数理解析研究所講究録
第 1720 巻 2010 年 154-173

コンパクト・リー群、対称空間への 2-調和写像

東北大学 国際教育院　浦川　肇

リーマン面からリー群、対称空間、等質空間への調和写像の理論は、可積分系の理論と関連して非常に活発に研究が進んでいる ([17], [1], [21], [7], [4], [3]). リーマン面 M からリー群 G などへの調和写像理論を思い起こそう. 調和写像は次のエネルギー汎関数の臨界写像である：

$$E(\psi) := \frac{1}{2}\int_M |d\psi|^2\, v_g.$$

M から G への調和写像全体の空間は, G のループ群 ΩG が作用する大きな空間であり ([7]), また, 2次元球面から G への任意の調和写像は有限なユニトン数となり ([18]), 有限なユニトン数である調和写像はすべて具体的に構成されている ([21]). さらに, リーマン面から対称空間への調和写像のワイエルシュトラス表現定理が得られている ([4]).

他方, 2-調和写像理論の研究が Eells-Lemaire ([6]) と Jiang ([9]) 等によって始められた. 2-調和写像とは、調和写像の自然な拡張であり, 次のように定義される 2-エネルギーの臨界写像である

$$E_2(\psi) := \frac{1}{2}\int_M |\delta d\psi|^2\, v_g = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\psi)|^2\, v_g,$$

ここで $\tau(\psi)$ は ψ のテンション場であり, 定義より φ が調和である必要十分条件は $\tau(\varphi) \equiv 0$ である.

この論文ではまず、コンパクトリーマン多様体 (M, g) からコンパクト・リー群 (G, h) への 2-調和写像について論ずる. ここで h は G 上の両側不変なリーマン計量である. さて, $\psi : (M, g) \to (G, h)$ への C^∞ 写像に対して , Maurer-Cartan 形式 θ の ψ による引き戻し α を考える. ψ が 2-調和であるための必要十分条件は $\delta d\delta\alpha + \mathrm{Trace}_g([\alpha, d\delta\alpha]) = 0$ が成り立つことである (cf. 系 2.3). ψ が調和である必要十分条件は $\delta\alpha = 0$ となることなので, 先ほどの結果は, 自然な拡張となっている. これを用いて, (G, h) への 2-調和曲線が $F(t) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ とするとき, 初期値 $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ によって決定されることが示される (cf. 3 節). 2-調和写像 $(\mathbb{R}^2, \mu^2 g_0) \to (G, h)$ の特徴付けも与えられる. ここで g_0 は $\mathbb{R}^2$ 上の標準計量であり, μ は $\mathbb{R}^2$ 上の正値 C^∞ 関数である (cf. 4, 5 節).

6 節から 8 節は, リーマン対称空間への 2-調和写像についてである. 6 節では, リーマン多様体 (M, g) からリーマン対称空間 $(G/K, h)$ への 2-調和写像 φ の方程式が G 上の Maurer-Cartan 形式 θ の φ のリフト $\psi : M \to G$ の引き戻し $\alpha = \psi^*\theta$ を用いて記述される (定理 6.2, 6.3). 7 節では, 階数 1 のリーマン対称空間への 2-調和曲線が具体的に

構成される．8節では, 平面領域からリーマン対称空間への 2-調和写像の具体的な構成が行われる.

1. 準備.

ここで、コンパクト・リー群 (G,h) やリーマン対称空間 $(G/K,h)$ への調和写像や 2-調和写像について述べるための準備をしよう (cf. [6], [9], [10]).

1.1. 初めに, 調和写像と 2-調和写像についての一般的な事柄について述べる. (M,g) を m-次元コンパクト・リーマン多様体, (N,h) を n-次元リーマン多様体とする.

M から N への C^∞ 写像全体の空間 $C^\infty(M,N)$ 上で定義された**エネルギー汎関数**とは,

$$E(\psi)=\frac{1}{2}\int_M |d\psi|^2\, v_g,$$

であり, 滑らかな1パラメータ変形 $\psi_t\in C^\infty(M,N)$ $(-\epsilon<t<\epsilon)$ (ただし $\psi_0=\psi$) に対して, 第一変分公式が

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(\psi_t)=-\int_M \langle \tau(\psi),V\rangle\, v_g$$

と与えられる. ここで V は ψ に沿った変分ベクトル場であり, $V=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\psi_t$ と定義され, 接束 TN の ψ による誘導束の切断全体の空間 $\Gamma(\psi^{-1}TN)$ の元である. テンション場 $\tau(\psi)$ が次のように定義される：

$$\tau(\psi)=\sum_{i=1}^m B(\psi)(e_i,e_i), \tag{1}$$

ここで ψ の第二基本形式 $B(\psi)$ を $B(\psi)(X,Y)=\nabla^h_{d\psi(X)}d\psi(Y)-d\psi(\nabla_X Y)$ $(X,Y\in\mathfrak{X}(M))$ とする. ここで, ∇, と ∇^h, はそれぞれ (M,g) と (N,h) の Levi-Civita 接続を表す. 調和写像 $\psi\colon (M,g)\to(N,h)$ に対して, エネルギー汎関数 $E(\psi)$ の第二変分公式は

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} E(\psi_t)=\int_M \langle J(V),V\rangle\, g_g$$

となる. ここで $J(V)=\overline{\Delta}V-\mathcal{R}(V)$, $\overline{\Delta}V=\overline{\nabla}^*\,\overline{\nabla}V=-\sum_{i=1}^m\{\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{\nabla}_{e_i}V)-\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}V\}$, および $\mathcal{R}(V)=\sum_{i=1}^m R^h(V,d\psi(e_i))d\psi(e_i)$ である. ここで, $\overline{\nabla}$ は 誘導束 $\psi^{-1}TN$ 上の誘導接続であり, R^h は (N,h) の曲率テンソルで $R^h(U,V)W=[\nabla^h_U,\nabla^h_V]W-\nabla^h_{[U,V]}W$ $(U,V,W\in\mathfrak{X}(N))$ と与えられる.

2-エネルギー汎関数が

$$E_2(\psi)=\frac{1}{2}\int_M |\delta d\psi|^2\, v_g=\frac{1}{2}\int_M |\tau(\psi)|^2\, v_g, \tag{2}$$

と定義され, その第一変分公式が次のように与えられる ([9])

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_2(\psi_t) = -\int_M \langle \tau_2(\psi), V\rangle\, v_g \tag{3}$$

ここで, 2-テンション場 $\tau_2(\psi)$ は次のように定義される

$$\tau_2(\psi) = J(\tau(\psi)) = \overline{\Delta}\tau(\psi) - \mathcal{R}(\tau(\psi)). \tag{4}$$

このとき, C^∞ 写像 $\psi : (M,g) \to (N,h)$ が 2-**調和**であるとは $\tau_2(\psi) = 0$ のときをいう.

1.2. 次にリー群とリーマン対称空間の基本事項について準備する.

初めに, ターゲット空間 (N,h) がコンパクト・リー群 (G,h) の設定を考える. G を n 次元コンパクト・リー群とし そのリー環を $\mathfrak{g}$ とする. また, h を $\mathrm{Ad}(G)$-不変な $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\, ,\, \rangle$ に対応する G 上の両側不変なリーマン計量とする.

今度はターゲット空間 (N,h) が n-次元リーマン対称空間 $(G/K,h)$ の設定を考える. この場合にはいろいろ準備事項がある. まず, $(G/K,h)$ をコンパクト型の対称空間のときは, $\mathfrak{g}$ 上の $\mathrm{Ad}(G)$-不変な内積として $\langle\cdot,\cdot\rangle = -B(\cdot,\cdot)$ とする, ここで $B(\cdot,\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 である. このとき G 上の両側不変なリーマン計量 k が定義される. $(G/K,h)$ が非コンタクト型対称空間のときは, $\mathfrak{g}$ 上の内積を $\langle U+X, V+Y\rangle = -B(U,V) + B(X,Y)$ $(U,V \in \mathfrak{k},\ X,Y \in \mathfrak{m})$ によって与え, k は G 上の左不変なリーマン計量とする. このとき, G から G/K 上への射影 π は (G,k) から $(G/K,h)$ 上へのリーマン・サブマーションとなる. さらに, 接空間 $T_{\psi(x)}G$ $(x \in M)$ の内積 $k_{\psi(x)}(\cdot,\cdot)$ $(x \in M)$ に関する次の直交直和分解

$$T_{\psi(x)}G = V_{\psi(x)} \oplus H_{\psi(x)}, \tag{5}$$

与えられる. ここで $\psi(x) \in G$ における**垂直空間**は

$$V_{\psi(x)} = \mathrm{Ker}(\pi_{*\,\psi(x)}) = \{X_{\psi(x)} \,|\, X \in \mathfrak{k}\}, \tag{6}$$

によって与えられ, $\psi(x)$ における**水平空間**が

$$H_{\psi(x)} = \{Y_{\psi(x)} \,|\, Y \in \mathfrak{m}\}, \tag{7}$$

によって与えられる. ここで $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ は対称空間 G/K に付随するカルタン分解である. このとき, 任意の C^∞ 切断 $W \in \Gamma(\psi^{-1}TG)$ に対して, 分解 (8) に対応して, 次の分解が得られる:

$$W(x) = W^V(x) + W^H(x) \quad (x \in M), \tag{8}$$

ここで W^V, W^H, (それぞれ $\mathcal{V}W$, $\mathcal{H}W$, とも表記する) は $\Gamma(\psi^{-1}TG)$ に属する元である. 我々は一般に $\Gamma(E)$ によって, ベクトル束 E の C^∞ 切断全体の空間を表すこととする. $Y \in \mathfrak{m}$ に対して, $\widetilde{Y} \in \Gamma(\psi^{-1}TG)$ を $\widetilde{Y}(x) := Y_{\psi(x)}$ $(x \in M)$ によって定義する. また, G 上の左不変リー

マン計量 k に対応した $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する $\mathfrak{m}$ の正規直交基底を $\{X_i\}_{i=1}^n$ を取っておくと, W^H は $\widetilde{X_i}$ の言葉で

$$W^H=\sum_{i=1}^n f_i\,\widetilde{X_i}$$

と書ける. ここで $f_i\in C^\infty(M)$ $(i=1,\cdots,n)$ である. というのは, 各点 $x\in M$ において, $W^H(x)\in H_{\psi(x)}$ なので,

$$W^H(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)\,X_{i\,\psi(x)}=\sum_{i=1}^n f_i(x)\widetilde{X_i}(x)$$

となるからである.

また, $W\in\Gamma(\psi^{-1}TG)$ と $V\in\Gamma(\varphi^{-1}T(G/K))$ が π-**関係にある** ($V=\pi_*W$ とかく) とは,

$$V(x)=\pi_*W(x)\quad(x\in M)$$

となることとするここで $\pi_*:T_{\psi(x)}G\to T_{\varphi(x)}(G/K)=T_{\pi(\psi(x))}(G/K)$ は G から G/K 上への射影 π の $\psi(x)\,(x\in M)$ における微分である.

∇, ∇^k, ∇^h を, それぞれ, (M,g), (G,k), $(G/K,h)$ のレビ・チビタ接続とし, $\overline{\nabla}$, $\overline{\overline{\nabla}}$ を, ∇^k の誘導束 $\psi^{-1}TG$ 上の誘導接続, および ∇^h の誘導束 $\varphi^{-1}T(G/K)$ 上の誘導接続とする.

2. 2-テンション場の決定—リー群の場合

さて, θ を G 上の Maurer-Cartan 形式, すなわち, G 上の $\mathfrak{g}$-値 左不変1-形式で, $\theta_y(Z_y)=Z$, $(y\in G,\ Z\in\mathfrak{g})$ と定義されるものとする. 任意の (M,g) から (G,h) への C^∞ 写像 ψ に対して, M 上の $\mathfrak{g}$-値 1-形式 α が $\alpha=\psi^*\theta$ と定義される. このとき,

定理 2.1　任意の $\psi\in C^\infty(M,G)$ に対して, 次式が成り立つ：

$$\theta(\tau_2(\psi))=\theta(J(\tau(\psi)))=-\delta\,d\,\delta\alpha-\mathrm{Trace}_g([\alpha,d\,\delta\alpha]).\tag{9}$$

定義 2.2　M 上の2つの $\mathfrak{g}$-値 1-形式 α と β に対して, M 上の $\mathfrak{g}$-値対称 2-テンソル $[\alpha,\beta]$ を

$$[\alpha,\beta](X,Y):=\frac{1}{2}\left\{[\alpha(X),\beta(Y)]+[\alpha(Y),\beta(X)]\right\},\quad(X,Y\in\mathfrak{X}(M))\tag{10}$$

と定義し, そのトレース $\mathrm{Trace}_g([\alpha,\beta])$ を

$$\mathrm{Trace}_g([\alpha,\beta]):=\sum_{i=1}^m[\alpha,\beta](e_i,e_i).\tag{11}$$

によって定義する.

また, M 上の $\mathfrak{g}$-値 2-形式 $[\alpha\wedge\beta]$ を,

$$[\alpha\wedge\beta](X,Y) := \frac{1}{2}\left\{[\alpha(X),\beta(Y)]-[\alpha(Y),\beta(X)]\right\},\quad (X,Y\in\mathfrak{X}(M)). \tag{12}$$

によって定義する. このとき,

系 2.3　任意の $\psi\in C^\infty(M,G)$ に対して,
(1) $\psi:(M,g)\to(G,h)$ 調和であることと

$$\delta\alpha = 0 \tag{13}$$

が成り立つことは同値である.
(2) $\psi:(M,g)\to(G,h)$ 2-調和であることと

$$\delta\, d\,\delta\alpha + \mathrm{Trace}_g([\alpha, d\,\delta\alpha]) = 0 \tag{14}$$

が成り立つこととは同値である.

3. コンパクト・リー群への 2-調和曲線

この節では, 次の最も簡単な場合, すなわち, $(M,g)=(\mathbb{R},g_0)$ (1-次元ユークリッド空間) で, (G,h) は n-次元コンパクト・リー群で, h が両側不変なリーマン計量の場合を考える.

最初に $\psi:\mathbb{R}\ni t\mapsto\psi(t)\in(G,h)$ を, G 内の C^∞ 曲線とする. このとき, $\alpha:=\psi^*\theta$ は $\mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{g}$-値 1-形式となる. ゆえに α は各点 $t\in\mathbb{R}$ において, $\alpha_t = F(t)\,dt$ と書ける. ここで $F:\mathbb{R}\ni t\mapsto F(t)\in\mathfrak{g}$ は

$$F(t)=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\psi^*\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\theta\left(\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \tag{15}$$

と与えられる. このとき $\delta\alpha=-F'(t)$ であり, $\psi:(\mathbb{R},g_0)\to(G,h)$ が調和であることと

$$\delta\alpha=0 \iff F'=0 \iff \psi:\mathbb{R}\to(G,h),\ \textbf{測地線}$$

であることとは同値である. このとき, $\psi(0)=x$ を通る任意の測地線は $X\in\mathfrak{g}$ を選び, $\psi(t)=x\exp(tX)$, $\quad(t\in\mathbb{R})$ と書けている.

他方, 2-調和曲線 $\psi:(\mathbb{R},g_0)\to(G,h)$ を決定したい. (14) 式により次を得る.

$$\delta d\delta\alpha = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-F'(t)\right)=F^{(3)}(t) \tag{16}$$

かつ

$$\mathrm{Trace}_g[\alpha,d\delta\alpha]=\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\ d\delta\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]=[F(t),F''(t)] \tag{17}$$

となるので, $\psi : (\mathbb{R}, g_0) \to (G, h)$ が2-調和である必要十分条件は

$$F^{(3)} - [F(t), F''(t)] = 0 \tag{18}$$

となることである.

任意の C^∞ 曲線 $\psi : \mathbb{R} \to G$ は $\psi(t) := x \exp X(t)$, $x \in G$, $X(t) \in \mathfrak{g}$ と書ける. このとき,

$$F(t) = \theta\left(\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right), \ \psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \in T_{\psi(t)}G \tag{19}$$

かつ $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = L_{\exp X(t)*e}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, X(t))^n}{(n+1)!}(X'(t))\right)$ (cf. [8], p. 95) となるので,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, X(t))^n}{(n+1)!}(X'(t)) \tag{20}$$

を得る. 任意の初期値 $B_i \in \mathfrak{g} (i = 0, 1, 2)$ に対する 初期値問題

$$\begin{cases} F^{(3)}(t) = [F(t), F''(t)], \\ F(0) = B_0, F'(0) = B_1, F''(0) = B_2, \end{cases} \tag{21}$$

は唯一つの解 $F(t)$ を持つ. 以上合わせて,

定理 3.1 任意の C^∞ 曲線 $\psi : \mathbb{R} \to G$ に対して, $\psi(t) = x \exp X(t)$, $(x \in G, X(t) \in \mathfrak{g})$ とするとき,

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, X(t))^n}{(n+1)!}(X'(t)) \tag{22}$$

となる.

(1) $\psi : (\mathbb{R}, g_0) \to (G, h)$ が 2-調和曲線である必要十分条件は

$$F^{(3)}(t) = [F(t), F''(t)] \tag{23}$$

となることである.

(2) 初期値問題 (21) は, 任意の初期値 (B_0, B_1, B_2) in $\mathfrak{g}$ に対して唯一つの解 $F(t)$ を持つ.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の場合, $\mathfrak{g}$-値曲線 $F(t)$ に対する常微分方程式 (22) は次の解を持つ : $F(s) = \sum_{i=1}^{3} x_i(s) X_i$ ここで $x_1(s) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+1}}$, $x_2(s) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+1}}$, $x_3(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ と与えられる. ここで $a > 0$ は任意定数である.

4. $\mathbb{R}^2$ 内の開領域からの 2-調和写像

この節では, 次のような 2-調和写像 $\psi:(\mathbb{R}^2,g)\supset\Omega\to(G,h)$ を考える. ここでは, G 線形コンパクト・リー群, すなわち, G 次数 N のユニタリ群 $U(N)(\subset GL(N,\mathbb{C}))$ の部分群で, h は G 上の両側不変なリーマン計量とする. さて, $\mathfrak{g}$ を G のリー環とする. これは $U(N)$ のリー環 $\mathfrak{u}(N)$ の部分リー環である. $\mathbb{R}^2$ 上のリーマン計量 g として, $g=\mu^2 g_0$ を取る. ここで μ は Ω 上の C^∞ 正値関数であり, $\mathbb{R}^2$ の標準座標 (x,y) を取り, $g_0=dx\cdot dx+dy\cdot dy$ とする.

C^∞ 写像 $\psi:\Omega\ni(x,y)\mapsto\psi(x,y)=(\psi_{ij}(x,y))\in U(N)$ を取り, $\frac{\partial\psi}{\partial x}:=\left(\frac{\partial\psi_{ij}}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}:=\left(\frac{\partial\psi_{ij}}{\partial y}\right)$ を考える. このとき, $A_x:=\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}$, かつ $A_y:=\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial y}$ は Ω 上の $\mathfrak{g}$-値 C^∞ 関数である. Ω 上に二つの与えられた $\mathfrak{g}$-値関数 A_x と A_y に対して, C^∞ 写像 $\psi:\Omega\to G$ で, $A_x=\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}$ かつ $A_y=\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial y}$ を満たすものが次の可積分条件が成り立つときに存在する：

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}+[A_x,A_y]=0. \tag{24}$$

Maurer-Cartan 形式 θ の ψ による引き戻しは

$$\alpha:=\psi^*\theta=\psi^{-1}d\psi=\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=A_x\,dx+A_y\,dy$$

を満たす. このとき,

定理 4.1　2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の開集合 Ω 上のリーマン計量 $g=\mu^2g_0$ を取る, ただし g_0 は標準計量で, μ は Ω 上の正値 C^∞ 関数とする. また, (G,h) を線形コンパクト・リー群で両側不変リーマン計量 h が与えられているとする. このとき,

(1) $\psi:(\Omega,g)\to(G,h)$ 調和である必要十分条件は

$$\delta\alpha=0\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y=0 \tag{25}$$

となることである. また, 1-形式 α は常に $d\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]=0$ を満たし, これは

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}+[A_x,A_y]=0 \tag{26}$$

と同値である.

(2) $\psi:(\Omega,g)\to(G,h)$ 2-調和である必要十分条件は

$$\delta d\delta\alpha+\mathrm{Trace}_g([\alpha,d\delta\alpha])=0 \tag{27}$$

$$\Longleftrightarrow\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\delta\alpha)-\frac{\partial}{\partial x}[A_x,\delta\alpha]-\frac{\partial}{\partial y}[A_y,\delta\alpha]=0 \tag{28}$$

となることである．ここで $\delta\alpha$ は $\mathfrak{g}$-値 1-形式 $\alpha = A_x\,dx + A_y\,dy$ の余微分であり，

$\delta\alpha = -\mu^{-2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y\right\}$ と与えられる．ただし，$A_x = \psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}$ かつ $A_y = \psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial y}$ とする．

(3) 次に，Ω 上の $\mathfrak{g}$-値 1-形式 β および Θ として

$$\beta := [A_x, \delta\alpha]\,dx + [A_y, \delta\alpha]\,dy. \quad \Theta := d\delta\alpha - \beta, \tag{29}$$

と与えられるものを考える．このとき，$\psi : (\Omega, g) \to (G, h)$ が 2-調和であるための必要十分条件は $\delta\Theta = 0$ となることである．

5. 2-調和写像の決定

$\mathbb{R}^2$ 内の開集合 Ω 上に複素座標系 $z = x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$ を取り，and we put $A_z = \frac{1}{2}(A_x - iA_y)$ かつ $A_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(A_x + iA_y)$ とする．これらは $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-値関数で $A_{\bar{z}} = \overline{A_z}$ を満たす．このとき，条件 (27) と (28) は次の条件と同値である：$\delta\tilde{\Theta} = 0$。ここで

$$\tilde{\Theta} := \left\{\frac{\partial}{\partial z}(\delta\alpha) - [A_z, \delta\alpha]\right\} dz + \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\delta\alpha) - [A_{\bar{z}}, \delta\alpha]\right\} d\bar{z} \tag{30}$$

である．可積分条件 (26) は

$$\frac{\partial}{\partial z}A_{\bar{z}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}A_z + [A_z, A_{\bar{z}}] = 0 \tag{31}$$

と同値である．

(Ω, g) からコンパクト・リー群 (G, h) への 2-調和写像を決定したい．ここで $g = \mu^2 g_0$ とする．ただし μ は Ω 上の正値 C^∞ 関数で，h は G 上の両側不変なリーマン計量である．次の 3 つのステップに分かれる．

(第 1 段)　$\delta\tilde{\Theta} = 0$。は調和写像の方程式なので，まず調和写像の方程式を解く：

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}B_z + \frac{\partial}{\partial z}B_{\bar{z}} = 0. \tag{32}$$

このような B_z と $B_{\bar{z}}$ がさらに可積分条件

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}B_z + \frac{\partial}{\partial z}B_{\bar{z}} + [B_z, B_{\bar{z}}] = 0 \tag{33}$$

を満たすならば，調和写像 $\Psi : (\Omega, g) \to (G, h)$ で，$\Psi^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial z} = B_z$，および $\Psi^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{z}} = B_{\bar{z}}$ を満たすものが存在する．

(第 2 段)　(32) を満たす Ω 上の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-値関数 B_z と $B_{\bar{z}}$ に対して，(30) 式より，次式を満たす Ω 上の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-値関数 A_z と $A_{\bar{z}}$ を求めなければなら

ない：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(-2\mu^{-2}\Big(\dfrac{\partial A_z}{\partial \overline{z}}+\dfrac{\partial A_{\overline{z}}}{\partial z}\Big)\Big)-\Big[A_z,-2\mu^{-2}\Big(\dfrac{\partial A_z}{\partial \overline{z}}+\dfrac{\partial A_{\overline{z}}}{\partial z}\Big)\Big]=B_z, \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big(-2\mu^{-2}\Big(\dfrac{\partial A_z}{\partial \overline{z}}+\dfrac{\partial A_{\overline{z}}}{\partial z}\Big)\Big)-\Big[A_{\overline{z}},-2\mu^{-2}\Big(\dfrac{\partial A_z}{\partial \overline{z}}+\dfrac{\partial A_{\overline{z}}}{\partial z}\Big)\Big]=B_{\overline{z}}, \\ -\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}A_z+\dfrac{\partial}{\partial z}A_{\overline{z}}+[A_z,A_{\overline{z}}]=0. \end{cases} \tag{34}$$

(**第3段**) 最後に, (31) を満たす Ω 上の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-値関数 A_z と $A_{\overline{z}}$ を探せば, 任意の $a\in G$ に対して, C^∞ 写像 $\psi:\Omega\to G$ で,

$$\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial z}=A_z,\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}=A_{\overline{z}},\ \psi(x_0,y_0)=a \tag{35}$$

を満たすものが存在する.

このとき, 定理 5.1 より, $\psi:(\Omega,g)\to(G,h)$ 2-調和写像でなければならない. 逆に, 任意の 2-調和写像 $\psi:(\Omega,g)\to(G,h)$ はこのようにして得られるはずである.

このような 考えを実行するために次の定義をする.

定義 5.1 (1) Λ, Λ_1, Λ_2 と Λ_0 をそれぞれ次のように定義する：
- Λ を Ω 上の 2 つの $\mathfrak{g}$-値関数の組 (A_x,A_y) 全体の集合, (または Ω 上の 2 つの $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-値関数の組 $(A_z,A_{\overline{z}})$ で, $A_{\overline{z}}=\overline{A_z}$ を満たすもの全体の集合),
- Λ_1 を, 調和写像方程式 (25) または (32) を満たす組 $(A_x,A_y)\in\Lambda$ 全体の集合,
- Λ_2 を, 2-調和方程式 (28) または $\delta\widetilde{\Theta}=0$ を満たす組 $(A_x,A_y)\in\Lambda$ 全体の集合,
- Λ_0 を, 可積分条件 (26) または (33) を満たす組 $(A_x,A_y)\in\Lambda$ 全体の集合とする.

(2) 次に Ξ と Ξ_1 を次のように定義する：
- Ξ を, Ω 上の 2 つの $\mathfrak{g}$-値実解析関数の組 (B_x,B_y) 全体の集合 (または, Ω 上の 2 つの $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-値実解析関数の組 $(B_z,B_{\overline{z}})$ で $B_{\overline{z}}=\overline{B_z}$) を満たすものの組全体の集合,
- Ξ_1 を, 調和写像方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x+\frac{\partial}{\partial y}B_y=0, \tag{36}$$

を満たす (または (32) を満たす) 組 $(B_x,B_y)=(B_z,B_{\overline{z}})\in\Xi$ 全体の集合とする.

定義 5.2　次に, Λ から Ξ への 2 つの C^∞ 写像 Φ_i $(i=1,2)$ を, それぞれ, 次のように定義する：

$$\Phi_1(A_x,A_y) := \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\right) - \left[A_x, -\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\right],\right.$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(-\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\right) - \left[A_y, -\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\right]\right), \tag{37}$$

$$\Phi_2(A_x,A_y) := \left(-\mu^{-2}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}[A_x,A_y]\right)\right.$$
$$-\frac{\partial \mu^{-2}}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) - \left[A_x, -\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\right],$$
$$-\mu^{-2}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial x}[A_x,A_y]\right)$$
$$\left.-\frac{\partial \mu^{-2}}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) - \left[A_y, -\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\right]\right). \tag{38}$$

以上のもとで, 次が成り立つ：

定理 5.3　Ω を $\mathbb{R}^2$ 内の単連結開領域とする. このとき,

(1) 任意の $(B_x,B_y)=(B_z,B_{\bar z})\in\Xi$ に対して, 次を満たす組 $(A_x,A_y)=(A_z,A_{\bar z})\in\Lambda$ が存在する：$\Phi_2(A_x,A_y)=(B_x,B_y)$ (or $\Phi_2(A_z,A_{\bar z})=(B_z,B_{\bar z})$). この解の組 $(A_x,A_y)=(A_z,A_{\bar z})$ は初期データ $A_x(x_0,y)$, $A_y(x_0,y)$ $\frac{\partial A_x}{\partial x}(x_0,y)$ および $\frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0,y)$, $(x_0,y)\in\Omega$ により一意的に決まる.

(2) Λ_0 上において, $\Phi_1=\Phi_2$ が成り立つ.

(3) ${\Phi_1}^{-1}(\Xi_1)=\Lambda_2$, および ${\Phi_1}^{-1}(\Xi_1)\cap\Lambda_0={\Phi_2}^{-1}(\Xi_1)\cap\Lambda_0=\Lambda_2\cap\Lambda_0$ が成り立つ.

[証明]　(1)　Φ_2 の定義より, $\Phi_2(A_x,A_y)=(B_x,B_y)$ が成り立つことと次は同値である:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}[A_x,A_y]-\mu^2\frac{\partial\mu^{-2}}{\partial x}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)$$
$$-\mu^2\Big[A_x,-\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\Big]-\mu^2 B_x, \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}[A_x,A_y]-\mu^2\frac{\partial\mu^{-2}}{\partial y}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)$$
$$-\mu^2\Big[A_y,-\mu^{-2}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Big)\Big]-\mu^2 B_y. \tag{40}$$

このとき, (39) と (40) は次の Cauchy-Kovalevskaya の定理の条件を $n_i = 2$ $(i = 1, 2)$ の場合に満たしていることに注意しよう (cf. [5], p. 1305, 429 B)：

定理 (Cauchy-Kovalevskaya) 変数 t と $x = (x_1, \cdots, x_m)$ の N 個の未知関数 $u_i(t, x)$ $(i = 1, \cdots, N)$ に対する次の Cauchy 問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i(t, x, D_t^k D_x^p u_j) \quad (i = 1, \cdots, N) \\ \dfrac{\partial^k u_i}{\partial t^k}(t_0, x) = \varphi_i^k(x) \ (0 \le k \le n_i - 1; \ i = 1, \cdots, N), \end{cases} \tag{41}$$

ここで, $p = (p_1, \cdots, p_m)$ に対して, $|p| = p_1 + \cdots + p_m$, $D_t^k D_x^p := \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1{}^{p_1} \cdots \partial_m{}^{p_m}}$ とおく. (41) の第一式の右辺において, k と p は

$$k < n_j \quad \text{and} \quad k + |p| \le n_j \quad (j = 1, \cdots, N)$$

を満たすとし, 各 F_i と φ_i^k が実解析関数とする. このとき, (41) の実解析関数解 u_i $(i = 1, \cdots, N)$ が存在し, それは実解析関数の中で一意的である.

以下において, μ 正値実解析関数とする. このとき, 任意の $(B_x, B_y) \in \Xi$ に対して, 次の初期条件を満たす Cauchy 問題 (39), (40) の実解析的な解 (A_x, A_y) が存在する:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}\right)(x_0, y) = f_1(y), \quad A_x(x_0, y) = f_0(y), \\ \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}\right)(x_0, y) = g_1(y), \quad A_x(x_0, y) = g_0(y). \end{cases} \tag{42}$$

さらにこの解 (A_x, A_y) は実解析関数の中では一意的である.

そこで, Ω 内の任意の点 (x_0, y_0) を取ると, (x_0, y_0) の開近傍において, (39), (40) の実解析的解 (A_x, A_y) が存在, この解は実解析的関数においては一意的である. 開領域 Ω は単連結としているので, 実解析関数の解析接続の一意性定理により, Ω 上において, (39), (40) の解 (A_x, A_y) を得る. (1) を得た.

(2) に対しては, 任意の $(A_x, A_y) \in \Lambda_0$ に対して, 可積分条件 (26) により,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu^{-2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\right) = \mu^{-2}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}[A_x, A_y]\right) + \frac{\partial \mu^{-2}}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right),$$

が成り立ち, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu^{-2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\right)$ についても同様である. これらから (2) が示される.

(3) については, $\Phi_1{}^{-1}(\Xi_1) = \Lambda_2$ を示せばよいが, これは (28) から直ちに得られ, 他の等式は (1) と (2) から得られる. □

6. 2-テンション場の決定—対称空間の場合

さて, θ を G 上の Maurer-Cartan 形式, すなわち, G 上の $\mathfrak{g}$-値左不変 1-形式で, $\theta_y(Z_y) = Z$ ($y \in G$, $Z \in \mathfrak{g}$) と定義されるものとする. 任意の (M,g) から $(G/K,h)$ への C^∞ 写像 φ について, 局所リフト $\psi\colon M \to G$ を取り, M 上の $\mathfrak{g}$-値 1-形式 α として, $\alpha := \psi^*\theta$ と与えられるものを取り, カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ に対応して, $\alpha = \alpha_{\mathfrak{k}} + \alpha_{\mathfrak{m}}$ と分解する. このとき, 次の事実はよく知られている (例えば, [3])：

補題 6.1　任意の C^∞ 写像 $\varphi\colon (M,g) \to (G/K,h)$ に対して,

$$t_{\psi(x)^{-1}*}\tau(\varphi) = -\delta(\alpha_{\mathfrak{m}}) + \sum_{i=1}^{m}[\alpha_{\mathfrak{k}}(e_i), \alpha_{\mathfrak{m}}(e_i)], \quad (x \in M) \tag{43}$$

が成り立つ. 従って, $\varphi : (M,g) \to (G/K,h)$ が調和である必要十分条件は次が成り立つことである：

$$-\delta(\alpha_{\mathfrak{m}}) + \sum_{i=1}^{m}[\alpha_{\mathfrak{k}}(e_i), \alpha_{\mathfrak{m}}(e_i)] = 0. \tag{44}$$

さらに, 我々は次を得た：

定理 6.2　2-テンション場について, 次が成り立つ：

$$\begin{aligned} t_{\psi(x)^{-1}*}\tau_2(\varphi) &= \Delta_g\Big(- \delta(\alpha_{\mathfrak{m}}) + \sum_{i=1}^{m}[\alpha_{\mathfrak{k}}(e_i), \alpha_{\mathfrak{m}}(e_i)]\Big) \\ &+ \sum_{s=1}^{m}\Big[\Big[- \delta(\alpha_{\mathfrak{m}}) + \sum_{i=1}^{m}[\alpha_{\mathfrak{k}}(e_i), \alpha_{\mathfrak{m}}(e_i)]\, , \alpha_{\mathfrak{m}}(e_s)\Big], \alpha_{\mathfrak{m}}(e_s)\Big]. \end{aligned} \tag{45}$$

ここで Δ_g は (M,g) 上の C^∞ 関数に作用する (正の) Laplacian で, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M,g) 上の (局所) 正規直交枠である.

従って次が成立する：

定理 6.3　(M,g) を m-次元コンパクト・リーマン多様体, $(G/K,h)$ を n-次元リーマン対称空間, $\pi : G \to G/K$ を自然な射影とし, φ : $(M,g) \to (G/K,h)$ を C^∞ 写像でその局所リフトとして $\psi\colon M \to G$ を持つとする, すなわち, $\varphi = \pi \circ \psi$ とする. また, $\alpha = \psi^*\theta$ を Maurer-Cartan 形式 θ の ψ による引き戻しとし, $\alpha = \alpha_{\mathfrak{k}} + \alpha_{\mathfrak{m}}$ を α の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ に対応する分解とする.

(I) 写像 $\varphi:(M,g)\to(G/K,h)$ が調和である必要十分条件は次式が成り立つことである.

$$-\delta(\alpha_{\mathfrak{m}})+\sum_{i=1}^{m}[\alpha_{\mathfrak{k}}(e_i),\alpha_{\mathfrak{m}}(e_i)]=0, \tag{46}$$

ここで δ は余微分作用素であり, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M,g) 上の局所直交枠である.

さらに, $\varphi:(M,g)\to(G/K,h)$ 2-調和である必要十分条件は次式が成り立つことである.

$$\begin{aligned}\Delta\Big(-\delta(\alpha_{\mathfrak{m}})+\sum_{i=1}^{m}[\alpha_{\mathfrak{k}}(e_i),\alpha_{\mathfrak{m}}(e_i)]\Big)\\ +\sum_{s=1}^{m}\Big[\Big[-\delta(\alpha_{\mathfrak{m}})+\sum_{i=1}^{m}[\alpha_{\mathfrak{k}}(e_i),\alpha_{\mathfrak{m}}(e_i)],\alpha_{\mathfrak{m}}(e_s)\Big],\alpha_{\mathfrak{m}}(e_s)\Big]=0.\end{aligned} \tag{47}$$

ここで $\Delta=\delta d$ は M 上の $\mathfrak{g}$-値 C^∞ 関数全体の空間に作用する (M,g) の (正の) Laplacian である.

(II) 逆に, $\alpha=\alpha_{\mathfrak{k}}+\alpha_{\mathfrak{m}}$ を (M,g) 上の $\mathfrak{g}$-値 1-形式とする. α が可積分条件 (24) か (31), かつ (25) (または (28)) を満たすとする. このとき, M から G への局所リフト $\psi:M\to G$ $(\varphi=\pi\circ\psi)$ を持ち, 初期条件 $\varphi(p)=a\in G$ $(p\in M)$ を満たすような C^∞-写像 $\varphi:M\to G/K$ であって, $\alpha=\psi^*\theta$ であり, かつ φ は (M,g) から $(G/K,h)$ への調和写像 (または 2-調和写像) となるものが存在する.

7. リーマン対称空間内の 2-調和曲線

7.1. いま, $\varphi:(\mathbb{R},g_0)\to(G/K,h)$ を C^∞ 曲線とし, $\psi:\mathbb{R}\to G$ を, φ のリフト, すなわち, $(\varphi=\pi\circ\psi)$ を満たすものとする. このとき, $\alpha=\psi^*\theta=\psi^{-1}d\psi=F(t)dt$ は $\mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{g}$-値 1-形式であり, F は $\mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{g}$-値関数であって $\psi(t)^{-1}\frac{d\psi}{dt}=F(t)$ を満たす. 逆に, $\mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{g}$-値 C^∞ 関数 $F(t)$ に対して, $\psi(t)^{-1}\frac{d\psi}{dt}=F(t)$, かつ $\psi(0)=x\in G$ を満たす C^∞-曲線 $\psi:\mathbb{R}\to G$ が唯一つ存在する.

Cartan 分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ に対応して, $F(t)=F_{\mathfrak{k}}(t)+F_{\mathfrak{m}}(t)$, $\alpha_{\mathfrak{k}}=F_{\mathfrak{k}}(t)dt$, および $\alpha_{\mathfrak{m}}=F_{\mathfrak{m}}(t)dt$ と分解する. このとき $\delta\alpha=-F'(t)$ および $\delta\alpha_{\mathfrak{m}}=-F_{\mathfrak{m}}{}'(t)$ が成り立つ. 従って, 調和写像方程式 (44), (46) は

$$F_{\mathfrak{m}}{}'(t)+[F_{\mathfrak{k}}(t),F_{\mathfrak{m}}(t)]=0, \tag{48}$$

となり, 2-調和写像方程式 (47) is

$$-\left(F_{\mathfrak{m}}{}'(t)+[F_{\mathfrak{k}}(t),F_{\mathfrak{m}}(t)]\right)''+\left[\left[F_{\mathfrak{m}}{}'(t)+[F_{\mathfrak{k}}(t),F_{\mathfrak{m}}(t)],F_{\mathfrak{m}}\right],F_{\mathfrak{m}}\right]=0 \tag{49}$$

となる. これらの場合には, 可積分条件 (26) は常に成り立つので, (19) を満たす ψ はいつでも存在する.

ここで, リフト $\psi(t)$ が水平的であるとは, $\psi_*(T_xM) \subset L_{*\psi(x)}(\mathfrak{m})$ をみたすことであり, これは $F_{\mathfrak{k}} \equiv 0$ と同値であることを思い起こそう. このときには, (48) は $F_{\mathfrak{m}}'(t) = 0$ と同値であり, これから $F_{\mathfrak{m}}(t) = X \in \mathfrak{m}$ (定数), すなわち, $F(t) = X \in \mathfrak{m}$ となる. よって

$$\psi(t) = x \ \exp(tX), \quad \varphi(t) = x \exp(tX)\, K \in G/K \tag{50}$$

となる. さらに, (49) は次と同値である.

$$-F_{\mathfrak{m}}'''(t) + [[F_{\mathfrak{m}}'(t), F_{\mathfrak{m}}(t)], F_{\mathfrak{m}}(t)] = 0. \tag{51}$$

7.2. **階数 1 の対称空間内の 2-調和曲線.** この小節では, 階数 1 のコンパクト・リーマン対称空間 $(G/K, h)$ 内の 2-調和曲線について述べる.

(1) 球面 (S^n, h) の場合. $G = SO(n+1)$ が線形に $\mathbb{R}^{n+1}$ 上に作用しているとし, $K = SO(n)$ は G の原点 $o = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$ における等方部分群とする. それらのリー環を $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ とすると, Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ が次のように与えられる：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1) = \{X \in \mathfrak{gl}(n+1) :\ X + {}^tX = O\},$$

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & X_1 \end{array}\right) :\ X_1 \in \mathfrak{gl}(n),\ X_1 + {}^tX_1 = O \right\},$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ u := \left(\begin{array}{c|c} 0 & -{}^tu \\ \hline u & O \end{array}\right) :\ u = {}^t(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$\mathfrak{m}$-値 C^∞ 関数 $F_{\mathfrak{m}}(t) = u(t)$ と $F_{\mathfrak{k}} \equiv 0$ に対して, 2-調和方程式 (51) は次と同値である.

$$-u''' + \langle u', u\rangle u - \langle u, u\rangle u' = 0, \tag{52}$$

ここで $\langle\, ,\, \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の内積で, $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ $(u, v \in \mathbb{R}^n)$ と与えられる.

$u = (u_1, \cdots, u_n) = (0, \cdots, 0, \overbrace{v}^{i\ \mathrm{th}}, 0, \cdots, 0)$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする. このとき, このような u に対して, 方程式 (52) は $v''' = 0$ となる. 従って, $v(t) = D_t := at^2 + bt + c$ を得る, ただし a, b および c は定数である. (S^n, h) への 2-調和曲線としては次のようなものがある:

$$\varphi(t) = \psi(t)\{K\} = {}^t(\cos d_t, 0, \cdots, 0, \sin d_t, 0, \cdots, 0), \tag{53}$$

ここで $d_t := \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct$ であり, $\varphi(t)$ が調和である必要十分条件は $a = b = 0$ となることである.

(2) 複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, h)$ の場合.

$G = SU(n+1)$ 線形に $\mathbb{C}P^n = \{[z] :\ z \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}\}$ 上に作用しているし, K を G の $o = {}^t[1, 0, \cdots, 0]$ における等方部分群とする. Cartan

分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \{X\in\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}) : X+{}^{\mathrm{t}}\overline{X}=O,\ \mathrm{tr}X=0\},\\
\mathfrak{k} &= \left\{\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\,a & 0\\ 0 & X\end{pmatrix} : a\in\mathbb{R}, X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ {}^{\mathrm{t}}\overline{X}+X=O,\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\sqrt{-1}a+\mathrm{tr}X=0\right\},\\
\mathfrak{m} &= \left\{z:=\begin{pmatrix}0 & -{}^{\mathrm{t}}\overline{z}\\ z & O\end{pmatrix} : z\in\mathbb{C}^n\right\}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{m}$-値 C^∞ 関数 $F_{\mathfrak{m}}(t)=z(t)={}^{\mathrm{t}}(z_1(t),\cdots,z_n(t))$ と $F_{\mathfrak{k}}\equiv 0$ に対して, 2-調和写像方程式 (51) は次の方程式と同等である.

$$-z'''+2\langle z,z'\rangle z-\langle z',z\rangle z-\langle z,z\rangle z'=0, \tag{54}$$

ここで $\langle z,w\rangle=\sum_{i=1}^n z_i\overline{w_i}$ は t の 2 つの $\mathbb{C}^n$-値関数 z と w に対して定義されている各点内積である. (54) の解 $z(t)=z_1(t),\cdots,z_n(t)$ として次のようなものが見つかる：

場合 (i): $z_1(t)=\cdots=z_n(t)=D_t$,
場合 (ii): $z_1(t)=\cdots=z_n(t)=\sqrt{-1}\,D_t$,
場合 (iii): $z_1(t)=\cdots=z_n(t)=(1+\sqrt{-1})\,D_t$.

それぞれの場合に, (S^n,h) の時と同様にして, $\psi(t)$ が計算され, $(\mathbb{C}P^n,h)$ 内の 2-調和曲線が次のように与えられる:

場合 (i): $\varphi(t)={}^{\mathrm{t}}[\cos(\sqrt{n}\,d_t),\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}\,d_t),\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}\,d_t)]$,

場合 (ii): $\varphi(t)={}^{\mathrm{t}}[\cos(\sqrt{n}\,d_t),\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}\,d_t),\cdots,\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}\,d_t)]$,

場合 (iii):

$$\varphi(t)={}^{\mathrm{t}}[\cos(\sqrt{2n}\,d_t),\tfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2n}}\sin(\sqrt{2n}\,d_t),\cdots,\tfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2n}}\sin(\sqrt{2n}\,d_t)],$$

ここで $d_t:=\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+ct$ であり, a, b および c は実定数である. 各 $\varphi:(\mathbb{R},g_0)\to(\mathbb{C}P^n,h)$ が調和となる必要十分条件は $a=b=0$ である.

(3) 四元数射影空間 $(\mathbb{H}P^n,h)$ の場合.

$G=Sp(n+1)=\{x\in U(2n+2)\,|\,{}^{\mathrm{t}}x\,J_{n+1}x=J_{n+1}\}$ とする. ここで $J_{n+1}=\begin{pmatrix}O & I_{n+1}\\ -I_{n+1} & O\end{pmatrix}$ であり, I_{n+1} は $n+1$ 次の単位行列とする. G が線形に四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n=\{[z] : z\in\mathbb{H}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}\}$ に作用している.

$K = Sp(1) \times Sp(n)$ を G の $o = {}^{\mathrm{t}}[1, 0, \cdots, 0]$ における等方部分群とする. Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ が次のように与えられる：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n+1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \mid A, B \in M_{n+1}(\mathbb{C}),\ {}^{\mathrm{t}}\overline{A} + A = O, {}^{\mathrm{t}}B = B \right\},$$

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} x & 0 & y & 0 \\ 0 & X & 0 & Y \\ \hline -\overline{y} & 0 & \overline{x} & 0 \\ 0 & -\overline{Y} & 0 & \overline{X} \end{array} \right) \mid x \in \sqrt{-1}\mathbb{R},\ y \in \mathbb{C}, \right.$$
$$\left. X, Y \in M_n(\mathbb{C}), {}^{\mathrm{t}}\overline{X} + X = 0, {}^{\mathrm{t}}Y = Y \right\},$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ (Z, W) := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & Z & 0 & W \\ -{}^{\mathrm{t}}\overline{Z} & O & {}^{\mathrm{t}}W & O \\ \hline 0 & -\overline{W} & 0 & \overline{Z} \\ -{}^{\mathrm{t}}\overline{W} & O & -{}^{\mathrm{t}}Z & O \end{array} \right) \mid Z, W \in M(1, n, \mathbb{C}) \right\}.$$

C^∞ $\mathfrak{m}$-値関数 $F_{\mathfrak{m}}(t) = ((Z(t), W(t))$ (ただし $Z = Z(t) = (z_1(t), \cdots, z_n(t))$ および $W = W(t) = (w_1(t), \cdots, w_n(t))$ とする) に対して, $F_{\mathfrak{k}} \equiv 0$ を満たす $F_{\mathfrak{m}}$ について, 2-調和方程式 (51) は次の方程式と同等である.

$$\begin{cases} -Z''' - (|Z|^2 + |W|^2)Z + (2\langle Z, Z'\rangle + 2\langle W, W'\rangle - \langle Z', Z\rangle - \langle W', W\rangle)Z \\ \qquad + (\langle Z', \overline{W}\rangle - \langle W', \overline{Z}\rangle)\overline{W} = 0, \\ -W''' - (|Z|^2 + |W|^2)W + (2\langle Z, Z'\rangle + 2\langle W, W'\rangle - \langle Z', Z\rangle - \langle W', W\rangle)W \\ \qquad + 3(\langle Z', \overline{W}\rangle - \langle W', \overline{Z}\rangle)\overline{Z} = 0. \end{cases}$$

ここで $Z' = ({z_1}'(t), \cdots, {z_n}'(t))$ であり, $\langle Z, W\rangle := \sum_{i=1}^n z_i(t)\overline{w_i(t)}$ とする.

このとき, 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ への 2-調和曲線として次のようなものが得られる:

$$(i)\ \varphi(t) = \left[\cos(\sqrt{n}\, d_t), -\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t), \cdots, -\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t) \right],$$

$$(ii)\ \varphi(t) = \left[\cos(\sqrt{n}\, d_t), i\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t), \cdots, i\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t) \right],$$

$$(iii)\ \varphi(t) = \left[\cos(\sqrt{n}\, d_t), -j\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t), \cdots, -j\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t) \right],$$

$$(iv)\ \varphi(t) = \left[\cos(\sqrt{n}\, d_t), k\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t), \cdots, k\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}\, d_t) \right].$$

ここで, i, j および k は単位四元数で $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ および $ij = k$ 満たすものであり, $d_t := \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct$ とする. ただし a, b および c は実定数である. それぞれの場合に, φ が調和である必要十分条件は $a = b = 0$ となることである.

8. 平面領域からの 2-調和写像

8.1. 状況設定と方程式の導出. この小節では, we will treat with biharmonic maps of (M, g) からリーマン対称空間 $(G/K, h)$ への 2-調和写像を扱う, ただし $\dim M = 2$ とする. $(M, g) = (\Omega, g)$ は 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の開領域 とし, $g = \mu^2 g_0$ とする. ここで μ は Ω 上の正値 C^∞ 関数とし, $g_0 = (dx)^2 + (dy)^2$ は標準ユークリッド計量とし, (x, y) は $\mathbb{R}^2$ の標準座標である.

φ を Ω から対称空間 $N = G/K$ への C^∞ 写像で局所リフト $\psi : \Omega \to G$ をもつ, すなわち, $\varphi = \pi \circ \psi$ を満たすものとする. ここで $\pi : G \to G/K$ は自然な射影とする. G 上の Maurer-Cartan 形式 θ の ψ による引き戻しは次のようになる：

$$\alpha = \psi^{-1} d\psi = \psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = A_x\, dx + A_y\, dy,$$

ここで Ω 上の $\mathfrak{g}$-値関数 $A_x := \psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ と $A_y := \psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ を Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ に従って次のように分解しておく:

$$A_x = A_{x,\mathfrak{k}} + A_{x,\mathfrak{m}}, \quad A_y = A_{y,\mathfrak{k}} + A_{y,\mathfrak{m}}.$$

これから α も次のように分解する: $\alpha = \alpha_{\mathfrak{k}} + \alpha_{\mathfrak{m}}$. ここで

$$\alpha_{\mathfrak{k}} = A_{x,\mathfrak{k}}\, dx + A_{y,\mathfrak{k}}\, dy, \quad \alpha_{\mathfrak{m}} = A_{x,\mathfrak{m}}\, dx + A_{y,\mathfrak{m}}\, dy$$

である.

このとき, 次の定理が得られる.

定理 8.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開領域とし, $g = \mu^2 g_0$ とする. ここで $\mu > 0$ は Ω 上の正値 C^∞ 関数, $g_0 = (dx)^2 + (dy)^2$ は $\mathbb{R}^2$ 上の標準計量とし, (x, y) は標準座標とする. $(G/K, h)$ をリーマン対称空間で, $\pi : G \to G/K$ は自然な射影とする. 任意の Ω から G/K への C^∞ 写像でその局所リフトを $\psi : \Omega \to G$, すなわち, $\varphi = \pi \circ \psi$ とする. $\alpha = \psi^* \theta$ を G 上の Maurer-Cartan 形式 θ の ψ による引き戻しとし, それを Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ に応じて $\alpha = \alpha_{\mathfrak{k}} + \alpha_{\mathfrak{m}}$ と分解しておく. このとき,

(1) $\varphi : (\Omega, g) \to (G/K, h)$ が調和である必要十分条件は次が成り立つことである：

$$\frac{\partial A_{x,\mathfrak{m}}}{\partial x} + \frac{\partial A_{y,\mathfrak{m}}}{\partial y} + [A_{x,\mathfrak{k}}, A_{x,\mathfrak{m}}] + [A_{y,\mathfrak{k}}, A_{y,\mathfrak{m}}] = 0. \tag{55}$$

(2) $\varphi : (\Omega, g) \to (G/K, h)$ が 2-調和である必要十分条件は (47) が成り立つことである.

(3) 可積分条件は, (26) が成り立つことである.

(4) 特に, **水平リフト** ψ, すなわち, $\alpha_{\mathfrak{k}} \equiv 0$, に対しては,

$$-\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\left(\mu^{-2}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right\}\right)+\left[\left[\mu^{-2}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right\},P\right],P\right] \\ +\left[\left[\mu^{-2}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right\},Q\right],Q\right]=0,$$

$[P,Q]=0$, および $-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ となる. ここで $P:=\alpha_{x,\mathfrak{m}}$ および $Q:=\alpha_{y,\mathfrak{m}}$ とおいた. 特に $\mu=1$ の場合には, φ に対する 2-調和写像方程式と可積分条件は次のようになる:

$$-P_{xxx}-P_{xyy}-Q_{xxy}-Q_{yyy}+[[P_x+Q_y,P],P]+[[P_x+Q_y,Q],Q]=0,$$

$[P,Q]=0$, および $P_y-Q_x=0$ となることである. ここで $P_x=\frac{\partial P}{\partial x}$, などとする.

8.2. **2-調和方程式の解法.** 前小節の定理 8.1 における 2-調和写像の解として次の定理を得る.

定理 8.2 $(G/K,h)$ を階数 2 以上のリーマン対称空間とし, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{m}$ に含まれる極大アーベル環とし, X, $Y\in\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}$ の一次独立な元とする.

(1) 2 つの $\mathfrak{m}$-値関数 $P(x,y)=(a_1x^2+b_1x+c_1)X$ と $Q(x,y)=(a_2y^2+b_2y+c_2)Y$ を取る. ここで a_i, b_i と c_i $(i=1,2)$ 実定数とする. このとき, P と Q は上記定理における 2-調和方程式と可積分条件のを満たす解である. 従って, このような P と Q に対して, Ω から G への C^∞ 写像 ψ で $\varphi=\pi\circ\psi$ となるものが, (Ω,g_0) から $(G/K,h)$ への $\varphi(0,0)=x_0\in G$ を満たす唯一つの 2-調和写像である. ただし $x_0\in G/K$ は任意の固定点である. $\varphi:(\Omega,g)\to(G/K,h)$ が調和である必要十分条件は $a_i=b_i=0$ $(i=1,2)$ となることである.

(2) さらに G 線形リー群, すなわち, $GL(N,\mathbb{C})$ の部分群とする. このとき, 上の C^∞ 写像 $\psi:\Omega\to G$ と $\varphi=\pi\circ\psi$ は次のように与えられる.

$$\begin{cases}\psi(x,y)=x_0\exp(d_xX+d_yY)\in G,\\ \varphi(x,y)=x_0\exp(d_xX+d_yY)\cdot o\in G/K,\end{cases} \tag{56}$$

ここで $o=\{K\}\in G/K$ は原点であり, $d_x=\frac{a_1}{3}x^3+\frac{b_1}{2}x^2+c_1x$ および $d_y=\frac{a_2}{3}y^3+\frac{b_2}{2}y^2+c_2y$ である.

階数 1 のリーマン対称空間のときには, 2-調和写像の次のような具体的な構成が得られる.

定理 8.3

(1) $\varphi_1(t) = {}^t(\cos(\sqrt{n}(d_x + d_y)),$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}(d_x + d_y)), \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}(d_x + d_y))),$$

は $(\mathbb{R}^2, g_0)$ から球面 (S^n, h) への 2-調和写像である.

(2) $\varphi_2(t) = {}^t(\cos(\sqrt{n}(d_x + d_y)),$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}(d_x + d_y)), \cdots, \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}(d_x + d_y))),$$

は $(\mathbb{R}^2, g_0)$ から複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, h)$ への 2-調和写像である.

(3) $\varphi_3(t) = {}^t(\cos(\sqrt{n}(d_x + d_y)),$

$$\frac{k}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}(d_x + d_y)), \cdots, \frac{k}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt{n}(d_x + d_y))),$$

は $(\mathbb{R}^2, g_0)$ から四元数射影空間 $(\mathbb{H}P^n, h)$ への 2-調和写像である ここで i, j と k は単位四元数で, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ および $ij = k$ を満たすものである.

ここで, いずれの場合も, $t = x$ または $t = y$ に対して, $d_t = \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct$ である.

さらに, 各 φ_i $(i = 1, 2, 3)$ が, $(\mathbb{R}^2, g_0)$ から (S^n, h), $(\mathbb{C}P^n, h)$ または $(\mathbb{H}P^n, h)$ への調和写像である必要十分条件は, それぞれ $a = b = 0$ となることである.

REFERENCES

[1] F.E. Burstall and F. Pedit, *Harmonic maps via Adler-Kostant-Symes theory*, In: *Harmonic Maps and Integrable Systems*, eds. by A. P. Fordy and J. C. Wood, Aspect of Mathematics, Vol. E 23, Vieweg (1993), 221–272.

[2] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$, Intern. J. Math., **12** (2001), 867–876.

[3] Y-J. Dai, M. Shoji and H. Urakawa, *Harmonic maps into Lie groups and homogeneous spaces*, Differ. Geom. Appl., **7** (1997), 143–160.

[4] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Commun. Anal. Geom., **6** (1998), 633–668.

[5] Encyclopedia of Mathematics, ed. by Japan Math. Soc., the fourth edition, Iwanami Shoten, Tokyo, 2007.

[6] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topic in harmonic maps*, C.M.M.S. Regional Conf. Series Math., **50** Amer. Math. Soc., Providence, 1983.

[7] M.A. Guest and Y. Ohnita, *Group actions and deformations for harmonic maps*, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 671–704.

[8] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York and London, 1962.

[9] G. Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variation formula*, Chinese Ann. Math **7A** (1986), 388–402.

[10] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry, Vol. I, II*, (1963), (1969), John Wiley and Sons, New York.

[11] M. Hidano-Mukai and Y. Ohnita, *Geometry of the moduli spaces of harmonic maps into Lie groups via gauge theory over Riemann surfaces*, International J. Math., **12** (2001), 339–371.

[12] M. Hidano-Mukai and Y. Ohnita, *Gauge-theoretic approach to harmonic maps and subspaces in moduli spaces*, In: Integrable Systems, Geometry and Topology, AMS/IP Study Advances Math., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, (2006), 191–234.

[13] M. Mukai and Y. Ohnita, *Gauge-theoretic equations for harmonic maps into symmetric spaces*, In: The third Pacific Rim Geometry Conf., Monogr. Geometry Topology, **25**, Int. Press, Cambrdge, (1998), 195–209.

[14] B. O'Neill, *The fundamental equation of a submersion*, Michigan Math. J., **13** (4) (1966), 459–469.

[15] Y. Ohnita, *Group actions and deformations for harmonic maps into symmetric spaces*, Kodai Math. J., **17** (1994), 463–475.

[16] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of two-spheres*, Ann. Math., **113** (1981), 1–24.

[17] K. Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model)*, J. Differ. Geom., **30** (1989), 1-50.

[18] H. Urakawa, *Biharmonic maps into compact Lie groups and the integrable systems*, a preprint.

[19] H. Urakawa, *Biharmonic maps into symmetric spaces and the integrable systems*, a preprint.

[20] J.C. Wood, *On the explicit construction and parametrization of all harmonic maps from the two-sphere to a complex Grassmanian*, In: Harmonic Mappings, Twistors and σ-models, Adv. Ser. Math. Phys., **4**, World Sci. Publ., Singapore, (1988), 246–260.

[21] J. C. Wood, *Harmonic maps into symmetric spaces and integrable systems*, In: *Harmonic Maps and Integrable Systems*, eds. by A. P. Fordy and J. C. Wood, Aspect of Mathematics, Vol. E 23, Vieweg (1993), 29–55.

[22] J.C. Wood, Completely explicit formulae for harmonic 2-spheres in the unitary group and related spaces, In: Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization, OCAMI Studies, **3**, Osaka Municipal Univ. Press, Osaka, (2010), 53-65.

〒９８０－８５７６　仙台市青葉区川内４１　東北大学国際教育院
e-mail: urakawa@math.is.tohoku.ac.jp