数理解析研究所講究録
第 1722 巻 2010 年 117-125

極小有界等質代表領域上の Bergman 空間における Toeplitz 作用素の有界性

名古屋大学 多元数理科学研究科 山路哲史 (Satoshi Yamaji)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1 序

Harish-Chandra 実現された有界対称領域上の Bergman 空間において，有限正 Borel 測度を表象とする Toeplitz 作用素が有界作用素となるための条件は Zhu[12] による結果が知られている．この結果を極小有界等質領域に関して拡張する．

なお，講演では有界等質代表領域に関して拡張を行ったが，その後の研究で極小有界等質領域まで拡張できることがわかった．有界等質代表領域は極小有界等質領域であることが知られている ([7]).

1.1 Bergman 空間

$\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ を有界領域と正則同値な領域，dV を Lebesgue 測度とする．Lebesgue 測度に関して二乗可積分かつ正則な関数からなる空間を $L^2_a(\mathcal{U})$ とする．$L^2_a(\mathcal{U})$ は $L^2(\mathcal{U})$ の閉部分空間となり，$L^2(\mathcal{U})$ から $L^2_a(\mathcal{U})$ への直交射影 P は，ある関数 $K_z \in L^2_a(\mathcal{U})$ $(z \in \mathcal{U})$ を用いて $Pf(z) = \langle f, K_z \rangle$ とかける．$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ 上の関数 $K_{\mathcal{U}}(z,w) := \overline{K_z(w)}$ を $\mathcal{U}$ の Bergman 核という．例えば，単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ の Bergman 核は $K_{\mathbb{D}}(z,w) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}$，上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ の Bergman 核は $K_{\mathbb{H}}(z,w) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{i}{z-\overline{w}}\right)^2$ である．

1.2 Toeplitz 作用素

$u \in L^\infty(\mathcal{U})$ に対し，$L^2_a(\mathcal{U})$ 上の Toeplitz 作用素 T_u を

$$T_u f = P(uf) \quad (f \in L^2_a(\mathcal{U}))$$

で定義する．このとき，Bergman 核の定義から

$$T_u f(z) = \langle uf, K_z \rangle = \int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}(z,w) f(w) u(w)\, dV(w).$$

が成立することがわかる．この T_u を一般化した作用素を考える．すなわち，$\mathcal{U}$ 上の複素 Borel 測度 μ と $f \in L_a^2(\mathcal{U})$ に対し，測度 μ を表象にもつ Toeplitz 作用素 T_μ を

$$T_\mu f(z) = \int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}(z,w) f(w)\, d\mu(w)$$

で定義する．

1.3 主定理

1988 年，Zhu[12] は $\mathcal{U}$ が有界対称領域の Harish-Chandra 実現で，μ が $\mathcal{U}$ 上の有限正 Borel 測度のとき，Toeplitz 作用素 T_μ の有界性を測度の Carleson 性や Berezin 変換及び平均関数と呼ばれる関数の有界性によって特徴づけた．この結果が極小有界等質領域においても成立することを述べる．

定理. $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ を極小有界等質領域，μ を $\mathcal{U}$ 上の正 Borel 測度とする．$r > 0$ に対し，$\mathcal{U}$ 上の関数 $\widetilde{\mu}, \widehat{\mu}$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}(z) &:= \|k_z\|^2_{L^2(d\mu)}, \\ \widehat{\mu}(z) &:= \frac{\mu(B(z,r))}{\mathrm{Vol}\,(B(z,r))} \end{aligned}$$

で定義する．ここで，k_z は正規化した Bergman 核 (つまり，$k_z = K_{\mathcal{U}}(z,z)^{-1/2} K_z$)，$B(z,r)$ は中心 z，半径 r の Bergman 円板とする．このとき，以下は同値である．
(a) T_μ は $L_a^2(\mathcal{U})$ 上の有界作用素である．
(b) Berezin 変換 $\widetilde{\mu}(z)$ が $\mathcal{U}$ 上の有界関数である．
(c) すべての $p \geq 1$ で μ は $L_a^p(\mathcal{U})$ に関する Carleson 測度である．
(d) 平均関数 $\widehat{\mu}(z)$ が $\mathcal{U}$ 上の有界関数である．

2 定義

2.1 極小有界等質領域

まずは複素領域に関する定義を述べる．$\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ を有界領域とする．有界対称領域，有界等質領域とは以下を満たす領域のことである．

- $\mathcal{U}$ 内の任意の点 a に対し，$s_a \circ s_a = id$ かつ a を孤立固定点とする $\mathcal{U}$ 上の双正則写像 s_a が存在するとき，$\mathcal{U}$ は有界対称領域であるという．
- $\mathcal{U}$ 内の任意の点 a, b に対し，$\varphi(a) = b$ を満たす $\mathcal{U}$ 上の双正則写像 φ が存在するとき，$\mathcal{U}$ は有界等質領域であるという．

極小領域とは，次を満たす領域のことである．

- $\det J(\psi, t) = 1$ を満たす任意の双正則写像 $\psi : D \longrightarrow D'$ に対し $\mathrm{Vol}\,(D) \leq \mathrm{Vol}\,(D')$ が成立するとき，D は t を中心とする極小領域であるという．

有界領域が極小領域であるための必要十分条件として，次が知られている．

命題 2.1 ([7, Proposition 3.6], [10, Theorem 3.1])．$D \subset \mathbb{C}^n$ を有界領域とし，$t \in D$ とする．このとき，D が中心 t の極小領域であることは，すべての $z \in D$ で

$$K_D(z, t) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)}$$

が成立することと同値である．

例えば，単位円板 $\mathbb{D}$ の Bergman 核は $K_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}$ なので $\mathbb{D}$ は 0 を中心とする極小領域である．また，Harish-Chandra 実現された有界対称領域，及びそれの等質領域への拡張にあたる有界等質代表領域も 0 を中心とする極小領域であることが知られている ([7, Proposition 3.8])．任意の有界等質領域は有界等質代表領域と正則同値である．したがって，すべての有界等質領域は極小領域と正則同値であることがわかる．

以下，$\mathcal{U}$ を極小有界等質領域とする．

2.2 Berezin 変換

$L^2_a(\mathcal{U})$ 上の有界作用素 T に対し，$\mathcal{U}$ 上の関数 $\widetilde{T}$ を

$$\widetilde{T}(z) := \langle Tk_z, k_z \rangle \quad (z \in \mathcal{U})$$

で定義する．$\widetilde{T}(z)$ は作用素 T の Berezin 変換と呼ばれる．また，$\mathcal{U}$ 上の Borel 測度 μ に対し，$\mathcal{U}$ 上の関数 $\widetilde{\mu}$ を

$$\widetilde{\mu}(z) := \int_{\mathcal{U}} |k_z(w)|^2 \, d\mu(w)$$

で定義する．$\widetilde{\mu}(z)$ は測度 μ の Berezin 変換と呼ばれる．ここで，Toeplitz 作用素 T_μ が $L^2_a(\mathcal{U})$ 上の有界作用素であるとき，再生性から

$$\widetilde{T_\mu}(z) = \langle T_\mu k_z, k_z \rangle = \frac{1}{K_{\mathcal{U}}(z, z)^{1/2}} T_\mu k_z(z)$$

が成立する．右辺は

$$\frac{1}{K_{\mathcal{U}}(z,z)^{1/2}}\int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}(z,w)k_z(w)\,d\mu(w)=\int_{\mathcal{U}}|k_z(w)|^2\,d\mu(w)$$

なので，

$$\widetilde{T_\mu}(z)=\widetilde{\mu}(z) \tag{2.1}$$

となることがわかる．

2.3 Carleson 測度

μ を $\mathcal{U}$ 上の正 Borel 測度，$p\geq 1$ とする．次を満たす正の定数 M が存在するとき，μ は $L^p_a(\mathcal{U})$ に関する Carleson 測度であるという：すべての $f\in L^p_a(\mathcal{U})$ に対し，

$$\int_{\mathcal{U}}|f(z)|^p\,d\mu(z)\leq M_\mu\int_{\mathcal{U}}|f(z)|^p\,dV(z)$$

が成立する．μ が $L^p_a(\mathcal{U})$ の Carleson 測度であることは，$L^p_a(\mathcal{U})\subset L^p_a(\mathcal{U},d\mu)$ で包含写像

$$i_p: L^p_a(\mathcal{U})\longrightarrow L^p_a(\mathcal{U},d\mu)$$

が有界作用素であることと同値である．

2.4 Positive Bergman operator の有界性

主定理における $(c)\Longrightarrow(a)$ を示すために，positive Bergman operator と呼ばれる $L^2(\mathcal{U},dV)$ 上の作用素 $P^+_{\mathcal{U}}$ を以下で定義する．

$$P^+_{\mathcal{U}}g(z):=\int_{\mathcal{U}}|K_{\mathcal{U}}(z,w)|\,g(w)\,dV(w)\quad\text{for}\quad g\in L^2(\mathcal{U},dV). \tag{2.2}$$

ここでは $P^+_{\mathcal{U}}$ が $L^2(\mathcal{U},dV)$ 上の有界作用素であることを示す．

積分核を持つ作用素の有界性を論じる際に用いられる手法の一つに Schur の定理 (cf. [13, Theorem 3.6]) がある．これを用いると

$$\int_{\mathcal{U}}|K_{\mathcal{U}}(z,w)|\,h(w)\,dV(w)\leq Ch(z) \tag{2.3}$$

を満たす $\mathcal{U}$ 上の正値関数 h を一つ見つければよいことがわかる．$\mathcal{U}$ が対称領域の場合，Zhu および Engliš は Forelli-Rudin 不等式を用いてこの関数を構成している (cf. [13, Theorem 7.5], [4, Proposition 8])．しかし，この方法を有界等質代表領域で考えることは難しい．

一方，等質 Siegel 領域 $\mathcal{D}$ 上の Bergman 空間における positive Bergman operator $P^+_{\mathcal{D}}$ の有界性は Békollé,Kagou により示されている ([2])．

定理 2.2 ([2, Theorem II.7]). $P_{\mathcal{D}}^{+}$ は $L^2(\mathcal{D}, dV)$ 上の有界作用素である.

実際，等質 Siegel 領域においては Schur の定理の仮定を満たす正値関数が構成できるため，定理 2.2 が得られる.

有界等質領域は Siegel 領域と正則同値であることが知られている. Φ を $\mathcal{U}$ から $\mathcal{D}$ への双正則写像とする. このとき，$L^2(\mathcal{U}, dV)$ から $L^2(\mathcal{D}, dV)$ への写像 U_Φ を

$$U_\Phi f(\zeta) := f(\Phi^{-1}(\zeta)) \left|\det J(\Phi^{-1}, \zeta)\right|$$

で定義する. U_Φ は $(U_\Phi)^{-1} = U_{\Phi^{-1}}$ を満たすユニタリ作用素である. また,

$$P_{\mathcal{U}}^{+} \circ U_\Phi = U_\Phi \circ P_{\mathcal{D}}^{+}$$

が成立する. したがって，$P_{\mathcal{U}}^{+}$ が $L^2(\mathcal{U}, dV)$ 上の有界作用素であることと $P_{\mathcal{D}}^{+}$ が $L^2(\mathcal{D}, dV)$ 上の有界作用素であることは同値である.

以上を補題としてまとめておく.

補題 2.3. $P_{\mathcal{U}}^{+}$ は $L^2(\mathcal{U}, dV)$ 上の有界作用素である.

3 極小有界等質領域の Bergman 核の評価

Toeplitz 作用素の有界性を調べる際，Zhu は領域を Bergman 円板で分割し，各円板上で積分の評価を行うという手法を用いた. 領域の分割に関しては対称性は用いられておらず等質性のみで行うことが出来るので，極小有界等質領域 $\mathcal{U}$ についても次が成り立つ.

補題 3.1 ([1, Lemma 5]). 次の条件 $(S1)$ から $(S3)$ を満たす点列 $\{w_j\} \subset \mathcal{U}$ が取れる：

$(S1)$ $\mathcal{U} = \cup_{j=1}^{\infty} B(w_j, r)$.

$(S2)$ $B(w_i, r/4) \cap B(w_j, r/4) = \emptyset$.

$(S3)$ 次を満たす N がとれる：各 $z \in \mathcal{U}$ が含まれる $B(w_j, 2r)$ は N 枚以下.

各円板上で積分の評価を行う際，以下の定理が重要な役割を果たす. 定理 3.2 は伊師英之氏との共同研究により得られたものである.

定理 3.2 ([8, Theorem 1.1]). 任意の $r > 0$ に対し，$C_r > 0$ を次が満たすようにとれる：$\beta_{\mathcal{U}}(z, a) \leq r$ を満たすすべての $z, a \in \mathcal{U}$ に対し,

$$C_r^{-1} \leq \left|\frac{K_{\mathcal{U}}(z, a)}{K_{\mathcal{U}}(a, a)}\right| \leq C_r$$

が成立する. $\beta_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}$ の Bergman 距離を表すとする.

Harish-Chandra 実現された有界対称領域 Ω の Bergman 核 $K_\Omega(z_1, z_2)$ はコンパクト集合 $B(0,r) \times \overline{\Omega}$ 上の連続関数として拡張できるので，定理 3.2 は容易に証明することが出来る．しかし，極小有界等質領域がこの性質を持つかはわからない．そのため，以下を利用する．

定理 3.3 ([8, Theorem 1.2]). $\mathcal{U}$ の階数を r とする．$1 \leq j \leq r$ に対し，$n_j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ から階数 n_j の Siegel 円板 $\mathcal{U}_{n_j}$ への正則写像 θ_j，$s_j \in \mathbb{R}$ を次が成り立つようにとれる：

$$K_{\mathcal{U}}(z, z') = C \prod_{j=1}^{r} K_{\mathcal{U}_{n_j}}(\theta_j(z), \theta_j(z'))^{s_j} \quad ({}^\forall z, z' \in \mathcal{U}).$$

ここで、Siegel 円板は有界対称領域である．各 $K_{\mathcal{U}_{n_j}}$ を評価することで極小有界等質領域の Bergman 核の評価を行う．これにより得られる定理 3.2 の評価式を用いる事で，有界対称領域においた考察する際に Zhu が用いた以下の補題は極小有界等質領域においても成立することがわかる．

補題 3.4 ([11, Lemma 3.3]). 次を満たす定数 M_r がとれる：$\beta(z,a) \leq r$ を満たす任意の $z, a \in \mathcal{U}$ に対し，

$$M_r^{-1} \leq |k_a(z)|^2 \operatorname{Vol}(B(a,r)) \leq M_r$$

が成立する．

補題 3.5 ([11, Lemma 3.5]). 次を満たす $C > 0$ がとれる：任意の $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, $p \geq 1, a \in \mathcal{U}$ に対し，

$$|f(a)|^p \leq \frac{C}{\operatorname{Vol}(B(a,r))} \int_{B(a,r)} |f(z)|^p \, dV(z)$$

が成立する．

これらの補題を用いて Zhu と同様の証明を行うことによって Carleson 測度に関する次の定理が示せる．これは主定理における (c) と (d) の同値性を意味する．

定理 3.6 ([12, Theorem 7]). μ を $\mathcal{U}$ 上の正の Borel 測度とし，$p \geq 1$ とする．このとき，μ が $L^p_a(\mathcal{U})$ に関する Carleson 測度であることは

$$\sup_{a \in \mathcal{U}} \frac{\mu(B(a,r))}{\operatorname{Vol}(B(a,r))} < \infty$$

となることと同値である．

4 主定理の証明

定理 3.6 で $(c) \Longleftrightarrow (d)$ が得られたため，ここでは $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (d)$ と $(c) \Longrightarrow (a)$ を示す．

$(a) \Longrightarrow (b)$ に関しては T_μ は有界作用素なので (2.1) より

$$\widetilde{\mu}(z) = \widetilde{T_\mu}(z) = |\langle T_\mu k_z, k_z\rangle| \leq \|T_\mu\| \, \|k_z\|^2 = \|T_\mu\| < \infty$$

となる．

次に $(b) \Longrightarrow (d)$ を述べる．補題 3.4 より，

$$M_r^{-1} \leq |k_z(w)|^2 \operatorname{Vol}(B(z,r))$$

が成立する．この式を $B(z,r)$ 上 w に関して μ で積分すると

$$M_r^{-1} \int_{B(z,r)} d\mu(w) \leq \operatorname{Vol}(B(z,r)) \int_{B(z,r)} |k_z(w)|^2 \, d\mu(w)$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned} \frac{\mu(B(z,r))}{\operatorname{Vol}(B(z,r))} &\leq M_r \int_{B(z,r)} |k_z(w)|^2 \, d\mu(w) \\ &\leq C \, \|k_z\|^2_{L^2(d\mu)} = M_r \, \widetilde{\mu}(z) \end{aligned}$$

となるので $\widehat{\mu}(z) \leq M_r \, \widetilde{\mu}(z)$ を得る．ゆえに $\widehat{\mu}(z)$ は $\mathcal{U}$ 上の有界関数である．

最後に，$(c) \Longrightarrow (a)$ を示す．任意の $f \in L^2_a(\mathcal{U})$ に対し，

$$\begin{aligned} \|T_\mu f\|_2^2 &= \int_{\mathcal{U}} \left| \int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}(z,w) f(w) \, d\mu(w) \right|^2 dV(z) \\ &\leq \int_{\mathcal{U}} \left(\int_{\mathcal{U}} |K_{\mathcal{U}}(z,w)| \, |f(w)| \, d\mu(w) \right)^2 dV(z) \\ &= \int_{\mathcal{U}} \left(\int_{\mathcal{U}} |F_z(w)| \, d\mu(w) \right)^2 dV(z) \end{aligned} \tag{4.1}$$

が成立する．ここで，$F_z(w) := \overline{K_{\mathcal{U}}(z,w)} f(w)$ とおいた．このとき，$\overline{K_{\mathcal{U}}(z,\cdot)} \in L^2_a(\mathcal{U})$ なので $F_z \in L^1_a(\mathcal{U})$ となる．ここで，μ は Carleson 測度なので，正の定数 M_μ が存在し，

$$\int_{\mathcal{U}} |F_z(w)| \, d\mu(w) \leq M_\mu \int_{\mathcal{U}} |F_z(w)| \, dV(w) \tag{4.2}$$

とできる．Carleson 測度の定義から M_μ は z によらないことを注意しておく．(4.1) と (4.2) より

$$\|T_\mu f\|_2^2 \leq M_\mu^2 \int_{\mathcal{U}} \left(\int_{\mathcal{U}} |K_{\mathcal{U}}(z,w)| \, |f(w)| \, dV(w) \right)^2 dV(z) \tag{4.3}$$

が成り立つ．ここで，$f^+(z) := |f(z)|$ とおくと (4.3) の右辺は $M_\mu^2 \left\|P_{\mathcal{U}}^+ f^+\right\|_2^2$ とかける．定理 2.3 より，$P_{\mathcal{U}}^+$ は有界作用素なので

$$\|T_\mu f\|_2 \leq M_\mu \left\|P_{\mathcal{U}}^+ f^+\right\|_2 \leq M_\mu \left\|P_{\mathcal{U}}^+\right\| \|f\|_2$$

となる．

次に $T_\mu f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ を示す．すでに $T_\mu f \in L^2(\mathcal{U})$ を示したので，すべての $g \in L_a^2(\mathcal{U})^\perp$ に対し $\langle T_\mu f, g\rangle = 0$ となることをいえばよい．これは

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu f, g\rangle &= \int_{\mathcal{U}} \left\{\int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}(z,w) f(w)\, d\mu(w)\right\} \overline{g(z)}\, dV(z) \\
&= \int_{\mathcal{U}} \overline{\left\{\int_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}}(w,z) g(z)\, dV(z)\right\}} f(w)\, d\mu(w) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

より従う．ここで，

$$\int_{\mathcal{U}}\int_{\mathcal{U}} |K_{\mathcal{U}}(w,z) g(z) f(w)|\, d\mu(w) dV(z) \leq M_\mu \left\|P_{\mathcal{U}}^+\right\| \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty,$$

なので Fubini の定理より，(4.4) における積分の順序交換は可能である．

以上より T_μ は $L_a^2(\mathcal{U})$ 上の有界作用素である．

参考文献

[1] D. Békollé, C. A. Berger, L. A. Coburn, K. H. Zhu, *BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains*, J. Funct. Anal., **93**, (1990), no.2, 310-350.

[2] D. Békollé, A. T. Kagou, *Reproducing properties and L^p-estimates for Bergman projections in Siegel domains of type II.* , Studia. Math. **115**, (1995), 219-239.

[3] C. A. Berger, L. A. Coburn, K. H. Zhu, *Function theory on Cartan domains and the Berezin-Toeplitz symbol calculus*, Amer. J. Math,, **110**, (1988), 921-953.

[4] M. Engliš, *Compact Toeplitz operators via the Berezin transform on bounded symmetric domains*, Integr. Equ. Oper. Theory, **20**, (1999), 426-455.

[5] L. K. Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex valiables on the classical domains*, Amer. Math. Soc., Providence, 1963

[6] H. Ishi, *On symplectic representations of normal j-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains.* Differential Geom. Appl., **24** (2006), no.6, 588–612.

[7] H. Ishi, C. Kai, *The representative domain of a homogeneous bounded domain*, Kyushu J. Math. **64**, (2010), 35-47.

[8] H. Ishi, S. Yamaji, *Some estimates of the Bergman kernel of minimal bounded homogeneous domains*, preprint.

[9] S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings An introduction (second edition)*, World Sci., 2005.

[10] M. Maschler, *Minimal domains and their Bergman kernel function*, Pacific J. Math. **6**, (1956), 501-516.

[11] S. Yamaji, *Positive Toeplitz operators on the Bergman space of a minimal bounded homogeneous domain*, preprint.

[12] K. H. Zhu, *Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains*, J. Oper. Theory, **20**, (1988), 329-357.

[13] K. H. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces, second edition*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs Vol.**138**, 2007.