数理解析研究所講究録
第 1722 巻 2010 年 20-30

A GENERALIZED CARTAN DECOMPOSITION FOR THE DOUBLE COSET SPACE $SU(2n+1)\backslash SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$

ATSUMU SASAKI

1. 導入と主定理

非コンパクトな簡約リー群とその閉部分群 H に対し，G の極大コンパクト部分群 K の等質空間 G/H への作用による軌道分解を考える．つまり，両側剰余空間分解 $K\backslash G/H$ を考える．

G/H が対称空間のときはカルタン分解の一般論が知られている．つまり，$G=KAH$ となる $A\simeq\mathbb{R}^{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}G/H}$ が存在する (cf. [1])．このことは，G/H 内の各 K-軌道は AH/H と交叉することを意味する．G/H が対称空間ではないときは積写像 $K\times A\times H\to G$ が全射となるような可換群 A が存在するとは限らない．ここで，G/H が複素多様体の構造をもつとき，K-作用が可視的であることが分かると $G=KAH$ を満たすよい空間 A が存在すると考えられる (cf. [4, 8, 10])．

本講究録では，複素等質空間として

$$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}:=SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$$

を扱い，$G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 $G_u=SU(2n+1)$ の作用による $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の軌道分解を考える．

定理 1.1. $G_{\mathbb{C}}=SL(2n+1,\mathbb{C})$, $H_{\mathbb{C}}=Sp(n,\mathbb{C})$ とし，$G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 $G_u=SU(2n+1)$ をとる．このとき，

$$G_{\mathbb{C}}=G_uAH_{\mathbb{C}} \tag{GC}$$

となる $2n$ 次元の A が存在する．特に，A は $SL(2n+1,\mathbb{R})$ の中で次の形のものを選ぶことができる：

$$A\simeq\mathbb{R}^2\cdot\underbrace{\mathbb{T}\cdot\cdots\cdot\mathbb{T}}_{n-1}\cdot\mathbb{R}^{n-1}.$$

複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は対称空間ではなく (cf. [7])，$G_{\mathbb{C}}$-同変な正則ファイバー束

$$K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}\to G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}\to G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \tag{1.1}$$

RIMS 研究集会「等質空間と非可換調和解析」(研究代表者：和地輝仁氏，副代表者：西山享氏，京都大学：2010 年 6 月 14 日–17 日) における講究録.

の構造をもつ．ここで，底空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} := SL(2n+1,\mathbb{C})/GL(2n,\mathbb{C})$ およびファイバー $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = GL(2n,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$ はともに対称空間であることに注意する．論文 [8] において，エルミート対称空間の複素化を底空間とするファイバー束の構造をもつ非対称なシュタイン多様体を研究した．ここで扱ったのはファイバーが 1 次元であったのに対し，本稿で扱うファイバー $K_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は高次元である．

また，非対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は球多様体である [7]，つまり，$G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群が $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 内に (ザリスキ位相の意味で) 開軌道をもつ．Vinberg–Kimelfeld [11] によって，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球多様体であるとき，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数のなす空間 $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ は $G_{\mathbb{C}}$ の表現として重複なく既約分解される．

定理 1.1 から新しい強可視的作用が得られる．

定理 1.2. 複素等質空間 $SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$ における $SU(2n+1)$ の作用は強可視的である．

複素多様体における (強) 可視的作用の概念は，小林俊行氏によって提唱された ([2])．連結な複素多様体 D にリー群 G が正則に作用しているとする．この作用に対し，次を満たす $S \subset D$ と反正則微分同相 σ が存在するときに**強可視的**であるという (cf. [3, Definition 3.3.1])：

(a) $D = G \cdot S$.
(b) $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たし，σ は各軌道を保存する．

本稿では，定理 1.1 における A を具体的に構成し，$SL(2n+1,\mathbb{R})$ の中に実現されることを中心に解説する．また，この定理から定理 1.2 が導かれることを見る．

2. 定理 1.1 の証明の方針

この章では，定理 1.1 の証明の方針を説明する．証明の鍵は，‘編み上げ’ による手法である (Step 4 参照)．編み上げによる手法は，小林氏によって行われた一般化された旗多様体における可視的作用の研究において導入された [4].

2.1. $Sp(n,\mathbb{C})$ **と** $SU(2n+1)$ **の実現．** まず，$H_{\mathbb{C}} = Sp(n,\mathbb{C})$ と $G_u = SU(2n+1)$ を行列群として次のように実現する：

$$Sp(n,\mathbb{C}) := \{g \in SL(2n,\mathbb{C}) : {}^t g J_n g = J_n\},$$
$$SU(2n+1) := \{g \in SL(2n+1,\mathbb{C}) : {}^t \overline{g} g = I_{2n+1}\}.$$

$$SU(2n+1)\backslash SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$$

ただし，${}^t g$ は g の転置行列，I_{2n+1} は $(2n+1)$ 次単位行列とし，

$$J_n := \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \in SL(2n,\mathbb{C})$$

とする．このとき，$Sp(n,\mathbb{C})$ は $G_{\mathbb{C}} = SL(2n+1,\mathbb{C})$ の閉部分群として次のように実現する：

$$Sp(n,\mathbb{C}) \hookrightarrow SL(2n+1,\mathbb{C}),\ h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

2.2. **編み上げによる手法**. 次に，(GC) を与える A の構成の仕方を紹介しよう．

Step 1 (非対称シュタイン多様体 $G_{\mathbb{C}}/[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ に対するカルタン分解). $K_{\mathbb{C}} := S(GL(1,\mathbb{C}) \times GL(2n,\mathbb{C}))$ とする．このとき，$K_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の対称部分群である．さらに，$K_{\mathbb{C}}$ は半単純ではなく 1 次元の中心をもつ．$K_{\mathbb{C}}$ の交換子群 $L_{\mathbb{C}} = [K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ は $L_{\mathbb{C}} = 1 \times SL(2n,\mathbb{C})$ となる．このとき，$G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ は $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^{\times}$ をファイバーにもつファイバー束の構造をもつ：

$$L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}.$$

よって，$G_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ に対して [8] の結果を適用することができる．

補題 2.1. 次の分解を満たす $A_1 \simeq \mathbb{R}^2$ が存在する：

$$G_{\mathbb{C}} = G_u A_1 L_{\mathbb{C}} \tag{2.1}$$

補題 2.1 にある A_1 の構成を第 3 章で解説する．

Step 2 ($L_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ のカルタン分解). $(L_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) \simeq (SL(2n,\mathbb{C}), Sp(n,\mathbb{C}))$ は対称対である．また，$L_u := L_{\mathbb{C}} \cap G_u = 1 \times SU(2n)$ は $L_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群となる．よって，対称空間における一般論 [1, Theorem 4.1] を適用し，次を得る．

補題 2.2. 次を満たす $A_2 \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ が存在する：

$$L_{\mathbb{C}} = L_u A_2 H_{\mathbb{C}} \tag{2.2}$$

特に，A_2 の次元は対称空間 $L_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の実階数である．

補題 2.2 については第 4 章で解説する．

Step 3 (L_u の分解). $A_1 L_u \neq L_u A_1$ であるので，L_u をさらに分解する必要がある．

そこで，M_1 を L_u における A_1 の中心化群，M_2 を H_u における A_2 の中心化群とする．ただし，$H_u := H_{\mathbb{C}} \cap L_u = 1 \times Sp(n)$ は $H_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群である．このとき，$M_1 = I_2 \times SU(2n-1)$, $M_2 = 1 \times SU(2)^n$ となることが分かる (第5章参照)．この M_1 と M_2 を用いて，両側剰余空間 $M_1 \backslash K_u / M_2$ を考える．

命題 2.3. 次を満たす $A_3 \simeq \underbrace{\mathbb{T} \cdot \cdots \cdot \mathbb{T}}_{n-1}$ が存在する：

$$K_u = M_1 A_3 M_2 \tag{2.3}$$

命題2.3の証明は第5章で与える．

Step 4 (編み上げによる手法). 分解 (2.1)–(2.3) によって

$$\begin{aligned}
G_{\mathbb{C}} &= G_u A_1 K_{\mathbb{C}} && (\because\ (2.1)) \\
&= G_u A_1 (K_u A_2 H_{\mathbb{C}}) && (\because\ (2.2)) \\
&= G_u A_1 (M_1 A_3 M_2) A_2 H_{\mathbb{C}} && (\because\ (2.3)) \\
&= G_u M_1 A_1 A_3 A_2 M_2 H_{\mathbb{C}} && (\because\ A_1 M_1 = M_1 A_1, A_2 M_2 = M_2 A_2) \\
&= G_u (A_1 A_3 A_2) H_{\mathbb{C}} && (\because\ M_1 \subset G_u, M_2 \subset H_u \subset H_{\mathbb{C}}).
\end{aligned}$$

したがって，$A := A_1 A_3 A_2$ は (GC) を満たす．

上で用いた各群の包含関係を次の図式1にまとめておこう．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & H_{\mathbb{C}} & & \supset & & H_u & & \\
 & & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & \\
 & & & & L_{\mathbb{C}} & & & & M_2 \\
 & & & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & \\
 & & G_{\mathbb{C}} & & & & L_u & & \\
 & \rotatebox{-135}{$\subset$} & & & & \rotatebox{-135}{$\subset$} & & & \\
G_u & & \supset & & M_1 & & & &
\end{array}$$

Table 1. $G_u \backslash G_{\mathbb{C}} / H_{\mathbb{C}}$ に対する編み上げの手法

次章以降では，[1, 8] に沿って補題2.1，2.2および命題2.3を証明する．特に A_1, A_2, A_3 を具体的に記述する．

3. Step 1 について

本章では，Step 1 で挙げた

$$(G_u, G_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}}) = (SU(2n+1), SL(2n+1, \mathbb{C}), 1 \times SL(2n, \mathbb{C}))$$

$$SU(2n+1)\backslash SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$$

に対して，(2.1) を満たす A_1 を [8] にしたがって具体的に記述する．そのために，まず $SL(2n+1,\mathbb{C})/S(GL(1,\mathbb{C})\times GL(2n,\mathbb{C}))$ に対するカルタン分解を考え，その後 $S(GL(1,\mathbb{C})\times GL(2n,\mathbb{C}))/(1\times SL(2n,\mathbb{C}))$ を考える．

3.1. $SL(2n+1)/S(GL(1,\mathbb{C})\times GL(2n,\mathbb{C}))$ **に対するカルタン分解．** $G_{\mathbb{C}}$ 上の正則対合 θ_1 を

$$\theta_1(g) := I_{1,2n} g I_{1,2n}$$

とする．ただし，$I_{1,2n} := \mathrm{diag}(1,-1,-1,\ldots,-1)\in SL(2n+1,\mathbb{C})$ とする．$K_{\mathbb{C}} := G_{\mathbb{C}}^{\theta_1}$ とすると，$K_{\mathbb{C}} = S(GL(1,\mathbb{C})\times GL(2n,\mathbb{C}))$ となる．

$G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合 μ を

$$\mu(g) = ({}^t\overline{g})^{-1} \tag{3.1}$$

で定義すると，μ と θ_1 は可換で $G_u = G_{\mathbb{C}}^{\mu}$ を満たす．$\tau := \theta_1\mu$ は $G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合で，$G := G_{\mathbb{C}}^{\tau} = SU(1,2n)$ となる．

次に，$\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}_0$ をそれぞれ $G_{\mathbb{C}},K_{\mathbb{C}},G_u,G$ のリー環とする．上述の対合 θ_1,μ,τ を微分したものも同じ記号を用いるとする．このとき，$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\theta_1}, \mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}^{\mu}, \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^{\tau}$ となる．θ_1 を $\mathfrak{g}_0$ に制限したものは $\mathfrak{g}_0$ のカルタン対合となる．$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^{\theta_1} + \mathfrak{g}_0^{-\theta_1}$ を対応する $\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解とすると，$\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{g}_0^{\theta_1} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1)+\mathfrak{u}(2n))$ であり，

$$\mathfrak{g}_0^{-\theta_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t\overline{v} \\ v & 0 \end{pmatrix} : v\in\mathbb{C}^{2n} \right\}.$$

さらに，記号

$$\mathfrak{g}^{-\mu,-\theta_1} := \{X\in\mathfrak{g} : (-\mu)X = (-\theta_1)X = X\}$$

を用いると，$\mu\theta = \theta\mu$ かつ $\tau = \mu\theta$ より

$$\mathfrak{g}_0^{-\theta} = \mathfrak{g}^{\tau,-\theta_1} = \mathfrak{g}^{-\mu,-\theta_1} = \mathfrak{g}^{-\mu}\cap\mathfrak{g}^{-\theta_1}$$

となる．

$\mathfrak{a}_0$ を $\mathfrak{g}_0^{-\theta_1}$ の極大可換部分空間とし，$A_0 := \exp\mathfrak{a}_0$ とすると，[1, Theorem 4.1] より $G_{\mathbb{C}}$ は次のように分解される：

補題 3.1. $G_{\mathbb{C}} = G_u A_0 K_{\mathbb{C}}$. 特に，$A_0 \simeq \mathbb{R}^{\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}} = \mathbb{R}$.

実際に，$\mathfrak{g}_0^{-\theta_1}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_0$ として

$$\mathfrak{a}_0 = \mathbb{R}(E_{1,2}+E_{2,1})$$

を選ぶことができる．ただし，$E_{i,j}$ は (i,j) 成分のみ 1 でそれ以外は 0 の $(2n+1)$ 次正方行列を表す．このとき，A_0 は

$$A_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \cosh t & \sinh t & \\ \sinh t & \cosh t & \\ \hline & & I_{2n-1} \end{array} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

と記述される．

3.2. 次に，$(K_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}}) \simeq (GL(2n,\mathbb{C}), SL(2n,\mathbb{C}))$ について考える．

$\mathfrak{m}_0$ を $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0^{\theta_1} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1)+\mathfrak{u}(2n))$ における $\mathfrak{a}_0$ の中心化環とする．このとき，

$$(3.2)\quad \mathfrak{m}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xI_2 & \\ \hline & X \end{array} \right) : x \in \mathfrak{u}(1), X \in \mathfrak{u}(2n-1), 2x + \operatorname{tr} X = 0 \right\}$$

となる．$\mathfrak{k}_0$ の導来イデアル $\mathfrak{l}_0 := [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0] \simeq \mathfrak{su}(2n)$ は $\mathfrak{k}_0$ の半単純部分を表すが，(3.2) から，ある $X_0 \in \mathfrak{m}_0$ で $X_0 \notin \mathfrak{l}_0$ を満たすものが存在する．実際に，

$$(3.3)\qquad X_0 := \left(\begin{array}{c|c} (2n-1)\sqrt{-1}I_2 & \\ \hline & -2\sqrt{-1}I_{2n-1} \end{array} \right) \in \mathfrak{m}_0$$

は $\mathfrak{l}_0$ の元ではない．この X_0 によって，$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{l}_0 + \mathbb{R}X_0$ と分解される．ゆえに，$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ はベクトル空間として

$$(3.4)\qquad \mathfrak{k} = \mathfrak{l} + \mathbb{R}X_0 + \sqrt{-1}\mathbb{R}X_0$$

と分解される．ただし，$\mathfrak{l} := [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ は $L_{\mathbb{C}}$ のリー環となる．

したがって，$Z_{\mathbb{T}} := \exp \mathbb{R}X_0, Z_{\mathbb{R}} := \exp \sqrt{-1}\mathbb{R}X_0$ とおくと，リー環の分解 (3.4) に対応するリー群の分解が得られる．

補題 3.2. $K_{\mathbb{C}} = Z_{\mathbb{T}} Z_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{C}}$.

3.3. $SL(2n+1,\mathbb{C})/SL(2n,\mathbb{C})$ **に対するカルタン分解.** 補題 3.1 と 3.2 によって，

$$G_{\mathbb{C}} = G_u A_0 K_{\mathbb{C}} = G_u A_0 (Z_{\mathbb{T}} Z_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{C}}) = G_u Z_{\mathbb{T}} Z_{\mathbb{R}} A_0 L_{\mathbb{C}} = G_u (Z_{\mathbb{R}} A_0) L_{\mathbb{C}}.$$

これより，$A_1 := Z_{\mathbb{R}} A_0$ とおけば (2.1) が成り立つ．

(3.3) で定めた X_0 に対して，$Z_{\mathbb{R}}$ は次のように記述される：

$$Z_{\mathbb{R}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} e^{(1-2n)t} I_2 & \\ \hline & e^{2t} I_{2n-1} \end{array} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Step 2 について

Step 2 で説明した

$$(L_u, L_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) = (1 \times SU(2n), 1 \times SL(2n,\mathbb{C}), 1 \times Sp(n,\mathbb{C}))$$

に対して, (2.2) を満たす A_2 を具体的に記述する. $L_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \simeq SL(2n,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$ も対称空間なので, 3.1 節で解説した方法によって (2.2) を満たす A_2 を構成することができる.

$$\theta_2(g) := J_{1,n}^{-1}({}^t g^{-1}) J_{1,n} \ (g \in G_{\mathbb{C}})$$

とおくと, θ_2 は $L_{\mathbb{C}}$ 上の正則対合で, $L_{\mathbb{C}}^{\theta_2} = H_{\mathbb{C}}$ となる. ただし,

$$J_{1,2n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_n \end{pmatrix} \in SL(2n+1,\mathbb{C}).$$

また, (3.1) で定義した $G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合 μ を $L_{\mathbb{C}}$ に制限したもの (同じ記号 μ を用いる) は $L_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合であり, $\mu\theta_2 = \theta_2\mu$ かつ $L_{\mathbb{C}}^{\mu} = L_{\mathbb{C}} \cap G_u = 1 \times SU(2n)$ を満たす.

$L_{\mathbb{C}}$ のリー環を $\mathfrak{l}$ とし, $\mathfrak{a}_2$ を $\mathfrak{l}^{-\mu,-\theta_2}$ の極大可換部分空間, $A_2 := \exp \mathfrak{a}_2$ とすると, [1, Theorem 4.1] によって補題 2.2 が成り立つ.

いま, 極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_2$ として

$$\mathfrak{a}_2 := \{\mathrm{diag}(0, t_1, t_1, t_2, t_2, \ldots, t_n, t_n) \in \mathfrak{l}^{-\mu,-\theta_2} \\ : t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 0\}$$

とすると, A_2 は

$$A_2 = \{\mathrm{diag}(1, e^{t_1}, e^{t_1}, e^{t_2}, e^{t_2}, \ldots, e^{t_n}, e^{t_n}) \in L_{\mathbb{C}} \\ : t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 0\}.$$

5. Step 3 について

本章では, Step 3 で述べた命題 2.3 の証明を与える.

$L_u = 1 \times SU(2n)$ とし, $H_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群として $H_u = H_{\mathbb{C}} \cap G_u = 1 \times Sp(n)$ をとる. M_1 を L_u における A_1 の中心化群, M_2 を H_u における A_2 の中心化群とする. このとき,

$$M_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \\ \hline & g \end{array} \right) : g \in SU(2n-1) \right\} = I_2 \times SU(2n-1),$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{g_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{g_n} \end{pmatrix} : g_1, \ldots, g_n \in SU(2) \right\} = 1 \times SU(2)^n.$$

ゆえに,

$$(L_u, M_1, M_2) \simeq (SU(2n), 1 \times SU(2n-1), SU(2)^n) \tag{5.1}$$

となる.

M_1, M_2 はどちらも L_u の対称部分群ではないが, L_u/M_1 は $\mathbb{C}^{2n}$ 内の単位球面 S^{4n-1} に微分同相である. そこで, 最初に $SU(2)^n$ における単位球面 S^{4n-1} における作用を考え, 各軌道と交叉する T_0 を求める.

5.1. S^{4n-1} における $SU(2)^n$ の作用. $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{2n}\}$ を $\mathbb{C}^{2n}$ の標準正規直交基底とする. $SU(2)^n$ を $\mathbb{C}^{2n}$ に以下のように作用させる:

$$(g_1, \ldots, g_n) \cdot {}^t(v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1}, v_{2n}) = \begin{pmatrix} g_1{}^t(v_1, v_2) \\ \vdots \\ g_n{}^t(v_{2n-1}, v_{2n}) \end{pmatrix}.$$

この作用は $S^{4n-1} = \{v \in \mathbb{C}^{2n} : \|v\| = 1\}$ を保つ.

ここで, T_0 を次で定める:

$$T_0 := \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_j \vec{e}_{2j-1} \in S^{4n-1} : r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R} \right\}$$

補題 5.1. $S^{4n-1} = SU(2)^n \cdot T_0$.

Proof. $SU(2)$ は $\mathbb{C}^2$ 内の単位球面に推移的に作用することから, $\mathbb{C}^2 = SU(2) \cdot \mathbb{R}\,{}^t(1,0)$ と分解される. これを用いると,

$$\mathbb{C}^{2n} = SU(2)^n \cdot (\sum_{j=1}^{n} \mathbb{R}\vec{e}_{2j-1})$$

と分解される. 特に, 上の分解を S^{4n-1} に制限することで, 補題 5.1 を得る. □

5.2. 命題 2.3 の証明. 補題 5.1 を用いて命題 2.3 の証明を与えよう.

各 $j = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して, $SU(2n)$ の部分群 B_j を

$$B_j := \exp \mathbb{R}(E_{2j+1,2j-1} - E_{2j-1,2j+1}) \simeq SO(2)$$

とする. 例えば, B_1 は

$$B_1 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \\ \hline & & & I_{2n-3} \end{array} \right) \in SU(2n) : \theta_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

これらを用いて，B を次で定義する：

$$\begin{aligned} B &:= B_{n-1}B_{n-2}\cdots B_2B_1 \\ &= \{b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_2b_1 : b_j \in B_j \ (j=1,2,\ldots,n-1)\}. \end{aligned}$$

$B_jB_{j+1} \neq B_{j+1}B_j$ $(j=1,2,\ldots,n-2)$ より B は群ではないことに注意する．$o \in SU(2n)/SU(2n-1)$ を等質空間の原点とすると，微分同相

$$B \cdot o \simeq T_0, \ g \cdot o \mapsto g\vec{e}_1$$

が成り立つ．これより，補題 5.1 は等質空間 $SU(2n)/SU(2n-1)$ の分解

$$SU(2n)/SU(2n-1) = SU(2)^n \cdot (B \cdot o)$$

を導く．よって，$SU(2n)$ は次のように分解される：

$$SU(2n) = (SU(2)^n)B(SU(2n-1))$$

これは，

$$SU(2n) = (SU(2n-1))B^{-1}(SU(2)^n) \tag{5.2}$$

と同値である．ちなみに，$B^{-1} = B_1B_2\cdots B_{n-1}$ である．

Proof of 命題 2.3. リー群の 3 つ組の同型 (5.1) および分解 (5.2) によって，

$$A_3 := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & b \end{array} \right) : b \in B^{-1} \right\}$$

とおけば命題 2.3 が成り立つ． □

以上より，すべての step が証明され，よって定理 1.1 の証明が完了した．特に，各章で構成した A_1, A_2, A_3 は $SL(2n+1,\mathbb{R})$ に含まれることより，$A \subset SL(2n+1,\mathbb{R})$ であることも示された．

6. 定理 1.2 の証明

最後に，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$ における $G_u = SU(2n+1)$ の作用が強可視的であることを証明しよう．

Proof. S を次のように定義する：

$$S := AH_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}.$$

このとき，定理 1.1 から，等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は G_u の作用によって次のように軌道分解される：

$$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = G_u \cdot S.$$

これより，条件 (a) を満たすことが示された．

次に，$G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則対合 σ を

$$\sigma(g) = \overline{g} \ (g \in G_{\mathbb{C}})$$

で定義する．このとき，$G_{\mathbb{C}}^{\sigma} = SL(2n+1,\mathbb{R})$ となる．定理 1.1 から $A \subset SL(2n+1,\mathbb{R})$ より，$\sigma|_A = \mathrm{id}_A$ となる．

$H_{\mathbb{C}}$ は σ-安定であるので，このことより $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の反正則微分同相を誘導する (同じ記号 σ を用いる).

このとき，S の定義から明らかに σ は S 上恒等的である．また，任意の $x \in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は条件 (a) より $x = g \cdot s$ $(g \in G_u, s \in S)$ と表されるが，

$$\sigma(x) = \sigma(g) \cdot \sigma(s) = \sigma(g) \cdot s = \sigma(g)g^{-1} \cdot x$$

となる．$\sigma(g)g^{-1} \in G_u$ より，$\sigma(x)$ は x を通る G_u-軌道にあることが示された．ゆえに，条件 (b) が示された．

以上より，定理 1.2 が証明された． □

References

[1] M. Flensted–Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.

[2] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.

[3] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[4] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1)\times U(n_2)\times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p)\times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.

[5] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.

[6] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*, arXiv: math.RT/0607004.

[7] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, *Composito Math.* **38** (1979), 129–153.

[8] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 151–158, doi: 10.1007/s10711-009-9412-z.

[9] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1)\backslash SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$, *J. Math. Sci., Univ. Tokyo* (accepted for publication), 12 pages.

[10] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8,\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$, *Advances in Pure and Applied Mathematics* (accepted for publication), 14 pages.

[11] É. B. Vinberg, B. N. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.,* **12** (1978), 168–174.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING, WASEDA UNIVERSITY, OKUBO, SHINJUKU-KU, TOKYO, 169-8555 JAPAN.

E-mail address: atsumu@aoni.waseda.jp