

# 正方形ダクト内流れにおける定常進行波解

京都大学大学院 工学研究科 沖野真也 (Shinya Okino)  
京都大学大学院 工学研究科 永田雅人 (Masato Nagata)  
DICAT, University of Genova, Håkan Wedin

## Abstract

New nonlinear travelling wave solutions in isothermal square duct flow are discovered. One of the solutions, which possesses mirror symmetry, is found by a continuation approach in parameter space, starting from the case in which the fluid is heated internally. The Reynolds number for which the travelling wave emerges is much smaller than that of the solutions discovered recently by an analysis based on the self-sustaining process (Wedin *et al.* 2009, Uhlmann *et al.* 2009). The new travelling wave solution is unstable from the onset. Other solutions, which are asymmetric, are shown to bifurcate from the mirror-symmetric solution.

## 1 はじめに

円管内流れや正方形ダクト内流れは線形臨界点をもたない。こうした系における乱流への遷移は有限振幅擾乱が引き金となって起き、位相空間において Navier-Stokes 方程式に対する複数個の不安定解 (定常進行波解あるいは周期解) の周りを巡回する状態が乱流であると考えられている。それゆえ、Navier-Stokes 方程式の非線形解に対する理解が乱流遷移現象を解明する上で不可欠である。円管内流れに対する非線形解は数多く求められているのに対し、正方形ダクト内流れに対する解は Wedin *et al.* (2009) と Uhlmann *et al.* (2009) の求めた 2 種類の解 (以後、WBN, UKP と呼ぶ) のみにとどまっている。

Uhlmann & Nagata (2006) は内部発熱を伴う正方形ダクト内流れの線形安定性解析をおこない、層流が変曲点をもつようなパラメータにおいて不安定領域を見つけた。本論文では正方形ダクトにおける三種類の新たな非線形解について述べる。一つ目の解は Uhlmann & Nagata (2006) を非線形解析へと拡張し、内部発熱に対応するパラメータ (Grashof 数) を用いたホモトピー法により求められた。さらに、得られた非線形解の安定性を調べることにより、解の鏡像対称性を破るような二種類の分岐解が得られた。

## 2 定式化

一定の重力場のもとで、鉛直に置かれた正方形ダクト内の非圧縮粘性流体の運動を考える。重力加速度の大きさを  $g_*$ 、ダクトの一辺の長さを  $2b_*$ 、流体の動粘性係数、熱拡散係数、熱膨張係数をそれぞれ  $\nu_*$ 、 $\kappa_*$ 、 $\alpha_{T*}$  とする。流体は一様に発熱するものとし、その熱源の強さを  $q_*$  とする。Figure 1 のように、原点をダクト断面の中心に置き、ダクトの軸に沿った方向に  $x_*$  軸を、ダクト断面においてそれぞれの辺と平行に  $y_*$ 、 $z_*$  軸をとる。ここで、下付き文字の \* は有次元量を表す。

この系は連続の式、運動方程式、温度の式と適当な境界条件によって支配される。壁面においてすべりなし、温度一定という条件を境界条件として課す。また、温度変化に伴う密度変化は浮力項のみに考慮する Boussinesq 近似を適用する。長さスケール  $b_*$ 、時間スケール  $b_*^2/\nu_*$ 、速さスケール  $\nu_*/b_*$ 、温度スケール  $\nu_*^2/(g_*\alpha_{T*}b_*^3)$  として支配方程式の無次元化をおこなう。その結果、流速  $\mathbf{u}$ 、圧力  $P$ 、壁面からの温度変化  $T$  に対する無次元化された支配方程式を得る：

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

運動方程式、

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + Te_x + \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{2}$$

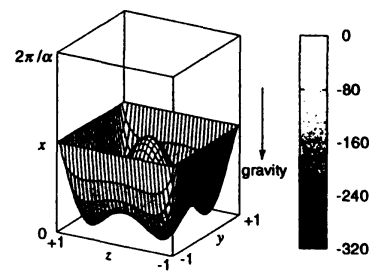


Figure 1: The configuration of the model with the basic flow in grey scale at  $Re = -3,000$  and  $Gr = 23,000$ .

温度の式,

$$\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = Pr^{-1}(\nabla^2 T + 2Gr). \quad (3)$$

ここで,  $e_x$  は  $x$  方向の単位ベクトルである. また, 無次元パラメータとして, Grashof 数

$$Gr = \frac{g_* \alpha T_* q_* b_*^5}{2\nu_*^2 \kappa_*}, \quad (4)$$

および, Prandtl 数,

$$Pr = \frac{\nu_*}{\kappa_*}, \quad (5)$$

を定義している. Joule 加熱による内部発熱の実験においては, 電気伝導性を有する  $ZnCl_2$  の水溶液がしばしば用いられる.  $ZnCl_2$  の 20% 水溶液は  $20^\circ C$  において  $Pr = 8.7$ ,  $40^\circ C$  において  $Pr = 6.08$  である (Generalis & Nagata 2003). 本研究では,  $Pr = 7$  と固定して解析をおこなう. 壁面における境界条件は以下である:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, T = 0 \quad \text{at } y = \pm 1 \text{ and } z = \pm 1. \quad (6)$$

$x$  方向に関しては, 周期  $2\pi/\alpha$  の周期性を課す.

層流解として,  $x$  に依存しない定常解を  $\mathbf{u} = U_B(y, z)e_x$ ,  $P = P_B = -\chi x$ ,  $T = T_B(y, z)$  とおく.  $\chi$  は無次元化された圧力降下である. 等温状態 ( $Gr = 0, T_B \equiv 0$ ) における解を  $U_{Biso}(y, z)$  とし, その中心流速を用いて Reynolds 数を定義する.

$$Re = U_{Biso}(0, 0) = \frac{U_{Biso*}(0, 0)b_*}{\nu_*}. \quad (7)$$

なお, 圧力降下と Reynolds 数の間には比例関係  $\chi = 3.3935 Re$  が成り立つ (Tatsumi & Yoshimura 1990). Uhlmann & Nagata (2006) によれば, Reynolds 数と Grashof 数の比に応じて層流状態は 5 つの領域に分類される.  $M_2$  と分類される領域 ( $-7.69 < Gr/Re < -5.75$ ) においては, figure 1 に示されるように, 層流は変曲点をもち, 逆流しない ( $U_B(0, 0) \leq 0$ ) という特徴をもつ.

層流解  $U_B e_x$ ,  $P_B$ ,  $T_B$  に擾乱  $\hat{u}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{\theta}$  を加え, 層流解の安定性とそこから分岐する非線形解を調べる. 非線形解として, 流れ方向の位相速度  $c$  をもつ定常進行波解を仮定する. 各変数を境界条件を満たす関数を用いて展開したのち, Galerkin 射影を施すことによって, 二次の代数方程式が得られる. これを Newton-Raphson 法を用いて数値的に解くことで非線形解を得る.

### 3 鏡像対称解

#### 3.1 対称性

支配方程式を満たす解のもちうる対称性のうち, 次の 2 つの対称性, shift-and-reflect symmetry  $\mathbf{S}$  と鏡像対称性 (mirror symmetry)  $\mathbf{Z}$  を非線形解に課す.

$$\mathbf{S}: \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ w \\ \theta \end{pmatrix} \left(\xi + \frac{\pi}{\alpha}, -y, z\right), \quad \mathbf{Z}: \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ -w \\ \theta \end{pmatrix} (\xi, y, -z). \quad (8)$$

ここで  $\xi = x - ct$  である. この対称性は, Uhlmann & Nagata (2006) の線形安定性解析の結果, 最も不安定であるとされる対称性の非線形解析への拡張となっている. さらに対称性  $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{Z}$  を組み合わせることによって, 同時に次の shift-and-rotate symmetry  $\mathbf{\Omega}$  を有することがわかる.

$$\mathbf{\Omega}: \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ -w \\ \theta \end{pmatrix} \left(\xi + \frac{\pi}{\alpha}, -y, -z\right). \quad (9)$$

なお, WBK も同じ対称性を有する.

### 3.2 等温状態 ( $Gr = 0$ ) への接続

Figure 2(a) に層流解の線形安定性解析の結果として、流れ方向波数  $\alpha = 1.0$  を有する擾乱に対する中立曲線を示す。破線の内側の領域で層流は不安定となる。この不安定領域は領域  $M_2$  を覆うような形で存在することがわかる。まず、我々は中立曲線上の点  $(Re, Gr) = (-3, 000, -17, 470)$  から分岐する非線形解を求め、figure 2(a) に示される矢印をたどることで等温状態 ( $Gr = 0$ ) における解への接続をおこなった。この道筋は 3つの区間からなる: (i)  $Re = -3, 000$  と固定し、 $Gr$  を 17, 470 から 30, 000 まで変化させる、次に (ii)  $Gr = 30, 000$  と固定し、 $Re$  を  $-3, 000$  から 1000 まで増加させる、最後に (iii)  $Re = 1000$  と固定し、 $Gr$  を減少させる。Figure 2(b) には区間 (iii) における bulk Reynolds 数の変化を示す。ここで、bulk Reynolds 数  $Re_b$  は平均流速から定義される Reynolds 数であり、非線形性の尺度として用いられている。Figure 2(b) に示されるように、 $Gr$  を減少させることで、解は等温状態 ( $Gr = 0$  を表す実線との交点、図中の黒丸) へと接続されている。さらに  $Gr$  は  $-2, 269$  まで減少し、解は転回したのちに再び  $Gr = 0$  の実線と交差している。図には層流解に対応する  $Re_b$  も併せて描かれている。層流状態により近い解を lower branch、もう一方の解を upper branch と呼ぶことにする。

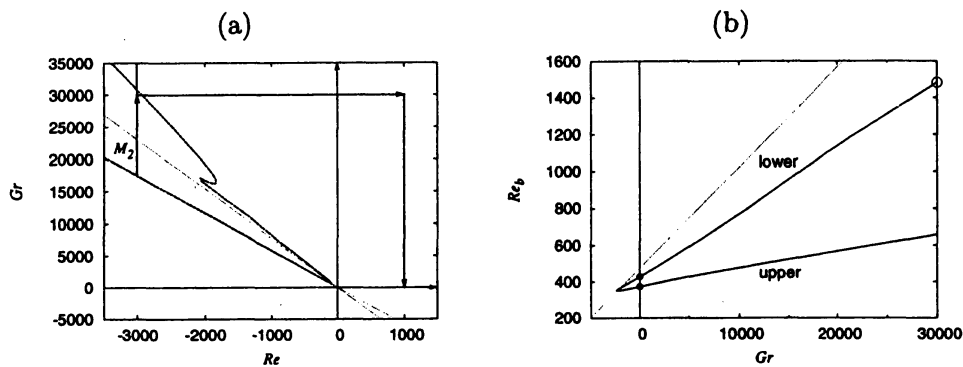


Figure 2: (a) The path taken from the linear critical point of the internally heated duct flow to the isothermal solution indicated by the arrows. The dashed curve represents the neutral curve with  $\alpha = 1.0$ . The region  $M_2$  is bounded by the two thin lines,  $Gr/Re = -7.69$  and  $-5.75$ . (b) The variation of  $Re_b$  along the path with  $Re = 1, 000$  in (a). Two closed circles correspond to the isothermal solutions. The dotted line shows the laminar state,  $Re_b = 0.47704Re + 0.054480Gr$ .

### 3.3 解の性質 (存在領域, 管摩擦係数, 流れ場, 線形安定性)

前節で得られた鏡像対称性  $Z$  を有する解の性質について述べる。Figure 3(a) には  $(\alpha, Re_b)$  平面における解の存在領域を示している。  $Re$  の減少とともに存在領域は縮んでいき、  $Re < 828$  では解は存在しなくなる。WBN の存在領域も比較のため描いている。Figure 3(b) は bulk Reynolds 数に対する管摩擦係数  $\lambda$  の変化を示す。我々の解に加え、WBN、層流解 ( $\lambda = 28.45/Re_b$ )、さらに Jones(1976) による発達した乱流の実験データ ( $\lambda^{-1/2} = 2 \log_{10}(2.25 Re_b \lambda^{1/2}) - 0.8$ ) も描かれている。なお、非線形解の波数は最小の  $Re_b$  を与える値に固定している。我々の解の lower branch と upper branch が  $Re_b$  の増加とともに、それぞれ層流解と乱流状態に近づいていくことがわかる。また、我々の非線形解に対する最小の bulk Reynolds 数は 332 である。これは WBN の最小 bulk Reynolds 数 598 に比べ大幅に小さい。

Figure 4(a) には  $Re = 1, 500, \alpha = 1.0$  における upper branch の流れ方向温度と流速の等値面を示す。(b) は  $z < 0$  の領域の拡大図である。壁面に沿った低速ストリーク (figure 4(b) における流れ方向速度の等値面の盛り上がった部分) を挟んで、温度の正負が異なる縦渦が交互に配置されている。乱流中の壁近傍秩序構造として、これと類似の構造がしばしば見られる。Figure 4(c) には  $Re = 1, 500, \alpha = 1.0$  における lower branch の擾乱  $\hat{u}$  の平均成分を示す。平均成分は 8 つ渦構造 (4 つの大きな渦と 4 つの小さな渦) をもつ。高 Reynolds 数における発達した乱流における平均流は 8 つ渦構造であるが (Gavrillakis 1992)、我々の解は対角線に関する対称性をもたないという点で異なっている。さらに、figure 4(c) は Pringle & Kerswell (2007) により発見された円管内流れの非線形解 M1 と類似の流れ場である (彼らの figure 1 右下図を参照)。彼らの解も我々の解と同様に shift-and-reflect symmetry  $S$  と shift-and-rotate symmetry  $\Omega$  を有する。また、我々

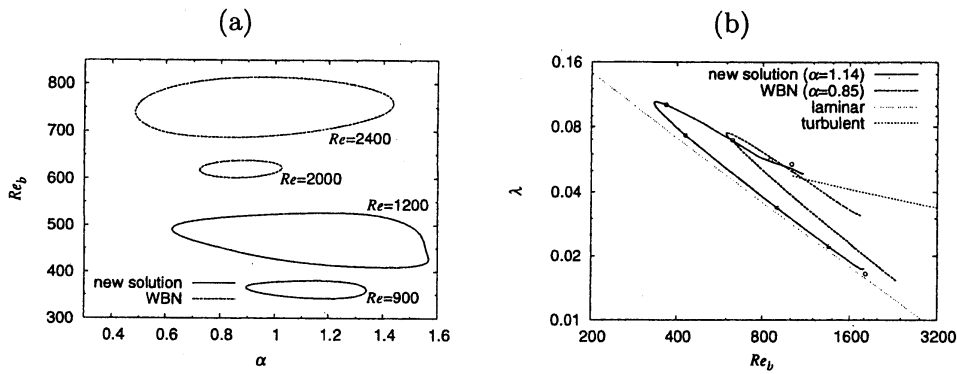


Figure 3: Comparison of the solutions. (a) The existence domains for the new travelling wave solutions (solid curves) and WBN (dotted curves). (b) The skin friction against the bulk Reynolds number. The current solution: solid curve and the WBN solution: dashed curve.  $(L, M, N) = (6, 16, 16)$  except for dots for the current solution where  $(L, M, N) = (10, 20, 20)$ . The laminar flow: dotted line. The experimental data by Jones (1976): thin dashed curve.

の解の最小 bulk Reynolds 数 332 (長さスケールはダクト半幅) は彼らの 773 (長さスケールは円管直径) に匹敵するという点には注目すべきである。以後、円管内流れとの類似性から我々の鏡像対称解を M1 と呼ぶ。

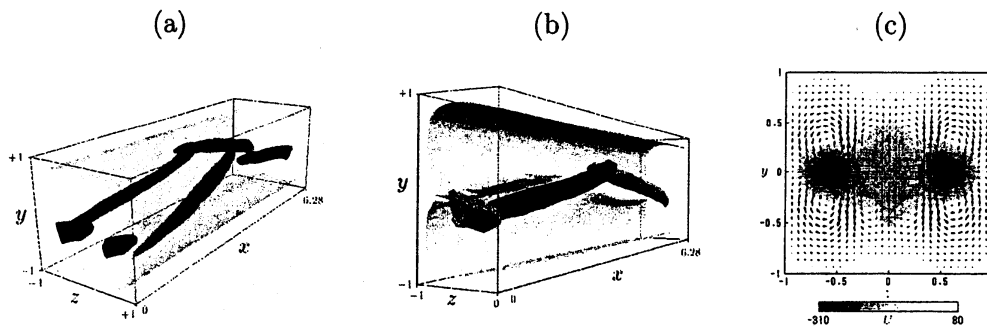


Figure 4: The visualization of the solution. (a) The iso-surfaces of the streamwise vorticity and the streamwise velocity of the upper branch solution with  $\alpha = 1.0$  at  $Re = 1,500$  ( $Re_b = 506$ ). Black (dark grey) represents +70% (-70%) of the maximum vorticity and light grey represents 40% of the maximum velocity. (b) the close-up of (a). (c) The mean part of the disturbance velocity of the lower branch solution with  $\alpha = 1.0$  at  $Re = 1,500$  ( $Re_b = 664$ ). The velocities on the  $y$ - $z$  plane (arrows) and along the  $x$ -direction (grey scale).

続いて、M1 の安定性を調べた。Figure 5 は解と同じ対称性を有する擾乱の成長率を示す。非線形解は saddle-node 分岐により生じた直後から不安定である。lower branch が常に 2 つの不安定モードをもつのに対し、upper branch では Reynolds 数の増加とともに、不安定モードの数が増加する様子が見られる。さらに、upper branch において実部が 0 を横切る固有値は全て複素共役な固有値であるため、そこから一定の位相速度で進行しながら時間周期的に変動する解が分岐すると考えられる。

## 4 非鏡像対称解

鏡像対称解 M1 の安定性を議論するにあたって、支配方程式の形から、M1 に加えられた無限小擾乱のもちうる対称性は次の 4 つのクラスに分類される。

- (i) symmetry IA: 対称性  $S, Z, \Omega$  を有する擾乱
- (ii) symmetry IB: 対称性  $S$  のみを有する擾乱
- (iii) symmetry IC: 対称性  $Z$  のみを有する擾乱
- (iv) symmetry ID: 対称性  $\Omega$  のみを有する擾乱

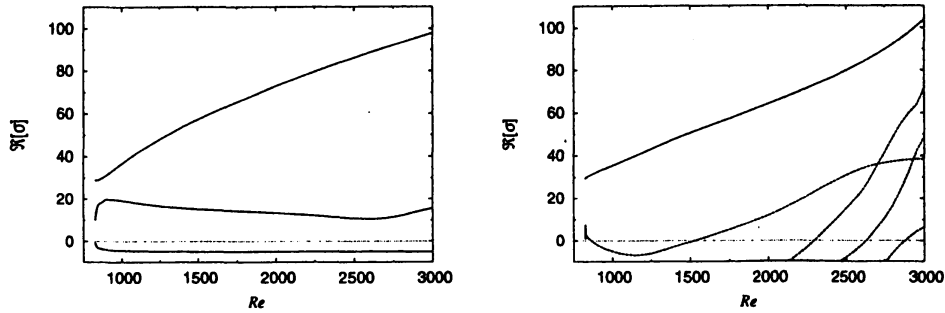


Figure 5: The growth rate,  $\Re[\sigma]$ , of perturbations to the lower branch solution (left) and the upper branch solution (right) with  $\alpha = 1.14$ . Solid/dashed curves indicate that the growth rates are real/complex conjugate.

前節では、解と同じ対称性を有する擾乱 (symmetry IA) に対する結果のみを述べた。本節では、解の鏡像対称性を破るような擾乱 (symmetry IB, ID) に対する安定性解析の結果について述べ、中立状態にある固有モードを手掛かりに求めた二種類の非鏡像対称な分岐解を紹介する。

#### 4.1 対称性 S を有する非鏡像対称解

Figure 6 左図に lower branch に対する symmetry IB に属する擾乱の成長率を示す。lower branch は常に少なくともひとつの不安定モードをもつ。saddle-node 点において複素共役の形で現れる第二固有値は、 $Re \sim 1,000$  において二つの実固有値へと枝分かれする。さらにそのうちの一方が  $Re \sim 1,080$  において中立状態になる。この点における固有関数を手掛かりに、分岐する定常進行波解を求めた。 $\alpha = 1.14$  における分岐図を figure 6 右図に示す。lower branch における図中の黒丸で示される点 ( $Re_b = 468$ ) から亜臨界分岐した解は、 $Re_b = 398, 553$  で転回し、upper branch に接続する。最小の bulk Reynolds 数は  $\alpha = 1.38, Re = 952$  において  $Re_b = 365$  であり、M1 の最下点 ( $Re_b = 332$ ) を下回ることにはない。figure 7 は解の存在領域を示す。M1 の lower branch と upper branch をつなぐ形で非鏡像対称解が存在している。この非鏡像対称解の存在領域は M1 と同様に  $Re$  の減少に伴い縮小していき、 $\alpha = 1.36, Re = 924$  において消える。

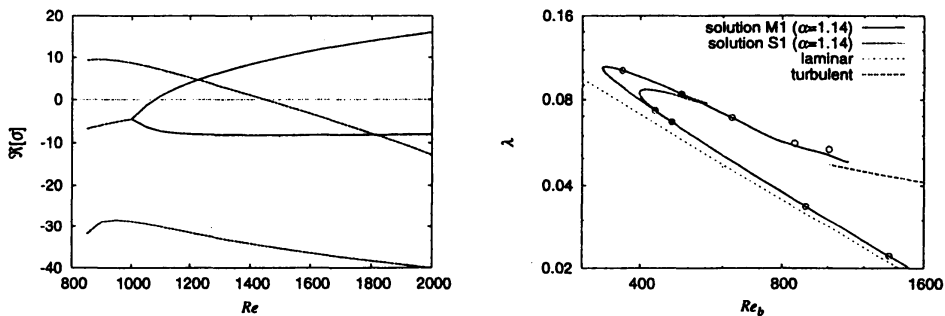


Figure 6: (left) The growth rate,  $\Re[\sigma]$ , of perturbations, which possess the symmetry S, to the lower branch solution with  $\alpha = 1.14$ . Solid/dashed curves indicate the same as figure 5. (right) The skin friction against the bulk Reynolds number. The mirror-symmetric solution (M1): solid curve. The S-symmetric solution (S1): dashed curve. The laminar flow: dotted line. The empirical formula by Jones (1976): thin dashed curve. The bifurcation points are indicated by closed circles. The dots are same as figure 3(b).

Figure 8 には非鏡像対称解の流れ場を示す。 $z = 0$  の面に関する鏡像対称性が破れ、 $z = +1$  の壁近傍に強い乱れが局在している。pitchfork 分岐により、 $z = -1$  付近に乱れが局在するような解も同時に存在する。解は一對の縦渦と低速ストリークからなり、M1 の半分を取り出したものと同様の空間構造である (figure 4(b) と figure 8 右図を参照)。この解は Pringle & Kerswell (2007) による円管内流れの非対称解 S1 と同様の構造であり、解の有する対称性 S も同一である (彼らの figure 1 右上図を参照)。以後、本節で述べた我々の非鏡像対称解を S1 と呼ぶ。S1 は Biau &

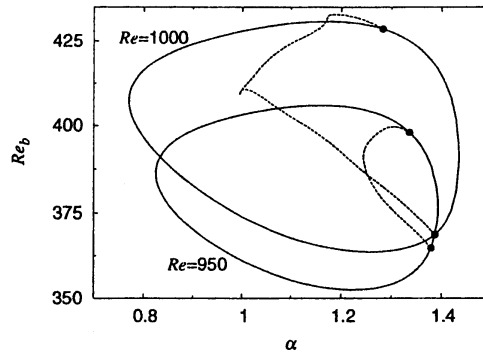


Figure 7: The domains of existence of the mirror-symmetric solution (solid) and those of the S-symmetric solution (dashed). The closed circles indicate the bifurcation points.

Bottaro(2009)による正方形ダクト内流れの edge state ともよく似ており(彼らの figure 6 参照), 我々の求めた S1 が層流と乱流を分ける境界上に存在することを示唆している.

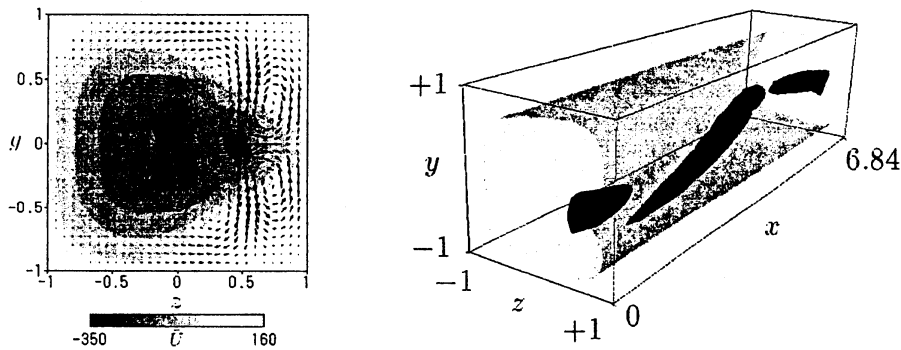


Figure 8: The visualization of the S-symmetric solution with  $\alpha = 0.92$ ,  $Re = 1,050$ ,  $Re_b = 424$ . (left) The mean part of the disturbance velocity. (right) The iso-surfaces of the streamwise vorticity and the streamwise velocity. Black, grey and light grey indicate the same as figure 3(a).

## 4.2 対称性 $\Omega$ を有する非鏡像対称解

Figure 9 左図に upper branch に対する symmetry ID に属する擾乱の成長率を示す.  $Re \lesssim 1,400$  においては不安定モードは存在しないが,  $Re \sim 1,400$  において相次いで5つの不安定モードが現れる. そのうち2組は複素共役固有値, 残りは実固有値をもつモードである. そこで実モードの臨界点から現れる定常進行波解を求めた. 以後, ここで求めた解を  $\Omega_1$  と呼ぶ.  $\alpha = 1.14$  における  $\Omega_1$  の分岐の様子を figure 9 右図に示す. upper branch における図中の黒丸で示される点 ( $Re_b = 467$ ) から解は超臨界的に分岐する. 最小の bulk Reynolds 数は  $\alpha = 1.43$ ,  $Re = 1272$  において  $Re_b = 427$  であった.

$\Omega_1$  の流れ場を figure 10 に示す.  $z = 0$  の面に関する鏡像対称性が破れ, figure 10 の右図では反時計回りの渦 (dark grey) が強くなっている. 未だ報告されていないものの, 円管内流れにおいても  $\Omega_1$  に対応する解の存在が期待される.

## 5 結論

Uhlmann & Nagata (2006) による内部発熱を伴う正方形ダクト内流れの線形安定性解析を非線形解析へと拡張し, 中立曲線からの分岐解を求めた.  $Re-Gr$  平面の特定の道筋を通して, この解を等温状態へと接続することに成功した. この非線形解は WBN に比べ, 大幅に小さい bulk Reynolds

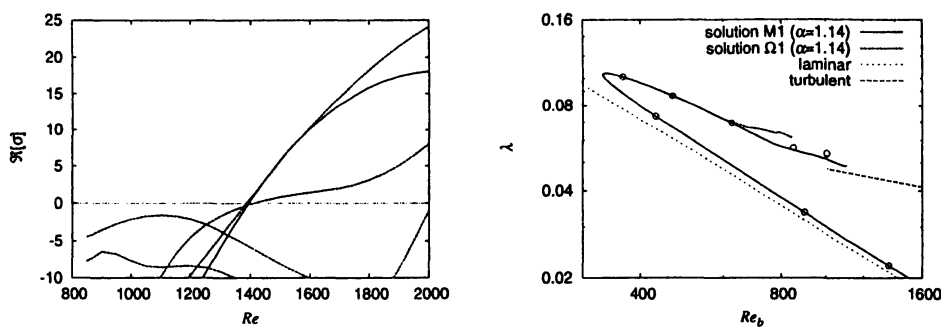


Figure 9: (left) The growth rate,  $\Im[\sigma]$ , of perturbations, which possess the symmetry  $\Omega$ , to the lower branch solution with  $\alpha = 1.14$ . Solid/dashed curves indicate the same as figure 5. (right) Same as the right frame of figure 6. The dashed curve indicates the  $\Omega$ -symmetric solution.

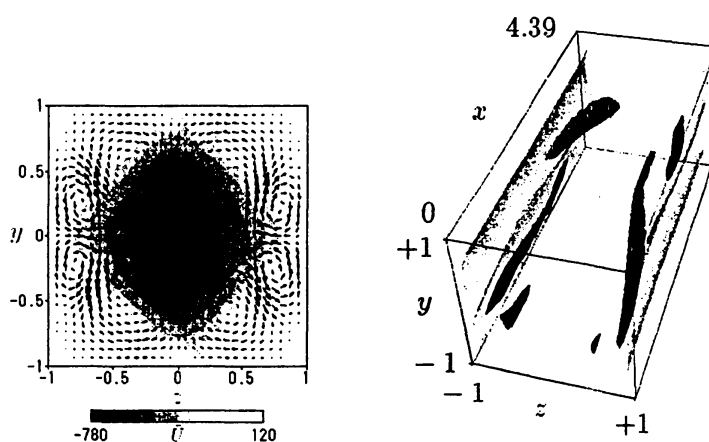


Figure 10: Same as figure 8 for the  $\Omega$ -symmetric solution with  $\alpha = 1.43$ ,  $Re = 1,502$ ,  $Re_b = 487$ .

数 ( $Re_b = 332$ ) において出現する。また, lower branch と upper branch における管摩擦係数の値は,  $Re_b$  の増加に伴って, それぞれ層流解と乱流状態に近づいていく。

得られた非線形解の線形安定性を調べることにより, 解は分岐直後から不安定であることがわかった。さらに, 臨界状態にあるモードを手掛かりに, 対称性  $S$  を有する非鏡像対称解と対称性  $\Omega$  を有する非鏡像対称解を求めた。対称性  $S$  を有する解は, 壁近傍に局在する一对の縦渦と低速ストリークからなり, Biau & Bottaro(2009) による正方形ダクト内流れの edge state とよく似た構造をしている。

我々の鏡像対称性  $Z$  を有する解と対称性  $S$  のみを有する非対称解は, 対称性と流れ場の比較から, 円管内流れにおける鏡像対称解 M1, 非対称解 S1 (Pringle & Kerswell 2007) に対応する解であると考えられる。このことは円管内流れと正方形ダクト内流れが乱流遷移に関して共通の機構をもつことを示唆している。

## References

- BIAU, D. & BOTTARO, A. 2009 An optimal path to transition in a duct. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **367**, 529-544.
- GAVRILAKIS, S. 1992 Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *J. Fluid Mech.* **224**, 101-129.
- GENERALIS, S. C. & NAGATA, M. 2003 Transition in Homogeneously Heated Inclined Plane Parallel Shear Flows. *J. Heat Trans.* **125**, 795-803.

- JONES, O. C. 1976 An improvement in the calculation of turbulent friction in rectangular ducts. *ASME: J. Fluids Engng* **98**, 173-181.
- OKINO, S., NAGATA, M., WEDIN, H. & BOTTARO, A. 2010 A new nonlinear vortex state in square duct flow. submitted to *J. Fluid Mech.*
- PRINGLE, C. C. T. & KERSWELL, R. R. 2007 Asymmetric, helical and mirror-symmetric travelling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 074502.
- TATSUMI, T. & YOSHIMURA, T. 1990 Stability of the laminar flow in a rectangular duct. *J. Fluid Mech.* **212**, 437-449.
- UHLMANN, M. & NAGATA, M. 2006 Linear stability of flow in an internally heated rectangular duct. *J. Fluid Mech.* **551**, 387-404.
- UHLMANN, M., KAWAHARA, G. & PINELLI, A. 2009 Travelling waves in a straight square duct. *Advances in Turbulence XII*, edited by B. Eckhardt, Proceedings of the 12th European Turbulence Conference, 585-588.
- WEDIN, H., BOTTARO A. & NAGATA, M. 2009 Three-dimensional traveling waves in a square duct. *Phys. Rev. E* **79**, 065305.