

伊藤代数の  
無限テンソル積による実現について

ON THE REALIZATION OF ITOH'S ALGEBRA  
VIA AN INFINITE TENSOR PRODUCT REPRESENTATION

梅田 亨 (京都大学 大学院理学研究科)

TÔRU UMEDA (KYOTO UNIVERSITY)

0: 序

伊藤稔氏は3年ほど前、テンソル代数  $T(V)$  と無限対称群  $\mathfrak{S}_\infty$  を融合した代数を定義した。融合すると言ってもそう簡単なことではない。まず、テンソル代数

$$(0.1) \quad T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$$

に無限対称群  $\mathfrak{S}_\infty$  は作用しない。ここで  $\mathfrak{S}_\infty$  は有限箇の文字のみを動かす置換全体である。一方、各斉次成分  $T^k(V)$  に対称群  $\mathfrak{S}_k$  は作用する。この作用を取り込んで

$$(0.2) \quad \bar{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}\mathfrak{S}_\infty \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_k} T^k(V)$$

という直和に環構造を入れるというのが基本的な考えである。このように構成された代数が一旦うまく確立されると、強力な道具となるのである。実際、第一に、それは immanant を用いた higher Capelli 恒等式を扱う形式変数の代数として明快な意味をもつ。が、それにとどまらず、Schur-Weyl duality などにも応用のある興味深い数学的対象であることが示された。このように伊藤氏自ら理論を展開することで、その有用性と重要性を証明してきた。

ところで、上に述べたような伊藤氏本人の発見的な定義とは別に、異なった背景があってもよさそうな感じは拭いきれない。つまり、確かにうまく定義されてはいるが、確かめるべきいくつかの事項は若干綱渡りのすらすら思えるのであった。そのような「もやもや」に対し、この代数がより馴染みのあるものを土台として導出できることになれば、理解も一層深まるものと期待される。これに対し、初期の段階から、伊藤氏やその他の人たちと議論をし、無限テンソル積による実現で理解できることは漠然とながら判っていた。本稿では、それが実際ははっきりした形で展開できることを報告したい。特に、この定式化により、伊藤代数の「微分」に現われる「置換」の由来が明確になる。

## 1: 設定

(1.1) 基礎体を  $\mathbb{K}$  とし, 考えるベクトル空間を  $V$  とする. 無限テンソル積を作るための reference vector, 或いは “真空ベクトル”  $e$  を外部に設定して  $V$  を 1 次元拡大しておく:

$$(1.1.1) \quad \dot{V} = V \oplus \mathbb{K}e.$$

もちろん, 元の  $V$  の中に自然にそれが存在するかもしれないが, 無限テンソル積で, 特に無限和を扱う場合には, そのような元を別格視する必要が生じる.

直和分解 (1.1.1) を通じて, dual についても

$$(1.1.2) \quad \dot{V}^* = V^* \oplus \mathbb{K}e^*$$

と看做す. 特に  $e^*$  とは  $V$  の元をすべて消し,  $e$  で 1 の値をとる線型形式である.

(1.2) 大枠の無限テンソル積を, 両側に無限に延びたものとして設定する. つまり, テンソル積の添え字集合は  $\mathbb{Z}$  とし,

$$(1.2.1) \quad t = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} t_i \quad (t_i \in \dot{V})$$

という形式的な無限積を作る, そのうちで, 充分外側ではテンソルの因子成分が真空ベクトル  $e$  であるもの  $T^{(\infty)} = T^{(\infty)}(\dot{V})$  と, さらにそのうち負の添え字  $i$  の成分がすべて  $e$  であるもの  $T^{[\infty]} = T^{[\infty]}(\dot{V})$  を考える. 即ち,

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} T^{(\infty)} &= \text{span} \left\{ \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} t_i; t_i \in \dot{V}, t_i = e \text{ for } |i| \gg 0 \right\}, \\ T^{[\infty]} &= \text{span} \left\{ \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} t_i; t_i \in \dot{V}, t_i = e \text{ for } i < 0, i \gg 0 \right\}. \end{aligned}$$

基本的には, 下の「実質」片側無限テンソル積空間が主役だが, より大きな空間を考えた方が, 何かと都合がよい.

(1.3) ベクトル空間  $\dot{V}$  の上の線型変換  $A \in \text{End}(\dot{V})$  に対し, テンソル積空間  $T^{(\infty)}$  の第  $k$  成分への埋め込み, 即ち, 第  $k$  成分には  $A$  で働かせ, 他の成分では恒等変換となる作用素を, 記号で

$$(1.3.1) \quad \underset{(k)}{A}$$

と書く. 本稿では用いないが, もっと一般に, 線型変換  $B \in \text{End}(\dot{V} \otimes \dot{V})$  に対して, それを  $T^{(\infty)}$  の第  $k, l$  成分に働かせ, 他の成分では恒等変換となるものを

$$(1.3.2) \quad \underset{(kl)}{B}$$

などを書くことで、作用する場所を指定することができる。このような作用素の「埋め込み」は量子群などにしばしば現われる。

(1.4) 次に、無限置換群を考える。一般に、(無限) 集合  $X$  の置換全体の群を  $\mathfrak{S}_X$ 、その中の有限置換の部分群  $\mathfrak{S}_{(X)}$  と書こう。以下、 $\mathbb{N}$  は 0 以上の整数 (=自然数) の集合を表わすものとし、置換についても

$$(1.4.1) \quad \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}}; \sigma(i) = i \text{ for } i < 0 \}$$

と  $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}}$  の部分群と看做す。よって、また有限置換の部分群についても

$$(1.4.2) \quad \mathfrak{S}_{(\mathbb{N})} = \mathfrak{S}_{(\mathbb{Z})} \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$$

と定義する。

(1.5) 土台の置換は、(無限) テンソル積空間への作用を引き起こす：

$$(1.5.1) \quad \sigma \left( \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} t_i \right) = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} t_{\sigma^{-1}(i)}.$$

このとき、 $\sigma(\tau(t)) = (\sigma\tau)(t)$  である。右辺の定義で  $\sigma^{-1}(i)$  でなく、 $\sigma(i)$  とすると、合成と積の順が逆転し、その場合は右作用を考えるのが自然となる。今は、考える無限テンソルがどのようなものか特定していないが、上の作用は、定義できる場合という限定の下であるの言うまでもない。

因みに、伊藤氏の定義では、上の左作用ではなく、右作用が用いられている。そのため、本稿とは若干のずれが生じる。敢えて「本家」に合わせなかったのは、通常は左作用が用いられるという理由によるが、右作用への翻訳も容易であるし、「本家」の右作用がどのような理由で用いられたかを確認する意味も込めて、両方の可能性を呈示しておくためである。

ついでに述べるが、上の作用は、有限集合の場合にも同様に定義される。つまり、 $k$  文字の集合  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  の対称群  $\mathfrak{S}_k$  は  $T^k(\dot{V})$  上

$$(1.5.2) \quad x = \bigotimes_{0 \leq i \leq k-1} u_i$$

に対し、

$$(1.5.3) \quad \sigma(x) = \bigotimes_{0 \leq i \leq k-1} u_{\sigma^{-1}(i)}$$

として作用する。

(1.6) ここで、伊藤代数で重要な役割を果たす「ズラシ」 $\alpha$  を導入しておく：

$$(1.6.1) \quad \alpha(i) = i + 1 \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

これは  $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}}$  に属しているが、有限置換ではないので  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{Z})}$  には属していない。但し、この置換が引き起こす無限テンソル積の作用としては  $T^{(\infty)}$  上で定義される。また、 $\mathbb{N}$  への定義域の制限によって  $T^{[\infty]}$  上で定義される。もう一つの注意として、 $\alpha$  は  $\mathbb{N}$  上では双射ではない(単射ではあるが全射ではない)ので、その逆  $\alpha^{-1}$  は  $\mathbb{N}$  で閉じず、 $\alpha$  は  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  の元とは看做せない。このため  $\mathbb{N}$  だけの議論は、やや窮屈である。敢えて一見無駄に見える両側無限のテンソル積を定式化に組み込んだのは、その形式的不自由さを幾分か解消するためである。

(1.7) 単独の  $\alpha$  は  $\mathbb{N}$  上では多少不便だが、 $\alpha$  の共軛による  $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}}$  の「内部自己同型」

$$(1.7.1) \quad \alpha \sigma = \alpha \sigma \alpha^{-1} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}})$$

は、 $\mathfrak{S}_{(\mathbb{Z})}$  に制限でき、「自己同型」を与える。更にそれは  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  に制限することもできる。しかし、 $\alpha$  の逆は  $\mathbb{N}$  上で閉じないので、 $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  の「自己準同型」ではあるが「自己同型」とはならない。伊藤氏の定式化では、この最後の必要最低限なところだけを扱ったので、幾分ぎこちなさがある。

以下、 $\alpha$  の繰り返し作用について、 $\alpha^k \sigma$  では記号が見にくいので、代わりに、

$$(1.7.2) \quad \sigma^{[k]} = \alpha^k \sigma \alpha^{-k}$$

とも書く。

(1.8) 具体的に、置換  $\sigma$  を与えて  $\alpha \sigma$  がどうなるか計算してみよう。

$$(1.8.1) \quad \alpha \sigma \alpha^{-1}(i) = \alpha \sigma(i-1) = \sigma(i-1) + 1$$

なので、例えば  $\sigma$  が互換  $(p \ q)$  だったら  $\alpha \sigma = (p+1 \ q+1)$  となる。このように、働く文字を一つ正の向きにズラす作用になるのが  $\alpha \sigma$  である。その逆は、文字を一つ減らすわけだから、もし  $\sigma$  が  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  の場合には、逆の方は一般にその中で閉じないことになる。

因みに、これを繰り返せば

$$(1.8.2) \quad (p \ q)^{[k]} = (p+k \ q+k)$$

となる。ここで、 $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}}$  の中で考えれば、 $k$  は負でも構わない。

(1.9) ついでに  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}}$  による「共軛」が  $\dot{V}$  の上の線型変換  $A \in \text{End}(\dot{V})$  を第  $k$  成分に「埋め込んだ」作用素  $A_{(k)}$  に対して、どうなるか確認しておく：

$$(1.9.1) \quad \sigma A_{(k)} \sigma^{-1} = A_{(\sigma(k))}$$

特に、

$$(1.9.2) \quad \alpha A_{(k)} \alpha^{-1} = A_{(k+1)}$$

となる。また、本稿では使わないが、線型変換  $B \in \text{End}(\dot{V} \otimes \dot{V})$  を第  $kl$  成分に「埋め込んだ」作用素  $B_{(kl)}$  に対しては

$$(1.9.3) \quad \sigma B_{(kl)} \sigma^{-1} = B_{(\sigma(k)\sigma(l))}$$

となる。

(1.10) ここで、以下に頻出する巡回置換の記号  $C_k$  を導入しておく：

$$(1.10.1) \quad C_k(i) = \begin{cases} i+1 & 0 \leq i \leq k-1 \\ 0 & i = k \\ i & \text{otherwise} \end{cases}$$

或いは流布している Cauchy の記号で

$$(1.10.2) \quad C_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \cdots & k & 0 \end{pmatrix}$$

である。特に  $C_0$  は恒等置換であり、 $C_1$  は 0 と 1 との互換である。また、隣り合う互換  $s_i = s_0^{[i]} = (i \ i+1)$  を用いると

$$(1.10.3) \quad C_k = s_0 s_1 \cdots s_{k-1}$$

となる。また、cocycle 条件

$$(1.10.4) \quad C_{k+l} = C_k C_l^{[k]}$$

もこれらからすぐ判る。ちなみに

$$(1.10.5) \quad \rho_k = C_{k-1} C_{k-2} \cdots C_1$$

は  $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}_{\{0, \dots, k-1\}}$  を Weyl 群と看做したときの最長元であり、文字列  $(0, 1, \dots, k-1)$  の順番を反転する置換である。従って、 $\rho_k^{-1} = \rho_k$  である。また、

$$(1.10.6) \quad \rho_k = C_1^{[k-2]} C_2^{[k-3]} \cdots C_{k-1}$$

という書き方もできる。これは  $\tau$  が  $l-1$  以下の文字の置換であるとき (1.10.2) より

$$(1.10.7) \quad C_l \tau C_l^{-1} = \tau^{[l]}$$

ということに注意して (1.10.5) を変形すれば判る。つまり右から順に  $C_1, C_2, \dots$  を左に移して行くのに、この関係 (1.10.7) を繰り返し使えばよい。

## 2: 掛け算作用素 (Multiplication Operators)

既に仄めかしているが、実質的な主役は「片側」無限テンソル積の空間  $T^{[\infty]} = T^{[\infty]}(\dot{V})$  である。この「端」に新たな元を付け足すことで積という作用ができる。今は「両側」無限な世界に埋め込んでいるので、「端」とは正と負の添字の境目ということになる。

(2.1) まず、真空ベクトル  $e$  を消し、ベクトル  $u \in \dot{V}$  を生じさせる  $\text{End}(\dot{V})$  の元

$$(2.1.1) \quad u \otimes e^*$$

を思い出す。無限テンソル積の空間  $T^{[\infty]}$  では第  $-1$  成分は  $e$  なので、その元に

$$(2.1.2) \quad \begin{matrix} u \otimes e^* \\ (-1) \end{matrix}$$

を施すと、第  $-1$  成分は  $u$  に変わる。或いは、新たに  $u$  という成分が(外側に)付け加わったと考えてもよい。しかし、それは  $T^{[\infty]}$  に属さないので、一つ添字をズラしてやれば、「片側」テンソルの端に  $u$  がくっついた形になる。これが  $u \in \dot{V}$  による掛け算作用と考えられる。そこで定義として

$$(2.1.3) \quad M_u = \alpha \begin{matrix} (u \otimes e^*) \\ (-1) \end{matrix}$$

とする。これはまた

$$(2.1.4) \quad M_u = \begin{matrix} (u \otimes e^*) \\ (0) \end{matrix} \alpha$$

とも書けるが、こちらだと、先に一つズラしておいてから  $0$  番目に現われた  $e$  を  $u$  で置き換えるということになる。もちろん、どちらも作用として同じである。

今は定義ができるので一応  $u \in \dot{V}$  としたが、 $u = e$  ならば  $T^{[\infty]}$  上では  $M_e = \alpha$  となる。伊藤代数に関わるものを定義するには  $u \in V$  と制限する。

(2.2) この掛け算作用素は、一般に  $V$  上のテンソル代数  $T(V)$  に延長できる。つまり

$$(2.2.1) \quad T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$$

という斉次分解に応じて、 $x = u_0 \cdots u_{k-1} \in T^k(V)$  ( $u_i \in V$ ) をとると

$$(2.2.2) \quad M_x = M_{u_0} \cdots M_{u_{k-1}}$$

によって掛け算作用素を定義する。

(2.3) まず、掛け算作用素  $M_u$  ( $u \in V$ ) と  $N$  の一般の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  との交換関係を見る。この  $\sigma$  は 0 以上の添字にしか作用しないので  $u \otimes e^*$  とは可換である。よって

$$(2.3.1) \quad M_u \sigma = \alpha \underset{(-1)}{(u \otimes e^*)} \sigma = \alpha \sigma \underset{(-1)}{(u \otimes e^*)} = \alpha \sigma \alpha^{-1} \alpha \underset{(-1)}{(u \otimes e^*)} = \alpha \sigma M_u$$

つまり、ベクトルの掛け算作用素は、 $\mathfrak{S}_N$  の元に対して  $\alpha$  というズラシを施しながら交換するのである。より一般に  $x \in T^k(V)$  のときには、

$$(2.3.2) \quad M_x \sigma = \sigma^{[k]} M_x$$

となる。

(2.4) 次に、掛け算作用素の交換関係を見ておく。まず、例えば

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} M_u M_v &= \underset{(0)}{(u \otimes e^*)} \alpha \underset{(0)}{(v \otimes e^*)} \alpha \\ &= \underset{(0)}{(u \otimes e^*)} \alpha \underset{(0)}{(v \otimes e^*)} \alpha^{-1} \alpha^2 \\ &= \underset{(0)}{(u \otimes e^*)} \underset{(1)}{(v \otimes e^*)} \alpha^2 \end{aligned}$$

であるが、 $\text{End}(\dot{V})$  の元を埋め込む場所の異なるものは可換だから、

$$(2.4.2) \quad M_u M_v = \underset{(1)}{(v \otimes e^*)} \underset{(0)}{(u \otimes e^*)} \alpha^2$$

でもある。従って、また

$$(2.4.3) \quad \begin{aligned} s_0 M_v M_u s_{-2} &= s_0 \underset{(0)}{(v \otimes e^*)} \underset{(1)}{(u \otimes e^*)} \alpha^2 s_{-2} \\ &= s_0 \underset{(0)}{(v \otimes e^*)} \underset{(1)}{(u \otimes e^*)} \alpha^2 s_{-2} \alpha^{-2} \alpha^2 \\ &= s_0 \underset{(0)}{(v \otimes e^*)} \underset{(1)}{(u \otimes e^*)} s_0 \alpha^2 \\ &= \underset{(1)}{(v \otimes e^*)} \underset{(0)}{(u \otimes e^*)} \alpha^2 \end{aligned}$$

となる。つまり

$$(2.4.4) \quad s_0 M_v M_u s_{-2} = M_u M_v$$

となる。しかし、ここで  $s_{-2}$  は  $-2$  と  $-1$  の互換で、 $T^{[\infty]}$  上では恒等変換になる。よって

$$(2.4.5) \quad s_0 M_v M_u = M_u M_v$$

という交換関係が判る。

(2.5) 一般に, 上の (2.4.1) と同様の变形で,  $x = u_0 u_1 \cdots u_{k-1} \in T^k(V)$  に対して

$$(2.5.1) \quad M_x = \underset{(0)}{(u_0 \otimes e^*)} \underset{(1)}{(u_1 \otimes e^*)} \cdots \underset{(k-1)}{(u_{k-1} \otimes e^*)} \alpha^k$$

となる.

### 3: テンソル代数と無限置換群の融合代数

(3.1) 前節の, 掛け算作用素  $M_u$  ( $u \in V$ ) と無限置換群  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  で生成された  $\text{End}(T^{[\infty]})$  の部分環 (部分  $\mathbb{K}$  代数) を  $\mathcal{A}$  とする. 名前がないと不便なので, ここでは仮に「融合代数」と呼ぶことにする.

もう少し細かく見ると, 掛け算作用素の方は,

$$(3.1.1) \quad M_x \quad (x \in T(V))$$

という, テンソル代数  $T(V)$  に同型なものであり, 置換群の方は

$$(3.1.2) \quad \mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}_{\{0, \dots, k-1\}}$$

として, これら  $\mathfrak{S}_k$  の合併が  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  である. 掛け算作用素と置換の間の交換関係は既に見た

$$(3.1.3) \quad M_x \sigma = \sigma^{[k]} M_x \quad (x \in T^k(V))$$

以外に

$$(3.1.4) \quad \tau M_x = M_{\tau(x)} \quad (x \in T^k(V), \tau \in \mathfrak{S}_k)$$

もある. こちらは,  $\tau$  と  $x$  に制限が入っている点が (3.1.3) と違う. 式 (3.1.4) は意味を考えれば明らかだが, 形式的にも次のように示される:  $x = u_0 u_1 \cdots u_{k-1}$  のとき, (2.5.1) を用いて,  $\tau \in \mathfrak{S}_k$  に対して

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} & \tau M_x (\tau^{-1})^{[-k]} \\ &= \tau \underset{(0)}{(u_0 \otimes e^*)} \underset{(1)}{(u_1 \otimes e^*)} \cdots \underset{(k-1)}{(u_{k-1} \otimes e^*)} \alpha^k (\tau^{-1})^{[-k]} \\ &= \tau \underset{(0)}{(u_0 \otimes e^*)} \underset{(1)}{(u_1 \otimes e^*)} \cdots \underset{(k-1)}{(u_{k-1} \otimes e^*)} \tau^{-1} \alpha^k \\ &= \underset{(\tau(0))}{(u_0 \otimes e^*)} \underset{(\tau(1))}{(u_1 \otimes e^*)} \cdots \underset{(\tau(k-1))}{(u_k \otimes e^*)} \alpha^k \\ &= \underset{(0)}{(u_{\tau^{-1}(0)} \otimes e^*)} \underset{(1)}{(u_{\tau^{-1}(1)} \otimes e^*)} \cdots \underset{(k-1)}{(u_{\tau^{-1}(k-1)} \otimes e^*)} \alpha^k \\ &= M_{\tau(x)} \end{aligned}$$

であるが、左辺の  $(\tau^{-1})^{[-k]}$  は  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  の位置の置換  $\tau^{-1}$  で文字を  $k$  だけ負の方向に移動したのだから、結局  $\{-k, -k+1, \dots, -1\}$  の置換となって  $T^{[\infty]}$  への作用としては恒等写像として働く。よって (3.1.4) が示される。

この (3.1.4) で  $\tau = s_0$  とすると (2.4.5) になる。従って、これはその一般化である。しかしまた、逆に、(2.3.2) と (2.4.5) を繰り返し使えば (3.1.4) が出ることに注意しておきたい。

(3.2) さて、 $A$  に  $M_x$  の方の次数を考えることで graded algebra の構造を入れることができるが、その  $k$  次成分  $A^k$  とは

$$(3.2.1) \quad \sigma M_x \quad (x \in T^k(V), \sigma \in \mathfrak{S}_{(N)})$$

の形の線型結合である。これを  $\mathfrak{S}_{(N)}$  加群と見るとき、

$$(3.2.2) \quad A^k = \mathbb{K}\mathfrak{S}_{(N)} \otimes_{\mathbb{K}\mathfrak{S}_k} T^k(V)$$

という誘導表現の構造になっている。これらの直和に積構造が入るのは、最初の関係式 (3.1.3) によるのである。これがもともとの伊藤氏の定義を再現することになる。

#### 4: 融合代数の自己準同型

(4.1) 最初の (1.6) – (1.8) で、ズラシ  $\alpha$  が共軛で  $\mathfrak{S}_{(N)}$  に作用することを見た。つまり  $\alpha^{-1}$  は単独では  $N$  をはみ出すが、共軛という形で用いられると  $N$  上の置換を保つ。

これと類似のことを、掛け算作用素について見る。この場合は、より微妙なことに注意しなくてはならない。無限テンソル積空間  $T^{[\infty]}$  に作用するものとして (2.1.4) から

$$(4.1.1) \quad \alpha M_u \alpha^{-1} = \alpha \underset{(0)}{u \otimes e^*}$$

となるが

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} s_0 \alpha \underset{(0)}{u \otimes e^*} s_{-1} &= \alpha s_{-1} \underset{(0)}{u \otimes e^*} s_{-1} \\ &= \alpha \underset{(-1)}{u \otimes e^*} = M_u \end{aligned}$$

なので

$$(4.1.3) \quad \alpha M_u \alpha^{-1} = s_0 M_u s_{-1}$$

が得られる。これを  $T^{[\infty]}$  に作用させるとき、テンソルの第 0 成分が  $V$  の元の場合、定義に戻って計算すると、両辺とも 0 になる。一方、テンソルの第 0 成分が真空ベクトル  $e$  ならば  $s_{-1}$  はそのベクトルを変えない、つまり恒等変換となっている。従って、

$$(4.1.4) \quad \alpha M_u \alpha^{-1} = \begin{cases} s_0 M_u & \text{on } \alpha(T^{[\infty]}) = M_e T^{[\infty]} \\ 0 & \text{on } M_V T^{[\infty]} \end{cases}$$

となる。但し、 $M_V$  は  $M_v$  ( $v \in V$ ) の全体である。

注意：例えば (4.1.3) の右辺で  $s_{-1}$  は  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  に属していないので

$$M_u s_{-1} = s_{-1}^{[1]} M_u = s_0 M_u$$

などとやってはいけない。つまり、定義 (2.1.3) を見れば、 $M_u$  には  $\alpha$  以外に、第  $-1$  成分に作用する部分がある。この部分は  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  とは可換であるが、それをはみ出した置換とは可換ではないのである。

ここで、(4.1.3) の右から  $\alpha$  を掛ければ

$$(4.1.5) \quad \alpha M_u = s_0 M_u \alpha$$

が得られる。尤も、これは (2.4.5) で  $v = e$  としたのと同じなので (4.1.3) 等を経由しなくてよい。この (4.1.5) を繰り返すと、 $x \in T^k(V)$  のとき

$$(4.1.6) \quad \alpha M_x = s_0 s_1 \cdots s_{k-1} M_x \alpha = C_k M_x \alpha$$

となる。つまり、

$$(4.1.7) \quad {}^\alpha M_x = C_k M_x \quad (x \in T^k(V))$$

と置くと、

$$(4.1.8) \quad \alpha M_x = {}^\alpha M_x \alpha$$

が成り立つ。これは無限対称群  $\mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  の場合の

$$(4.1.9) \quad \sigma \mapsto {}^\alpha \sigma = \sigma^{[1]}$$

の対応物であったが、これと併せて、掛け算作用素に対する変換

$$(4.1.10) \quad M_x \mapsto {}^\alpha M_x = C_k M_x \quad (x \in T^k(V))$$

は、実は、 $A$  の環自己準同型を定義する。以下、これを見る。

(4.2) ここで、(4.1.3) の左辺は明らかに、 $\text{End}(T^{(\infty)})$  の環自己同型を定義しているが、右辺の右端には  $s_{-1}$  があるため  $A$  には属さない。この部分を落せば  $A$  に入る。問題は、それで準同型となるのかということだが、そうやっても構わないと考える根拠の半分は (4.1.5) であるが、このように「分母」を払ってしまうと、「一意性」を主張するには弱くなる。そこ

を解決するには、 $\alpha$  だけでなく、それを「内に」含んでいる、掛け算作用素  $M_\eta$  ( $\eta \in \dot{V}$ ) も同じ役割を果たすことに注意するとよい。つまり、(4.1.5) の代わりに (2.4.5) を思い出すと

$$(4.2.1) \quad M_\eta M_u = s_0 M_u M_\eta$$

であるから、(4.1.8) は

$$(4.2.2) \quad M_\eta M_x = {}^\alpha M_x M_\eta$$

と一般化され ( $\alpha = M_e$  に注意)、置換との交換関係も (2.3.1) から

$$(4.2.3) \quad M_\eta \sigma = {}^\alpha \sigma M_\eta$$

と書ける。

(4.3) 定理：融合代数  $\mathcal{A}$  の生成系の上で、

$$(4.3.1) \quad \sigma \mapsto {}^\alpha \sigma = \sigma^{[1]} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_{(\mathbb{N})})$$

$$(4.3.2) \quad M_x \mapsto {}^\alpha M_x = C_k M_x \quad (x \in T^k(V))$$

で定められた変換は  $\mathcal{A}$  の環自己準同型  $\mathcal{A} \ni f \mapsto {}^\alpha f \in \mathcal{A}$  として延長され

$$(4.3.3) \quad \alpha f = {}^\alpha f \alpha$$

及び、一般に任意の  $\eta \in \dot{V}$  に対して

$$(4.3.4) \quad M_\eta f = {}^\alpha f M_\eta$$

を満たす。

証明：まず任意の  $\eta \in \dot{V}$  に対して (4.3.4) を満たすような  ${}^\alpha f \in \mathcal{A}$  は  $f$  から一意に決まる。実際、 $g_1, g_2$  が

$$(4.3.5) \quad M_\eta f = g_1 M_\eta = g_2 M_\eta$$

を満たすなら  $(g_1 - g_2)M_\eta = 0$  となるが、 $\eta \in \dot{V}$  は任意に動くので  $g_1 - g_2 = 0$  でなくてはならない。この一意性と、(4.3.4) の形の乗法性から、 ${}^\alpha f$  が存在すれば、自己準同型となるのは明らかで、また生成元で (4.3.4) を満たすことは (4.2.1) と (4.2.2) で確かめられているので、存在も明らかである。

(4.4) 上では、 $\mathcal{A}$  を無限テンソル積に作用する環として実現し、自己準同型  $f \mapsto {}^\alpha f$  を考えた。それに対し、 $\mathcal{A}$  を抽象的に生成系と基本関係式で捉えることもできるし、伊藤氏も

そのような記述に言及している．そこで，(4.3.1) と (4.3.2) と基本的な交換関係との整合性を確かめておく．

まず，定義として，生成元  $f = \sigma M_x$  ( $\sigma \in \mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$ ,  $x \in T^k(V)$ ) の上では

$$(4.4.1) \quad \alpha f = \sigma^{[1]} C_k M_x$$

とする．基本的な交換関係との整合性の確認によって矛盾なく定義されていることは下で見ることにして，ここでは乗法性を先に確かめる．定義に戻り， $i = 1, 2$  として

$$(4.4.2) \quad f_i = \sigma_i M_{x_i} \quad (\sigma_i \in \mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}, x_i \in T^{k_i}(V))$$

に対して

$$(4.4.3) \quad f_1 f_2 = \sigma_1 \sigma_2^{[k_1]} M_{x_1 x_2}$$

だから，まず

$$(4.4.4) \quad \alpha(f_1 f_2) = \sigma_1^{[1]} \sigma_2^{[k_1+1]} C_{k_1+k_2} M_{x_1 x_2}$$

であり，他方

$$(4.4.5) \quad \begin{aligned} \alpha f_1 \alpha f_2 &= \sigma_1^{[1]} C_{k_1} M_{x_1} \sigma_2^{[1]} C_{k_2} M_{x_2} \\ &= \sigma_1^{[1]} C_{k_1} \sigma_2^{[k_1+1]} C_{k_2}^{[k_1]} M_{x_1} M_{x_2} \end{aligned}$$

である．ここで， $C_{k_1}$  は  $\{0, \dots, k_1\}$  の置換であり， $\sigma^{[k_1+1]}$  は  $k_1$  以上の文字の置換だから，動かす文字に共通部分がなく，互いに可換である．さらに，cocyle 条件 (1.10.4) を使えば

$$(4.4.6) \quad \sigma_1^{[1]} C_{k_1} \sigma_2^{[k_1+1]} C_{k_2}^{[k_1]} = \sigma_1^{[1]} \sigma_2^{[k_1+1]} C_{k_1} C_{k_2}^{[k_1]} = \sigma_1^{[1]} \sigma_2^{[k_1+1]} C_{k_1+k_2}$$

と (4.4.4) と (4.4.5) が等しいことが判る．

次に，(4.4.1) が生成元と基本関係式の観点から well-defined であるかどうか確かめる．論理的には，上と重複しているところもあるが，厭わず見ておく．基本的な交換関係は，対称群それ自体のもの以外に，掛け算作用と対称群の間の (2.3.2) と (2.4.5) であるが，少し一般の形で書けば (3.1.3) と (3.1.4) である．再録すると：

$$(4.4.7) \quad M_x \sigma = \sigma^{[k]} M_x \quad (x \in T^k(V)),$$

$$(4.4.8) \quad \tau M_x = M_{\tau(x)} \quad (x \in T^k(V), \tau \in \mathfrak{S}_k).$$

この両辺に  $\alpha$  を施した式は

$$(4.4.9) \quad C_k M_x \sigma^{[1]} = \sigma^{[k+1]} C_k M_x \quad (x \in T^k(V))$$

$$(4.4.10) \quad \tau^{[1]} C_k M_x = C_k M_{\tau(x)} \quad (x \in T^k(V), \tau \in \mathfrak{S}_k)$$

で、したがって、各々

$$(4.4.11) \quad C_k \sigma^{[k+1]} = \sigma^{[k+1]} C_k$$

$$(4.4.12) \quad \tau^{[1]} C_k = C_k \tau \quad (\tau \in \mathfrak{S}_k)$$

が示されればよいことになる。まず (4.4.11) は、上と同じく、 $C_k$  と  $\sigma^{[k+1]}$  は動かす文字に共通部分がないので互いに可換ということである。また、(4.4.12) は

$$(4.4.13) \quad \tau^{[1]} = C_k \tau C_k^{-1}$$

と書き直せるが、右辺の共軛の作用とは  $\tau$  の文字を  $C_k$  に従って (1.10.2) のように動かす置換となる。ところで  $\tau$  は  $k$  文字  $\{0, \dots, k-1\}$  の置換なので、 $k$  は現われず、 $C_k$  による共軛は丁度 1 だけ文字をズラすことになって、結果は  $\tau^{[1]}$  となる ((1.10.7) と同じ)。つまり (4.4.12) が判る。以上で、基本交換関係との整合性も確かめられた。

#### 5: 無限テンソル積に作用する微分、もしくは、偏極作用素

(5.1) 次に  $A$  に対する「微分」の導入に移る。まず  $V$  の双対の元  $v^* \in V^*$  に対して  $T^{[\infty]}$  の元を Leibniz rule によって「素直に」微分する作用素を定義する：

$$(5.1.1) \quad D_{v^*} = \sum_{k=0}^{\infty} e \otimes_{(k)} v^*$$

ここで  $e \otimes v^*$  とは  $\text{End}(\dot{V})$  の元であり、作用はベクトルを  $v^*$  で消して (スカラーにする) 代わりに真空ベクトル  $e$  を嵌め込むものである。ここで  $v^*$  は  $\dot{V}^*$  ではなく、 $V^*$  に限定しているので、 $\langle v^*, e \rangle = 0$  である。従って、 $T^{[\infty]}$  に作用するとき、定義は形式的に無限和でも、作用の結果は有限和になる。この作用素は一種の「偏極」(polarization) 作用素と言うべきであるが、より一般に  $\eta \in \dot{V}$  を取って

$$(5.1.2) \quad D_{v^*}^\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta \otimes_{(k)} v^*$$

を考えてもよい。

(5.2) まず注意したいのは、この微分と  $\sigma \in \mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  が可換ということである。実際、

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} \sigma D_{v^*} \sigma^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma (e \otimes_{(k)} v^*) \sigma^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e \otimes_{(\sigma(k))} v^* \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e \otimes_{(k)} v^* = D_{v^*} \end{aligned}$$

である。これは、一見余分なダミーの真空ベクトル  $e$  を微分の結果に差し込んでいるご利益である。その「御蔭」で、テンソル積の成分の番号が「記憶され」変化しないから置換と整合的なのである。

(5.3) 次に微分同士の交換関係を見る。定義より、

$$D_{v^*} D_{u^*} = \sum_{k,l=0}^{\infty} (e \otimes v^*)_{(k)} (e \otimes u^*)_{(l)}$$

であるが、各項で、作用する位置  $k$  と  $l$  が異なる場合は可換であり、位置が同じ  $k=l$  の場合は  $\langle v^*, e \rangle = 0$  に注意すると

$$(5.3.1) \quad (e \otimes v^*)_{(k)} (e \otimes u^*)_{(k)} = \langle v^*, e \rangle (e \otimes u^*)_{(k)} = 0$$

で、この順番を変えても同じく結果は 0 となって、全体として交換する。つまり、

$$(5.3.2) \quad D_{v^*} D_{u^*} = D_{u^*} D_{v^*}$$

となる。

(5.4) ついで、微分と掛け算の交換関係を調べる。定義により

$$(5.4.1) \quad \begin{aligned} D_{v^*} M_u &= \sum_{k=0}^{\infty} (e \otimes v^*)_{(k)} (u \otimes e^*)_{(0)} \alpha \\ &= \langle v^*, u \rangle (e \otimes e^*)_{(0)} \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (e \otimes v^*)_{(k)} (u \otimes e^*)_{(0)} \alpha \\ &= \langle v^*, u \rangle \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (e \otimes v^*)_{(k)} (u \otimes e^*)_{(0)} \alpha. \end{aligned}$$

但し、 $(e \otimes e^*)_{(0)} \alpha = \alpha$  は  $T^{[\infty]}$  への作用に対する等式で、 $\alpha$  で移した後の第 0 成分は必ず  $e$  となっていることから従う。一方、

$$(5.4.2) \quad \begin{aligned} M_u D_{v^*} &= \sum_{k=0}^{\infty} (u \otimes e^*)_{(0)} \alpha (e \otimes v^*)_{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (u \otimes e^*)_{(0)} (e \otimes v^*)_{(k+1)} \alpha \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (u \otimes e^*)_{(0)} (e \otimes v^*)_{(k)} \alpha \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (e \otimes v^*)_{(k)} (u \otimes e^*)_{(0)} \alpha. \end{aligned}$$

よって,

$$(5.4.3) \quad D_{v^*} M_u - M_u D_{v^*} = \langle v^*, u \rangle \alpha$$

である.

(5.5) ここで見た微分作用素の関係式は, 一般の偏極作用素に対しても, 殆どそのまま成立する. 証明は同様なので省略する. まず, 置換とは可換

$$(5.5.1) \quad \sigma D_{v^*}^{\eta} \sigma^{-1} = D_{v^*}^{\eta}$$

であり, 偏極作用素同士の交換関係は

$$(5.5.2) \quad D_{v^*}^{\eta} D_{u^*}^{\zeta} - D_{u^*}^{\zeta} D_{v^*}^{\eta} = \langle v^*, \zeta \rangle D_{u^*}^{\eta} - \langle u^*, \eta \rangle D_{v^*}^{\zeta}$$

と Lie 環でおなじみのものになる. 特に  $\eta, \zeta$  が  $u^*, v^*$  で消されるならば (5.3.2) と同じく可換となる. また, 掛け算作用素との交換関係は

$$(5.5.3) \quad D_{v^*}^{\eta} M_u - M_u D_{v^*}^{\eta} = \langle v^*, u \rangle M_{\eta}$$

となる.

## 6: 融合代数 $\mathcal{A}$ に対する微分

(6.1) 前節では,  $v^* \in V^*$  による微分  $D_{v^*}$  は無限テンソル積空間  $T^{[\infty]}$  に対して定義した. これを代数  $\mathcal{A}$  に対する微分として定義したい. そのヒントは, 通常の微分作用素と掛け算作用素の関係 (Leibniz rule)

$$(6.1.1) \quad Df - fD = D(f)$$

である. ここで  $D$  は 1 階の微分作用素 (derivation) であり,  $f$  は函数による掛け算作用素である. また  $D(f)$  は  $f$  を  $D$  で微分した函数で, それを掛け算作用素と看做している.

我々の場合も, 少しの修正を要するが, 類似の関係式によって  $D_{v^*}$  を  $\mathcal{A}$  上に定義することができる. ここで注意だが, 既に普通の微分の世界でも, 作用素の合成と函数への作用の記号が若干紛らわしいので, 以下では「微分された函数」に当たるものを書く際には  $D$  の代わりに記号  $\partial$  を用いて区別することにする. 以下  $v^* \in V^*$  を固定する.

**定理:** 融合代数の元  $f \in \mathcal{A}$  に対し

$$(6.1.2) \quad D_{v^*} f - f D_{v^*} = \partial_{v^*}(f) \alpha$$

及び、より一般に、任意の  $\eta \in \dot{V}$  に対して

$$(6.1.3) \quad D_{v^*}^\eta f - f D_{v^*}^\eta = \partial_{v^*}(f) M_\eta$$

を満たす  $\partial_{v^*}(f) \in \mathcal{A}$  がただ一つ存在する. この (6.1.3) に於いては右辺の  $\partial_{v^*}(f)$  は左辺の  $\eta$  に依らない ( $\eta$  は  $M_\eta$  として右に括り出されている). また,  $f \in \mathcal{A}^k$  のとき,  $D_{v^*}(f) \in \mathcal{A}^{k-1}$  と次数を 1 下げる.

証明: 一意性は (6.1.3) の要請による. 定理 (4.3) の一意性と同様である. 存在の方は, まず  $\mathcal{A}$  の生成元  $M_u$  と  $\sigma \in \mathfrak{S}_{(\mathbb{N})}$  に対しては, (5.4.3) と (5.2.1), 及び (5.5.3) と (5.5.1) から

$$(6.1.4) \quad \partial_{v^*}(M_u) = \langle v^*, u \rangle, \quad \partial_{v^*}(\sigma) = 0$$

と判る. ついで,  $f, g \in \mathcal{A}$  に対して存在すると仮定する. その積  $fg$  について

$$(6.1.5) \quad \begin{aligned} D_{v^*}^\eta fg - fg D_{v^*}^\eta &= D_{v^*}^\eta fg - f D_{v^*}^\eta g + f D_{v^*}^\eta g - D_{v^*}^\eta fg \\ &= (D_{v^*}^\eta f - f D_{v^*}^\eta)g + f(D_{v^*}^\eta g - g D_{v^*}^\eta) \\ &= \partial_{v^*}(f) M_\eta g + f \partial_{v^*}(g) M_\eta \\ &= \partial_{v^*}(f) {}^\alpha g M_\eta + f \partial_{v^*}(g) M_\eta \end{aligned}$$

となり, したがって

$$(6.1.6) \quad \partial_{v^*}(fg) = \partial_{v^*}(f) {}^\alpha g + f \partial_{v^*}(g)$$

とすれば存在が判る. 但し,  ${}^\alpha$  は定理 (4.3) で保証された  $\mathcal{A}$  の環自己準同型である. この捻った Leibniz rule により, 帰納的に存在が保証され, 定理が証明される. 次数に関する部分も, Leibniz rule から帰納的に判る.

(6.2) 融合代数に対する微分が定義されたところで, まず, 置換の左右の積と微分の交換関係を見ておく. テンソル積に作用する微分と置換とは可換であった (5.2.1) から, 定義にしたがって関係を見るのはやさしい. まず

$$(6.2.1) \quad \begin{aligned} \partial_{v^*}(\sigma f) \alpha &= D_{v^*} \sigma f - \sigma f D_{v^*} = \sigma D_{v^*} f - \sigma f D_{v^*} \\ &= \sigma (D_{v^*} f - f D_{v^*}) = \sigma \partial_{v^*}(f) \alpha \end{aligned}$$

だから

$$(6.2.2) \quad \partial_{v^*}(\sigma f) = \sigma \partial_{v^*}(f)$$

反対側からの積については

$$(6.2.3) \quad \begin{aligned} \partial_{v^*}(f \sigma) \alpha &= D_{v^*} f \sigma - f \sigma D_{v^*} = D_{v^*} f \sigma - f D_{v^*} \sigma \\ &= (D_{v^*} f - f D_{v^*}) \sigma = \partial_{v^*}(f) \alpha \sigma = \partial_{v^*}(f) {}^\alpha \sigma \alpha \end{aligned}$$

なので

$$(6.2.4) \quad \partial_{v^*}(f\sigma) = \partial_{v^*}(f) \alpha\sigma = \partial_{v^*}(f) \sigma^{[1]}$$

と自己準同型  $\alpha$  で捻られた形になる。

注意：(6.2.4) は  $\sigma$  を左に移して (6.2.2) に帰着させることもできる。念のため、それを見る。同次な  $x \in T^k(V)$  を以って  $f = M_x$  と取る。まず  $M_x \sigma = \sigma^{[k]} M_x$  なので

$$(6.2.5) \quad \partial_{v^*}(M_x \sigma) = \partial_{v^*}(\sigma^{[k]} M_x) = \sigma^{[k]} \partial_{v^*}(M_x).$$

この  $\sigma^{[k]}$  を  $\partial_{v^*}(M_x)$  を越えて右に移動するとき、 $\partial_{v^*}(M_x) \in T^{k-1}(V)$  と微分した結果、次数が 1 下がった差が残り

$$(6.2.6) \quad \sigma^{[k]} \partial_{v^*}(M_x) = \partial_{v^*}(M_x) \sigma^{[1]}$$

とずれが生じる。差は元の  $M_x$  の次数にはよらない (微分すると 1 次減るのは同次成分には無関係) なので、任意の  $f \in \mathcal{A}$  でも正しい。

(6.3) 次にいよいよ具体的に、 $\mathcal{A}$  の元  $\sigma M_x$  ( $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ ,  $x \in T^k(V)$ ) に対して微分の公式を見るが、(6.2.2) から  $\partial_{v^*}(M_x)$  が判ればよい。

上の定理の証明中にでてきた Leibniz rule (6.1.6) を繰り返し使うと

$$(6.3.1) \quad \begin{aligned} \partial_{v^*}(f_0 f_1 \cdots f_{k-1}) &= \partial_{v^*}(f_0) \alpha(f_1 \cdots f_{k-1}) \\ &+ f_0 \partial_{v^*}(f_1) \alpha(f_2 \cdots f_{k-1}) \\ &+ \cdots + \cdots + \cdots \\ &+ f_0 \cdots f_{k-2} \partial_{v^*}(f_{k-1}) \end{aligned}$$

が得られる。これを適用すればよいのであるが、記述のための記号を少し導入する： $u_i \in V$  として  $x = u_0 \cdots u_{k-1}$  のとき、 $0 \leq r \leq k-1$  に対し

$$(6.3.2) \quad x_{r-1] = u_0 \cdots u_{r-1}; \quad x_{[r+1} = u_{r+1} \cdots u_{k-1}$$

とし、また

$$(6.3.3) \quad x_{]r[} = x_{r-1]} x_{[r+1} = u_0 \cdots u_{r-1} u_{r+1} \cdots u_{k-1}$$

と置く。このとき Leibniz rule (6.3.2) とベクトルの掛け算の微分の式 (6.1.4) から

$$(6.3.4) \quad \begin{aligned} \partial_{v^*}(M_x) &= \sum_{r=0}^{k-1} \langle v^*, u_r \rangle M_{x_{r-1]} C_{k-1-r} M_{x_{[r+1}} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \langle v^*, u_r \rangle C_{k-1-r}^{[r]} M_{x_{]r[} \end{aligned}$$

となる。念のため、この巡回置換  $C_{k-1-r}^{[r]}$  を Cauchy の記号で書いてみると

$$(6.3.5) \quad C_{k-1-r}^{[r]} = \begin{pmatrix} r & r+1 & \cdots & k-2 & k-1 \\ r+1 & r+2 & \cdots & k-1 & r \end{pmatrix}$$

である。この (6.3.4) が、伊藤 [1] に於いては、微分の定義となっている。

(6.4) 以下、微分の作用のからむ交換関係を調べる。計算を明晰にするための記号として以下の常套手段を用いる。一般に、(単位元を有する結合的な) 環  $A$  に於いて、 $a \in A$  それ自身を左掛け算作用素と同一視して同じ記号で書く。それに対して、右掛け算を  $\overset{\circ}{a}$  と区別して書く。つまり、これら  $a, \overset{\circ}{a}$  は  $\text{End}(A)$  の元となっている。右掛け算であっても、作用は左から書くので  $(ab)^\circ = b^\circ a^\circ$  である。また、 $A$  が結合的であるから、左掛け算と右掛け算は元別に可換である。

そこで、例えば交換子積

$$(6.4.1) \quad x \mapsto (\text{ad } a)x = [a, x] = ax - xa$$

も作用される  $x$  を省いて

$$(6.4.2) \quad \text{ad } a = a - \overset{\circ}{a}$$

と簡明に書ける。

この記号法を以って、大きな環  $\text{End}(\text{End}(T^{[\infty]}))$  の中で計算する。微分の定義 (6.1.3) は、

$$(6.4.3) \quad \text{ad } D_{v^*}^\eta = D_{v^*}^\eta - \overset{\circ}{D}_{v^*}^\eta = \overset{\circ}{M}_\eta \partial_{v^*}$$

となる。但し、作用するものを  $\text{End}(T^{[\infty]})$  の部分である  $A$  に制限した式と看做している。

上の (6.2) で見た、置換と微分の交換関係も、この作用素レベルの等式として書ける：左掛け算の (6.2.2) と右掛け算の (6.2.4) は各々

$$(6.4.4) \quad \partial_{v^*} \sigma = \sigma \partial_{v^*}$$

$$(6.4.5) \quad \partial_{v^*} \overset{\circ}{\sigma} = (\overset{\circ}{\sigma})^\circ \partial_{v^*}$$

となる。また、Leibniz rule (6.1.6) を  $f, g$  の片方を掛け算作用素と看做して書き直せば

$$(6.4.6) \quad \partial_{v^*} f = \partial_{v^*}(f) \hat{\alpha} + f \partial_{v^*}$$

$$(6.4.7) \quad \partial_{v^*} \overset{\circ}{g} = (\overset{\circ}{g})^\circ \partial_{v^*} + \partial_{v^*}(g)^\circ$$

となる。但し、 $\hat{\alpha}$  は  $A$  の自己準同型  $\varphi \mapsto \alpha\varphi$  を表わす。特に (6.4.7) を  $g = M_\eta$  に用いると

$$(6.4.8) \quad \partial_{v^*} \overset{\circ}{M}_\eta = \overset{\circ}{M}_\eta \overset{\circ}{s}_0 \partial_{v^*} + \langle v^*, \eta \rangle$$

である。ついでに (6.4.6) で  $f = M_\eta$  とすると

$$(6.4.9) \quad \partial_{v^*} M_\eta = M_\eta \partial_{v^*} + \langle v^*, \eta \rangle \hat{\alpha}$$

である。ちなみに (6.4.6) は (6.1.2) とよく似た恰好である。

(6.5) さて、今からベクトル空間  $V$  に形式的なベクトル  $\eta_0, \eta_1, \dots$  を (必要があれば何箇でも) を付け加えて、偏極作用素に利用する (Kronecker 流)。それらは元の  $V$  や  $e$  と独立で、特に任意の  $v^* \in V^*$  で消されるものとする。キチンとするなら、形式ベクトルの空間を  $H$  として、 $V$  の代わりに  $V \oplus H$  をとり、直和分解に応じて  $\langle v^*, \eta \rangle = 0$  ( $v^* \in V^*, \eta \in H$ ) などとするのがよいが、煩わしいので、形式変数  $H$  も  $V$  の部分として既に入っているかのように看做す。

上の (6.4.3) から

$$(6.5.1) \quad \text{ad } D_{v_0^*}^{\eta_0} \text{ad } D_{v_1^*}^{\eta_1} \cdots \text{ad } D_{v_{k-1}^*}^{\eta_{k-1}} = \overset{\circ}{M}_{\eta_0} \partial_{v_0^*} \overset{\circ}{M}_{\eta_1} \partial_{v_1^*} \cdots \overset{\circ}{M}_{\eta_{k-1}} \partial_{v_{k-1}^*}$$

である。これは次のように書き換えられる。

**補題：条件**

$$(6.5.2) \quad \langle v_p^*, \eta_q \rangle = 0 \quad (0 \leq p, q \leq k-1)$$

の下、

$$(6.5.3) \quad \text{ad } D_{v_0^*}^{\eta_0} \text{ad } D_{v_1^*}^{\eta_1} \cdots \text{ad } D_{v_{k-1}^*}^{\eta_{k-1}} = \overset{\circ}{M}_{\eta_{k-1}} \cdots \overset{\circ}{M}_{\eta_1} \overset{\circ}{M}_{\eta_0} \partial_{v_0^*} \partial_{v_1^*} \cdots \partial_{v_{k-1}^*}$$

が成り立つ。

**証明：**式 (6.5.1) の右辺で右掛け算と微分を入れ替えるのに使う公式は (6.4.8) と (6.4.5)、及び基本的な (2.3.1) を右掛け算に読み直した

$$(6.5.4) \quad \overset{\circ}{\sigma} \overset{\circ}{M}_\eta = \overset{\circ}{M}_\eta (\sigma^{[1]})^\circ$$

である。ここで、見やすさのため、次のように略記する。

$$(6.5.5) \quad D_p = D_{v_p^*}^{\eta_p}, \quad \overset{\circ}{M}_p = \overset{\circ}{M}_{\eta_p}, \quad \partial_p = \partial_{v_p^*} \quad (1 \leq p \leq k-1)$$

まず、(6.4.8) と (6.4.5) だけを使って、微分を右に移動すると (6.5.1) の右辺は

$$(6.5.6) \quad \overset{\circ}{M}_0 \overset{\circ}{M}_1 \overset{\circ}{C}_1^{-1} \cdots \overset{\circ}{M}_{k-1} \overset{\circ}{C}_{k-1}^{-1} \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{k-1}$$

になる。以下の変形に2通り考えられるが、まず(6.5.4)を使って置換を右にまとめると

$$(6.5.7) \quad \overset{\circ}{M}_0 \overset{\circ}{M}_1 \cdots \overset{\circ}{M}_{k-1} (C_1^{[k-2]} \cdots C_{k-1})^{\circ-1} \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{k-1}$$

ここで置換の部分は(1.10.6)より、文字列 $(0, 1, \dots, k-1)$ の順を反転する $\rho_k$ となることが判る。ここで文字数の揃った場合の置換の作用を表わす(3.1.4)を右掛け算に読み直した

$$(6.5.8) \quad \overset{\circ}{M}_x \overset{\circ}{\tau} = \overset{\circ}{M}_{\tau(x)} \quad (x \in T^k(V), \tau \in \mathfrak{S}_k)$$

を $\tau = \rho_k$ として使うと掛け算の順が反転して、結論を得る。もう一つの方法は(6.5.6)そのまま、今の(6.5.8)を巡回置換として左から順次掛け算の順を入れ替えていくもので、それでも同じ結論に達する。この場合は(6.5.4)は使わなくてもよい。

(6.6) この補題を用いて、微分作用素の順序交換、或いは(3.1.4)や(6.5.8)の微分作用素対応物である関係が判る。

**定理：**次の等式が成り立つ。

$$(6.6.1) \quad \overset{\circ}{\tau}^{-1} \partial_{v_0^*} \partial_{v_1^*} \cdots \partial_{v_{k-1}^*} = \partial_{v_{\tau(0)}^*} \partial_{v_{\tau(1)}^*} \cdots \partial_{v_{\tau(k-1)}^*} \quad (\tau \in \mathfrak{S}_k)$$

或いは、(6.5.8)の記号に合わせて $\xi = v_0^* v_1^* \cdots v_{k-1}^* \in T^k(V^*)$ に対し

$$(6.6.2) \quad \partial_{\xi} = \partial_{v_0^*} \partial_{v_1^*} \cdots \partial_{v_{k-1}^*}$$

と置くとき

$$(6.6.3) \quad \overset{\circ}{\tau}^{-1} \partial_{\xi} = \partial_{\tau(\xi)}$$

となる。

**証明：**略記法(6.5.5)を用いることにして、補題(6.5)

$$(6.6.4) \quad \text{ad } D_0 \text{ ad } D_1 \cdots \text{ad } D_{k-1} = \overset{\circ}{M}_{k-1} \cdots \overset{\circ}{M}_1 \overset{\circ}{M}_0 \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{k-1}$$

から出発する。左辺では条件(6.5.2)の下、(5.5.2)によって、現れている $\text{ad } D_p$ の形の元は互いに可換である。従って左辺で積の順序を自由に入れ替えてよい。それが右辺に反映して任意の $\tau \in \mathfrak{S}_k$ に対し

$$(6.6.5) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{M}_{\tau(k-1)} \cdots \overset{\circ}{M}_{\tau(1)} \overset{\circ}{M}_{\tau(0)} \partial_{\tau(0)} \partial_{\tau(1)} \cdots \partial_{\tau(k-1)} \\ = \overset{\circ}{M}_{k-1} \cdots \overset{\circ}{M}_1 \overset{\circ}{M}_0 \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{k-1} \end{aligned}$$

が得られる. ここで左辺は (6.5.8) より

$$(6.6.6) \quad (\overset{\circ}{M}_{k-1} \cdots \overset{\circ}{M}_1 \overset{\circ}{M}_0) \overset{\circ}{\tau} \partial_{\tau(0)} \partial_{\tau(1)} \cdots \partial_{\tau(k-1)}$$

となるので (6.6.5) の右辺と比べて

$$(6.6.7) \quad \begin{aligned} (\overset{\circ}{M}_{k-1} \cdots \overset{\circ}{M}_1 \overset{\circ}{M}_0) \overset{\circ}{\tau} \partial_{\tau(0)} \partial_{\tau(1)} \cdots \partial_{\tau(k-1)} \\ = (\overset{\circ}{M}_{k-1} \cdots \overset{\circ}{M}_1 \overset{\circ}{M}_0) \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{k-1} \end{aligned}$$

ここで形式的ベクトル  $\eta_0, \dots, \eta_{k-1}$  はもとの  $V$  に無縁にとっているのです, この式は

$$(6.6.8) \quad \overset{\circ}{\tau} \partial_{\tau(0)} \partial_{\tau(1)} \cdots \partial_{\tau(k-1)} = \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{k-1}$$

を導き, 定理の結論を得る.

## 7: まとめ

以上で, テンソル代数と無限対称群の融合した代数, 及び, その上の微分作用素の実現が, しかるべき交換関係を満たしていることが示された. 微分作用素まで込めて, Weyl algebra や Clifford algebra の拡張になっているものを実現するのに, 伊藤氏の定式化では, 左掛け算を用いたが, 我々の場合は右掛け算の代数  $\mathcal{A}^\circ = \{f^\circ; f \in \mathcal{A}\}$  を用いるとよい. その場合に関係のある公式は (6.4.5), (6.4.7), (6.4.8), (6.5.4), (6.5.8), (6.6.1) などであってそこで閉じた世界を作る. 普通は, 右掛け算より左掛け算の方が自然なので, そちらを主体にするならば, もとの伊藤氏の定式化のように, 最初のテンソル積に作用する部分を右作用として出発するとよい. 本稿は, そのあたりの選択の理由をはっきりさせることも目的の一つとしていた.

しかしまた, ここで述べたことは, 伊藤氏の代数の再現のみを目的としたのではなくて, より広い枠組みから, 定式化の意味を明瞭にすることがあった. 例えば, 上で注意したように,  $\mathcal{A}$  の右掛け算の代数  $\mathcal{A}^\circ$  が, 左掛け算と対になって自然に現れることや, 微分に関する (捻った) Leibniz rule, またその記述のための, 環自己準同型などの導入などは, 伊藤代数を理解する上に役に立つだろう.

この定式化を基に, さらに考察を発展させることはできるだろうし, 他の応用もあると思う. 例えば, ここに出てきた Leibniz rule は, 差分に関するものと類似している (一般には自己同型を用いた差分でよい). ついでにここで現れている自己「準」同型は何となく Frobenius 写像と似ているのではないかという印象を記しておく. また, 既に伊藤氏が手を付けている  $q$ -analogue [5] もこの枠組みで考えられるだろう. 他にコメントしておきたいことはいくつもあがあるが, 今回はこの段階の報告ということで, ひとまず筆を擱く.

## 文献

- [1] Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their applications, preprint 2009. arXiv:0909.5586.
- [2] Minoru Itoh, On extensions of the tensor algebra, Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis. Mathematics for Innovation in Industry and Science (edited by Gerrit van Dijk and Masato Wakayama), de Gruyter., to appear.
- [3] 伊藤稔, テンソル代数の拡張とその immanant への応用, 表現論シンポジウム 2008 講演集 (平成 20 年 11 月 11 日~11 月 14 日) 114-125.
- [4] 伊藤稔, テンソル代数の拡張とその応用, 第 54 回代数学シンポジウム報告集 (2009 年 8 月 3 日~8 月 6 日 於 明治大学), 245-254.
- [5] 伊藤稔, テンソル代数上の微分の  $q$  類似と  $q$ -Schur-Weyl duality, 数理解析研究所講究録「等質空間と非可換調和解析」to appear.