］正則ポテンシャル (3.9) に対し，

$$L^{-1}dL = \mu, \quad L(0) = e$$

となる $L \in (\Lambda SL(3, \mathbb{C}))_\sigma$ が一意に存在する．したがってループ群の岩澤分解により，$L = FB$ をみたす $F \in (\Lambda SU(3))_\sigma, B \in (\Lambda^+ SL(3, \mathbb{C}))_\sigma$ を一意に得る．$F^{-1}dF$ は

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= BL^{-1}dLB^{-1} + BdB^{-1} \\ &= \left(\lambda^{-1}B\tilde{\mu}B^{-1} + B(B^{-1})_z\right)dz + B(B^{-1})_{\bar{z}}d\bar{z}. \end{aligned}$$

と表され，$BdB^{-1} \in (\Lambda^{+}sl(3,\mathbb{C}))_{\sigma}$ であることより，

$$F^{-1}dF = \left(X+\lambda^{-1}Y\right)dz - (X^{*}+\lambda Y^{*})\,d\bar{z},$$

$$X = \mathrm{diag}(a_0,a_1,a_2) \in \mathfrak{k}, \quad Y = \begin{pmatrix} & & A_0 \\ A_1 & & \\ & A_2 & \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$$

が成り立つ．

また，$B|_{\lambda=0} \in K$ より $B|_{\lambda=0} = \mathrm{diag}(b_0,b_1,b_2)$，$b_0b_1b_2 = 1$ と表わされることに注意すると，λ^{-1} の係数行列をそれぞれ比較することにより $Y = \mathrm{Ad}(B|_{\lambda=0})\tilde{\mu}$，すなわち

$$Y = \begin{pmatrix} & & b_0z^{t_0}/b_2 \\ b_1z^{t_0}/b_0 & & \\ & b_2z^{t_1}/b_1 & \end{pmatrix}$$

となることがわかる．このとき $X, Y \in (\Lambda su(3))_{\sigma}$ であるから，F は (2.6) をみたす．

さらに，

$$\begin{aligned}\sigma\left(F^{-1}dF(z,\lambda)\right) &= \left(X+(\omega\lambda)^{-1}Y\right)dz - (X^{*}+\omega\lambda Y^{*})\,d\bar{z} \\ &= F^{-1}dF(z,\omega\lambda)\end{aligned}$$

により F は (2.7) をみたす，したがって以上により F は拡張された戸田枠の元である．よって命題 2.9 より，F に対応する調和写像 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ は超共形，すなわち正則ポテンシャル (3.9) に対して得られる調和写像は超共形である． □

次に，正則ポテンシャルの等質性について述べる．これは量子コホモロジーに由来をもつ ([7])．正則ポテンシャル η に対して，ある $X, a, b \in \mathbb{R}$ が存在し，任意の $\varepsilon \in S^1$ に対して，

$$\eta(\varepsilon^{X}z, \varepsilon\lambda) = T(\varepsilon)^{-1}\eta(z,\lambda)T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon) = \mathrm{diag}(1,\varepsilon^{a},\varepsilon^{b})$$

が成り立つとき，η は等質性 (homogenuity) をもつという．

等質性は，$L : \mathbb{C} \to (\Lambda SL(3,\mathbb{C}))_{\sigma}, F : \mathbb{C} \to (\Lambda SU(3))_{\sigma}, B : \mathbb{C} \to (\Lambda^{+}SL(3,\mathbb{C}))_{\sigma}$ についても同様に定義することができる．

［定理 3.1 の証明］(1) 補題 3.2 により，正則ポテンシャル (3.9) に対して構成される調和写像 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ は超共形である．また，ψ の戸田枠 $F : \mathbb{C} \to SU(3)$ は，特に $F : \mathbb{C} \to (\Lambda SU(3))_{\sigma}$ であることから (2.8) をみたす．よって命題 2.12 より，F に対する調和写像 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ は極小ラグランジュはめ込みである．

(2) 命題 1.12, 1.13 より，(1) で得られた極小ラグランジュはめ込み $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ に対する極小ルジャンドルはめ込み $\phi : \mathbb{C} \to S^5$，かつ ϕ に対する $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐が存在する．したがって，ψ に対する $\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐が存在する．

(3) ψ に対応するティツェイカ方程式の解は，$z = re^{i\theta}$ の偏角 θ によらないことのみ示す．μ は等質性

$$\mu(\varepsilon^{X}z, \varepsilon\lambda) = T(\varepsilon)^{-1}\mu(z,\lambda)T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon) = \mathrm{diag}(1,\varepsilon^{m},\varepsilon^{n}),$$

$$(X,m,n) = \left(\frac{3}{2t_0+t_1+3}, \frac{t_0-t_1}{2t_0+t_1+3}, \frac{t_0+t_1}{2t_0+t_1+3}\right)$$

をもつ．このとき，μ を積分した L，および F,B も等質性をもつ．特に $B|_{\lambda=0}=\mathrm{diag}(b_0,b_1,b_2)$，$b_0b_1b_2=1$ について等質性が成り立ち，$b_i(\varepsilon^X z)=b_i(z)$ $(i=0,1,2)$ である．戸田枠の定義により計算すると，ψ に対する戸田格子方程式系の解は Y の要素である $|A_0|,|A_1|,|A_2|$ によって表されるが，各 $|A_j|$ $(j=0,1,2)$ についても等質性が成り立つ．よって戸田格子方程式系の解，特にティツェイカ方程式の解も z の偏角によらない． □

いま，正則ポテンシャル (3.9) に対するティツェイカ方程式の解を具体的に求めてみる．

一般化されたワイエルシュトラス型表現公式により，正則写像 $L:\mathbb{C}\to(\Lambda SL(3,\mathbb{C}))_\sigma$ で

$$L^{-1}dL=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} & & z^{t_0}\\ z^{t_0} & & \\ & z^{t_1} & \end{pmatrix}dz$$

をみたすものが一意的に存在する．また，L の岩澤分解より，

$$L=FB\ ,\quad \begin{cases} F:\mathbb{C}\to(\Lambda SU_3)_\sigma\\ B:\mathbb{C}\to(\Lambda^+SL(3,\mathbb{C}))_\sigma \end{cases} \tag{3.10}$$

となる F,B が一意に存在する．

ここで，$F^{-1}dF$ は

$$F^{-1}dF=\left(X+\lambda^{-1}Y\right)dz-{}^t\overline{(X+\lambda^{-1}Y)}d\bar{z}, \tag{3.11}$$

$$X=\mathrm{diag}(a_0,a_1,a_2),\quad Y=\begin{pmatrix} & & A_0\\ A_1 & & \\ & A_2 & \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$a_0+a_1+a_2=0\ ,\quad a_k,\,A_k:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\text{ は }C^\infty\text{級},$$

と表されることに注意する．B についても同様に，

$$B(z,\lambda)=B_0(z)+\lambda B_1(z)+\lambda^2B_2(z)+\cdots,$$

$$B_{3k}=\mathrm{diag}\left(b_{3k,0},\,b_{3k,1},\,b_{3k,2}\right),$$

$$B_{3k+1}=\begin{pmatrix} & b_{3k+1,0} & \\ & & b_{3k+1,1}\\ b_{3k+1,2} & & \end{pmatrix},\quad B_{3k+2}=\begin{pmatrix} & & b_{3k+2,0}\\ b_{3k+2,1} & & \\ & b_{3k+2,2} & \end{pmatrix},$$

$$b_{3k+l,m}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\text{ は }C^\infty\text{級}\quad(l,m=0,1,2)$$

という表記ができる．

このことを踏まえると，(1.4) を λ の次数について整理して，等式

$$\begin{cases} \left(\bar{A}_0\right)_z+\bar{A}_0\left(a_2-a_0\right)=0\\ \left(\bar{A}_1\right)_z+\bar{A}_1\left(a_0-a_1\right)=0\\ \left(\bar{A}_2\right)_z+\bar{A}_2\left(a_1-a_2\right)=0 \end{cases},\quad \begin{cases} -(a_0)_{\bar{z}}-(\bar{a}_0)_z+|A_1|^2-|A_0|^2=0\\ -(a_1)_{\bar{z}}-(\bar{a}_1)_z+|A_2|^2-|A_1|^2=0\\ -(a_2)_{\bar{z}}-(\bar{a}_2)_z+|A_0|^2-|A_2|^2=0 \end{cases}$$

および

$$\frac{2}{3}\left(\log\frac{|A_k|}{|A_{k+1}|}\right)_{z\bar{z}} = |A_{k+1}|^2 - |A_k|^2 \quad (k=0,1,2,\ k+3=k).$$

が得られ，$u_k = \frac{2}{3}\left(\log\frac{|A_k|}{|A_{k+1}|}\right)$，$2t_0 + t_1 = l$ とおくと

$$(u_k)_{z\bar{z}} = |z|^{2l/3}\left(e^{u_{k+1}-u_k} - e^{u_k-u_{k-1}}\right) \quad (k=0,1,2,\ k+3=k)$$

となる．この式は戸田格子方程式系と同値である，つまりこの場合，変数変換

$$z = \left(\frac{l+3}{3}w\right)^{3/l+3}$$

による関数 u_k を $\tilde{u}_k$ とかくと，$\tilde{u}_k$ は周期的 2 次元戸田格子方程式系をみたす．

特に，$\mathbb{C}^3$ 内の特殊ラグランジュ錐に対応する戸田格子方程式系は $\tilde{u}_0 = 0$，すなわちティツェイカ方程式 (1.3) をみたすから，

$$(\tilde{u}_1)_{w\bar{w}} = e^{-2\tilde{u}_1} - e^{\tilde{u}_1}$$

が成り立つ．さらに，(3.10)，(3.11) および (3.12) を用いると，解 $\tilde{u}_1$ は

$$\tilde{u}_1(w) = 2\left(\log\frac{|\tilde{b}_1(w)|}{|\tilde{b}_0(w)|} + \frac{t_0-t_1}{l+3}\log|w| + \frac{t_0-t_1}{l+3}\log\frac{l+3}{3}\right)$$

と表される．但し簡単のため，$b_{0,l} = b_l$ $(l=0,1,2)$，変数変換後の変数 w による関数 b_l を $\tilde{b}_l$ とした．

また，変数変換によるパンルヴェ III 型方程式の解は

$$y(x) = \frac{|\hat{b}_1(x)|^2}{|\hat{b}_0(x)|^2} + \frac{1}{3}\log x + x^{\frac{4(t_0-t_1)}{3(l+3)}} + \left(\frac{l+3}{l}\right)^{\frac{2(t_0-t_1)}{l+3}}, \quad x = |w|^{3/2}$$

となる．ここで $\hat{b}_0, \hat{b}_1$ は，$\tilde{b}_0, \tilde{b}_1$ を x の関数としたものである．

関数 $\tilde{b}_k$ は L の岩澤分解によって一意的に定められるから，(3.9) に対するティツェイカ方程式の解も上記のように一意的に表される．

参考文献

[1] J. Bolton and L.M. Woodward, *Congruence theorems for harmonic maps from a Riemann surface into* $\mathbb{C}P^n$ *and* S^n, J. London Math. Soc. (2) 45 (1992), no. 2, 363–376.

[2] J. Bolton, F. Pedit, and L.M. Woodward, *Minimal surfaces and the affine Toda field model*, J. Reine Angew. Math. 459 (1995), 119–150.

[3] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. 6 (1998), no. 4, 633–668.

[4] 深谷賢治,『シンプレクティック幾何学』, 岩波書店, 1999.

[5] M. Gross, D. Huybrechts and D.D. Joyce, *Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Lectures from the Summer School held in Nordfjordeid, June 2001. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[6] M.A. Guest, *Harmonic maps, loop groups, and integrable systems*, London Mathematical Society Student Texts, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[7] M.A. Guest, *From quantum cohomology to integrable systems*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 15. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[8] R. Harvey and H.B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math. 148 (1982), 47–157.

[9] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc. New York-London, 1978.

[10] D.D. Joyce, *Special Lagrangian 3-folds and integrable systems*, Surveys on geometry and integrable systems, 189–233, Adv. Stud. Pure Math., 51, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.

[11] 小林正典, ミラー対称性とは?, 数学のたのしみ No. 14 (1999), 日本評論社, 85–98.

[12] I. McIntosh, *Special Lagrangian cones in* $\mathbb{C}^3$ *and primitive harmonic maps*, J. London Math. Soc. (2) 67 (2003), no. 3, 769–789.

[13] 西川青季,『幾何学的変分問題』, 岩波書店, 2006.

[14] 岡本和夫,『パンルヴェ方程式』, 岩波書店, 2009.

[15] 奥原沙季, 3次元特殊ラグランジュ部分多様体の新しい構成について, 修士論文, 首都大学東京, 2010.

[16] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B479 (1996), no. 1-2, 243–259.