

ヘンリー・ブリッグスの『対数算術』と『数理精蘊』の対数部分について —会田安明『対数表起源』との関連を含めて—

RIMS 研究集会「数学史の研究」 於京都大学 数理解析研究所
2010 年 8 月 26 日発表

横塚啓之

1 はじめに

対数が江戸時代の日本へ伝来したのは、中国の『数理精蘊』と蘭書によるといわれている。その『数理精蘊』はイギリスのヘンリー・ブリッグス (Henry Briggs, 1561–1630¹) の *Arithmetica logarithmica* (『対数算術』1624) をオランダ人のアドリアーン・フラック (Adriaan Vlacq, 1600 頃–1667 頃) が編集した 1628 年の第二版の内容を多く取り込んでおり、『数理精蘊』の対数表もこの『対数算術』第二版を部分的に修正したものであることが知られている²。しかしながら、フラック編『対数算術』第二版 (1628) と『数理精蘊』の違いについては従来の研究ではほとんど触れられていない。そこで、本稿ではこの両者の違いを調べ、『数理精蘊』には『対数算術』第二版以外に、Ozanam, J, *Tables des Sinus, Tangentes et Secantes; et des Logarithmes des Sinus et des Tangentes; & des Nombres depuis l'unité jusques à 10000* (『正弦・正接・正割 (余弦の逆数) 及び正弦・正接の対数と 1 から 10000 までの自然数の (常用) 対数の表』, 1670 (初版), 1685 (第二版)) の内容も取り入れられていることや対数値の求め方のうちの 1 つなどに違いがあることを明らかにする。また、会田安明『対数表起源』(写本, 1800 以前) と『数理精蘊』にある方法との比較も行う。

2 Henry Briggs, *Arithmetica logarithmica* (『対数算術』) と『数理精蘊』について

本論に入る前にヘンリー・ブリッグスの『対数算術』と中国で出版された『数理精蘊』について述べておきたい。

対数はイギリスのジョン・ネピア (John Napier, 1550–1617) によって、発明されたことで有名であるが、ネピアが考えた対数は常用対数でも自然対数でもなかった。ネピアのあとを継いだヘンリー・ブリッグスは始めて 1617 年に 1 から 1000 までの常用対数表 *Logarithmorum chilias prima* を出版した。その後、常用対数についての詳しい説明を付けた *Arithmetica logarithmica* (『対数算術』) が 1624 年に出版された。この本には 1 から 20000 までと 90000 から 100000 までの 14 桁 (仮数 (小数部分のこと), 以下同様) の常用対数表が載せられていた。さらに、1628 年にアドリアーン・フラック (Adriaan Vlacq, 1600 頃–1667 頃) が、ブリッグスの *Arithmetica logarithmica* (『対数算術』) の第 2 版として、1 から 100000 までの 10 桁の常用対数表を出版した。この『対数算術』第二版がすでに触れたように中国の『数理精蘊』に大きな影響を与えたのである。

一方、清の康熙帝 (1654–1722) は自然科学の愛好者で、数学や天文学に特別な興味を示した。彼は 1659 年にベルギーから中国に来たイエズス会士のフェルビースト (Ferdinand Verbiest, 南懷仁, 1623–1688) を師と仰いだ。記録によれば、「フェルビースト神父は、康熙帝に主要な天文儀器や数学儀器の使用法および幾何学・静力学・天文学の中の最も新奇な、最も簡要な内容を説明し解釈を与えた」といわれている³。康熙二十四 (1685) 年、フランスのルイ 14 世は中国に対して、

¹ブリッグスの没年については IREM, *Histoire de Logarithmes* (2006, 文献 [7]) p.113 および Bruce, “Biographical Notes on Henry Briggs.” (2004, 文献 [3]) p.1 を参照した。

²藤原 (1983b, 文献 [6]) p.450, 韓 (1992, 文献 [10]) pp.111–115 参照

³李 (2002, 文献 [11]) p.225 参照。

積極的な伝教を採択し、宣教師 5 人が康熙二十六年に中国に到着した。その中で、特に数学に優れていたブーヴェ (Joachim Bouvet, 白晋, 1656-1730) とジェルビヨン (Jean François Gerbillon, 張誠, 1654-1707) は宮廷に留まり、康熙帝に数学を講義した。こうした中で、1709 年に康熙帝は陳厚輝 (1648-1722) と謁見して数学の問題を議論し、同年彼を北京に正式に呼び出し、数学の研究に従事させた。間もなく、康熙帝は陳厚輝から「歩算の諸書を定め以て天下に恵むことを請う」という上奏を受けて、天文算法書を編纂させた。これは陳厚輝、梅穀成、何国宗、明安図などによって、1721 年に『曆象考成』四十二卷、『律呂正義』五卷、『数理精蘊』五十三卷として完成する。この書は合わせて『律曆淵源』(全百卷)と称され、1723 年に出版された。この中で、『数理精蘊』下編の卷三十八「対数比例」で、対数の説明と対数表の作り方が紹介されている。巻頭には「対数比例、乃西士若往訥白爾所作、以借数与真数对列成表、故名对数表。又有恩利格巴理斯者、復加增修、行之数十年、始至中国⁴ (対数比例は、西方のジョン・ネピアが考案したものだ。かれは仮数 [ここでいう「仮数」は現在の対数を指す] と真数を対列して表を作り、そのことからその表を対数表と名づけた。また、ヘンリー・ブリッグスがこれに増修を加えた。数十年西方でつかわれた後、中国に初めて伝わった)⁵」とある。『数理精蘊』には、真数 1 から 10 万までに対して、仮数 10 桁の対数表と三角関数表および三角関数の 10 桁の対数表も収録されている。

3 『対数算術』と『数理精蘊』の対数部分の違い

以下で、『対数算術』と『数理精蘊』の対数部分(下編の卷三十八「対数比例」)の違いについて述べるが、すべての違いを網羅しているわけではない。最初に対数表の違いを述べ、次に対数表の作り方の部分の中で本稿筆者が気がついた範囲での相違点を述べる。

3.1 対数表の違い

『対数算術』第二版の仮数(小数部分)10桁の対数表では、第一階差も記されている。たとえば、96, 97 の対数は

96	1,98227,12330	450,05013
97	1,98677,17343	

のように記されている。対数値は小数第 11 位を四捨五入したものであり、小数点と小数第 5 位と第 6 位との区切りは、' ' が用いられている。この場合の第一階差は 0.0045005013 意味する。

一方、『数理精蘊』では小数点や区切りの記号や第一階差は記されていない。

九六	一九八二二七一二三三〇
九七	一九八六七七一七三四三

のように記されている。

『対数算術』第二版の Vlacq による序文の直後に、訂正表が付けられている。階差の訂正を除くと 90 の訂正があるが、『数理精蘊』ではそのうち 70 が修正され、20 は誤っている。その誤りは、真数 6207, 8077, 8642, 8832, 9176, 9354, 9706, 9972, 12328, 12398, 14763, 15306, 16461, 17509, 19107, 19113, 19195, 78700, 99090 に対応している対数値である。

また、Glaisher(1872)p.258 によれば、Vlacq の『対数算術』第二版には以下の誤りがあるという。ただし、Vlacq 自身や Lefort がすでに指摘している誤りが除かれており、これらが誤りのすべてではない。また、Glaisher(1872)p.258 の第一階差の誤りや Glaisher の誤りと思われるものは省いてある。『数理精蘊』の値は算用数字に直し、該当部分に下線を引いて付け加えた。

⁴ 『数理精蘊』下編の卷三十八「対数比例」の序 (1723, 文献 [15] p.259) 参照。

⁵ 銭 (1990, 文献 [14]) pp.286-287 参照。

Number.	Error.	Correction.	『数理精蘊』の値	
1360	89083	89084	3.1335389083	
2154	56970	56990	3.3332456970	
11293	93280	93281	4.0528093280	
11699	87409	87410	4.0681487409	
18723	54375	54373	4.2723754375	
18724	86323	86325	4.2723986323	
23999	4,34019	4,38019	4.3801931457	修正
24580	18785	18786	4.3905818785	
54040	53404	53403	4.7327153404	
64818	56295	56265	4.8116956295	

このように、Glaiser(1872)p.258 に与えられた訂正表に関する限り、『数理精蘊』では1ヶ所しか訂正されていない。

以上のように、『数理精蘊』は『対数算術』第二版を訂正したところもあれば、訂正されていないところもあることが示された。そして、誤っている場所も一致していることがわかる。

3.2 『対数算術』第二版と『数理精蘊』の対数表の作り方

ここでは、『対数算術』第二版で説明されている対数表の作り方（対数値の計算方法）を以下の4通りに分類する。

1. 自然数の累乗値の桁数からその対数値を求める方法（ネピア考案）
2. $10^{\frac{1}{2^n}}$ ($0 \leq n \leq 54$) の値を利用して対数値を求める方法
3. 連続する3つの合成数を利用する方法
4. 後に Radix Method と呼ばれるようになる方法

これらはすべて、『数理精蘊』で説明されているが、1つ目の方法には少し違いがある。また、4つ目の方法は Radix Table を用いる方法であるが、『対数算術』第二版にはその表の作り方が説明されていないのに対して、『数理精蘊』では説明されているという違いがある。さらに、上記の『対数算術』第二版の4つの方法のほかに、『数理精蘊』では、はさみうちによる逐次近似法を用いた対数値の計算方法が説明されている。そこで、以下では1つ目の方法の違いと『数理精蘊』だけに説明されている逐次近似法による対数値計算法について説明する。

3.2.1 ある自然数の累乗の桁数からその対数値を求める方法の違い

上記の『対数算術』第二版の1つ目の方法、すなわち、ある自然数を累乗して、その値の桁数を調べることによってその対数値を求める方法について、ブリッグスは『対数算術』の第5章の最初に、ネピアの *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, 1619 の付録 pp.40-53 を参照するように記している。それは英訳本 *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms* (1889; reprint 1966, 文献 [12]) の pp.52-69 にほぼ対応している。確かに、英訳本の pp.53-54 に『対数算術』の第5章と同じ方法が説明されている。したがって、この方法はネピアによるものである。しかし、簡略な説明しかなく、具体的にどのように計算するかわかりにくい。一方、同書の付録である “Some Remarks by the learned Henry Briggs on the foregoing Appendix” (pp.55-63) にはブリッグスのより詳しい説明がある。それと同じ方法は『対数算術』でさらに詳しく説明されている。始めに、この方法を理解しやすくするための常用対数の性質を述べておく。

常用対数の性質 (真数の桁数と常用対数の指標の関係)

真数を N とする.

1. (真数 N の桁数) $-1 = (\log_{10} N$ の値の指標)
2. (対数 $\log_{10} N$ の値の指標) $+1 =$ (真数 N の桁数)

たとえば, $\log_{10} 1234 = 3 + 0.09131 \dots (\Leftrightarrow 1234 = 10^{3.09131 \dots})$ のとき,

1. 1234 は 4 桁の数であるから, その常用対数の値の指標 (整数部分) は $4 - 1 = 3$ である.
2. $\log_{10} 1234$ の指標 (整数部分) は 3 であるから, 1234 は $3 + 1 = 4$ 桁の数である. なぜなら, $10^3 \leq 10^{3.09131 \dots} < 10^4$ だからである.

このように, N の桁数 $-1 = [\log_{10} N]$ である ($[\]$ はガウス記号).

たとえば, $\log_{10} 2$ の値を求めたいとしよう. ブリッグス (1624) は仮数 14 桁を求めるために, $2^{10^{14}}$ の桁数を計算している. $[\log_{10} 2^{10^{14}}] = [10^{14} \log_{10} 2]$ であるから, (常用対数の性質) より,

$$2^{10^{14}} \text{ の桁数} - 1 = [10^{14} \log_{10} 2]$$

となっている. この値を 10^{14} で割れば (言い換えると, 小数点の位置を 14 桁分ずらせば), 現在用いられている常用対数の値, すなわち, $\log_{10} 2$ の (近似) 値となる (実際, $10^{14} \log_{10} 2 = 30102999566398.11952 \dots$ となるので, 小数第 1 位以下を切り捨てた 30102999566398 が指標であり, これを 10^{14} で割れば, $\log_{10} 2$ の近似値となる). すなわち,

$$\log_{10} 2 \approx \frac{(2^{10^{14}} \text{ の桁数}) - 1}{10^{14}}$$

次頁の表はブリッグスの『対数算術』の第 5 章に与えられたものである.

1	0		
2	1		
4	2	1	
16	4	2	第 1 四数組
256	8	3	
1024	10	4	
10, 48576	20	7	
109, 95116, 27776	40	13	第 2 四数組
12089, 25819, 61463	80	25	
12676, 50600, 22823	100	31	
16069, 38044, 25899	200	61	
25822, 49878, 08685[91]	400	121	第 3 四数組
66680, 14432, 87940[85]	800	241	
10715, 08607, 18618[27]	1000	302	
11481, 30695, 27407[25]	2000	603	
13182, 04093, 43051[94]	4000	1205	第 4 四数組
17376, 62031, 93695[809]	8000	2409	
19950, 63116, 87912[8076]	10000	3011	
$[2^n (n = 0, 1, 2, \dots)]$	指数	桁数	

表 1: Briggs(1624), 『対数算術』第 5 章 p.8 より (一部日本語訳)

この表の第 1 列目は 2 を累乗した数 (ただし, 桁数が多い場合, 上位 15 桁まで (16 桁目四捨五入))

を記している)で、これは原典のままであるが、下線は本稿筆者が付け加えたものであり、誤っていることを示す。その直後の [] 内は四捨五入した結果の正しい値である。第2列目は、それに対する累乗の指数、第3列目は第1列目の値の(省略されている部分も含めた)桁数である。

最初の2行はそれぞれ、 2^0 、 2^1 の値と指数である。3行目からは4つの組ごとに分けられている。まず、ある組の1番目の第1列は、1つ前の組の最後の数を2乗し、第2列目はその指数を2倍して求める。得られた数を次々と2乗して、2番目、3番目の数を、得られた指数を次々と2倍して、それらの指数を求める。4番目の数は1番目と3番目の数を掛けて求め、その指数はそれらの指数を加えて求める。すると各四数組の第 n 四数組の4行目の指数は 10^n となる。

ブリッグスの『対数算術』によれば、桁数が多くなった場合、その数全体を2乗したり、掛け合わせたりする必要はないという。(m 桁の正の整数) \times (n 桁の正の整数) を計算した結果の桁数は $(m+n)$ 桁、または $(m+n-1)$ 桁になる。ここでは $(m+n)$ 桁となった場合を多い方の桁数、 $(m+n-1)$ 桁になった場合を少ない方の桁数と呼ぶ。桁数だけを求める場合、ブリッグスは上位桁だけを掛けて、多い方の桁数になるか少ない方の桁数を確認すればよいとしている。しかし、多くの桁数を求めるために、計算を先に進めるときには、誤差が累積するので、できるだけ多くの桁をとって計算値を求めておかなければならない。ただ桁数の確認だけは、上位桁で十分だということである。原典には具体的に上位何桁の計算で桁数判断したのか記されていないが、ここでは上位3桁を考えることにする。

たとえば、表の第3組の2番目の数は121桁の数、 $258\cdots$ であるから、この上位3桁の258を2乗すると66564であり、 $(3+3-1)$ 桁となって、少ない方の桁数とわかるので、全体としては、 $121+121-1=241$ 桁と判断する。この第3組の4番目を求めるときは、1番目の61桁の数、 $160\cdots$ と241桁の3番目の数、 $666\cdots$ のうち、上位3桁を掛けて、 $160 \times 666 = 106560$ で、 $(3+3)$ 桁と多い方の桁数となり、全体としても、 $61+241=302$ 桁とする⁶。

このようにして、指数が 10^{14} になるまで計算すると、それに対する桁数は、Briggs(1624)、『対数算術』第5章p.8に“30102,99956,6399”とある。これは、 $\log_{10} 2^{10^{14}} = 10^{14} \log_{10} 2$ の指標に1加えたものであるから、これから1引いたものが、 $10^{14} \log_{10} 2$ の指標となる。実際、Briggs(1624)、『対数算術』p.9には“30102,99956,6398”とある。この値を 10^{14} で割れば、現在用いられている $\log_{10} 2$ の(近似)値となる。 $\log_{10} 2$ の値を20桁まで求めると、 $\log_{10} 2 = 0.30102999566398119521$ であるから、ブリッグスの計算値は14桁目まですべて正しい。ブリッグスは同様にして、7の対数($10^{14} \log_{10} 7$)の求め方も表を用いて示している。

一方、『数理精蘊』では2を次々にひたすら2乗していく。すなわち、 $2^2 = 4$ 、 $4^2 = 16$ 、 $16^2 = 256$ 、 \cdots というように計算していく。最後に、 $2^{2^{37}}$ の桁数を求めているが計算ミスをしている⁷。

	『数理精蘊』	正しい値
2^{37} の値	137446953472	137438953472
$2^{2^{37}}$ の桁数-1	41375655307	41373247567

よって、 $\log_{10} 2^{137446953472} = 41375655307$ より、これらの誤った値どうしで割り算して、 $\log_{10} 2 = 41375655307/137446953472 = 0.30102999566$ としているがこの計算値も誤っている。正しく計算すると $0.301029992021\cdots$ となるはずである。

しかし、実際には、 $\log_{10} 2^{137438953472} = 41373247567$ より、 $\log_{10} 2 = 41373247567/137438953472 = 0.301029995658\cdots$ となる。コンピュータによれば、

⁶これは本文に記したように、本稿筆者が挙げた例であって、ブリッグスは繰り上がりについて、表とは無関係の別の例、すなわち、 $68 \times 26 = 1768$ 、 $14 \times 68 = 952$ を挙げている。よって、ブリッグスは2桁で確認していた可能性もある。

⁷この誤りについてはすでに篠原善富『八線対数表解』(文献[17])に指摘されている。

$\log_{10} 2 = 0.301029995663981\dots$ である。『数理精蘊』の値は最終的な計算値だけ、正しい値に無理に合わせていることになる。

それはともかくとして、ネピア-ブリッグスの方法は 10^n で割っているので小数点の移動だけで済むが、『数理精蘊』の方法は 2^{2^n} で割っているのだからたいへんである。このことからネピア-ブリッグスの方法よりも『数理精蘊』の方法が改悪されてしまったという印象を受ける。しかし、そうとも限らないことを以下で示す。

ネピア-ブリッグスの方法の検討

ネピア-ブリッグスの方法は完全ではない。というのは上位桁だけで桁数を決定する場合、全体を計算した場合と1桁ずれるときが生じるからである。たとえば、 N の桁数を n として、 N^2 を計算する場合を考える。 N の上位2桁が31のとき、 $31^2 = 961$ で3桁となり、少ない方の桁数である。つまり、全体として、 $(n+n-1)$ 桁と判断されてしまう。しかし、同じ N の上位3桁が317のとき、 $317^2 = 100489$ で6桁となり、多い方の桁数となる。つまり、全体として、 $(n+n)$ 桁と判断できる。また、 N の上位3桁が316のとき、 $316^2 = 99856$ で、全体として $(n+n-1)$ 桁と判断されるが、同じ N の上位4桁が3163のとき、 $3163^2 = 10004569$ となって、全体として、 $(n+n)$ 桁となる。このように、上位桁数だけで、全体の桁数を判断するのは絶対に正しいわけではない。しかし、 n 桁の数 N を2乗するとき、

1. N の首位が4以上のとき、 N^2 を計算すると、すべて最上位に繰り上がりが生じることがわかり、全体として $2n$ 桁となることが確定する。
2. 首位が1または2のときは最上位は繰り上がらないので、全体として $2n-1$ 桁であることが確定する（以下で証明する）。
3. 首位が3のとき、上から2桁目以下も考慮する必要がある。

このことをもう少し詳しく検討する。首位が4以上のときはほとんど自明であるから説明は略す。首位が1または2のとき、上から2桁目以下がすべて9の場合が最大値となる。そこで、首位が1または2の n 桁の数の最大値の2乗として、 $2999\dots = 3 \times 10^{n-1} - 1$ の2乗を考える。 $3 \times 10^{n-1} - 1$ は n 桁の数であるから、理論的には2乗すると $2n$ 桁または $2n-1$ 桁のいずれかになるが、

$$(3 \times 10^{n-1} - 1)^2 = 9 \times 10^{2n-2} - 6 \times 10^{n-1} + 1 < 10 \cdot 10^{2n-2} = 10^{2n-1}$$

となるので、首位が1または2の n 桁の数の2乗はすべて $2n-1$ 桁であることが確定する。

次に首位が3のときを考察する。 n 桁の数 $T (T \in \mathbb{N})$ を2乗するとき、 $2n$ 桁になるときを考えると、

$$\begin{aligned} 10^{2n-1} &\leq T^2 < 10^{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \sqrt{10 \cdot 10^{2n-2}} &\leq T < \sqrt{10^{2n}} \\ 10^{n-1} \sqrt{10} &\leq T < 10^n \end{aligned} \tag{1}$$

となる。これを具体的な数値で考えてみる。 T が2桁で、2乗して4桁となるのは、(1)式より、

$$\begin{aligned} 10\sqrt{10} &\leq T < 10^2 \\ 31.622\dots &\leq T < 100 \\ 32 &\leq T < 100 \quad (\because T \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

を満たすときであり、同様に、 T が3桁で、2乗して6桁となるのは、

$$\begin{aligned} 10^2 \sqrt{10} &\leq T < 10^3 \\ 316.227\dots &\leq T < 1000 \\ 317 &\leq T < 1000 \quad (\because T \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

を満たすときである。以上の結果から、 $[10^{n-1}\sqrt{10}] = [10^{n-1} \times 3.162277660\dots]$ が繰り上がるかどうかの境界値である。ここでは N が 5 桁以上の数として、 N^2 の最上位が繰り上がるかどうかを判断するには、以下のアルゴリズムを適用すればよい。

1. まず、上位 2 桁を取ったとき、32 以上なら繰り上がる。30 以下なら繰り上がらない。31 なら次へ
2. 上位 2 桁が 31 なら、上位 3 桁を見て、317 以上なら繰り上がる。315 以下なら繰り上がらない。316 なら次へ
3. 上位 3 桁が 316 なら、上位 4 桁を見て、3163 以上なら繰り上がる。3161 以下なら繰り上がらない。3162 なら次へ
4. 以下同様に、 $[10^{n-1}\sqrt{10}] = [10^{n-1} \times 3.162277660\dots]$ に沿って、上位 k 桁を見て、それより大きければ繰り上がる。それより小さければ繰り上がらない。それに等しければ、もう 1 桁増やして同じことを繰り返すというアルゴリズムを続ける。

N^2 ではなく、任意の自然数の積の桁数の決定は簡単ではないので省略するが、上位 3~4 桁どうしの積の結果で判定しておけばほとんど問題ない。

しかしながら、2 乗だけの計算であれば桁数は確実に決定できるが、それ以外の任意の桁数どうしのかけ算の場合は 1 桁ずれてしまう可能性がある。このことから、『数理精蘊』では計算は複雑になるが、2 乗だけの計算を用いることによって正確な値を求めることができることになる。したがって、『数理精蘊』の方法は改悪とは言い切れないのである。フランス人宣教師たちはこのことを知っていたのだろうか。

※ C 言語によるプログラムを作成して実行した結果、任意の 2 数のかけ算を行うとき、上位 2 桁で判断して最上位が繰り上がらないが、上位 3 桁で判断すると最上位が繰り上がってしまう可能性は 2% 未満、上位 3 桁で判断して最上位が繰り上がらないが、上位 4 桁で判断すると最上位が繰り上がってしまう可能性は 0.21% 未満、上位 4 桁で判断して最上位が繰り上がらないが、上位 5 桁で判断すると最上位が繰り上がってしまう可能性は 0.021% 未満であることが判明した。たとえば、上位 2 桁で、 $31 \times 32 = 992$ で最上位は繰り上がらない。3 桁目はそれぞれ 0 から 9 まで 10 通りあって、3 桁まで考えると 100 通りの組み合わせがある。たとえば、 $310 \times 320 = 99200$ は最上位が繰り上がらないが、 $315 \times 320 = 100800$ となって、最上位が繰り上がる。このように 1 桁増やしたとき、1 つでも最上位が繰り上がる場合があれば、 31×32 は「上位 2 桁で判断すると最上位が繰り上がらないが、上位 3 桁で判断すると最上位が繰り上がってしまう可能性」の 1 つとしてカウントする。それで「可能性は 2% 未満」という表現を用いた。

3.2.2 『対数算術』にはないが、『数理精蘊』にある対数値の求め方

前記のように、『数理精蘊』には、はさみうちによる逐次近似法を用いた対数値の計算方法が説明されている。この方法は『対数算術』には記されていない。

この方法は、Ozanam, J, *Tables des Sinus, Tangentes et Secantes; et des Logarithmes des Sinus et des Tangentes; & des Nombres depuis l'unité jusques à 10000* (『正弦・正接・正割 (余弦の逆数) 及び正弦・正接の対数と 1 から 10000 までの自然数の (常用) 対数の表』, 1685(第二版)) の第 3 章 “De la construction des Logarithmes”(「対数の構成」, 大文字小文字は原文のまま) に説明されている方法である。この書が中国に伝わっていたことは、韓 (1992) p.111 に指摘されている。それによると、かつて北堂図書館に所蔵され、現在は故宫博物館に所蔵されているという⁸。しかしながら、具体的に『数理精蘊』にどのような影響を与えたのかについては述べられていない。

⁸H. Verhaeren, *Catalogue of the Pei-T'ang Library* が参照されている。

これは Ozanam 自身が考え出した方法ではなく、ネピアの *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, 1619 の付録 (英訳本 *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms* (1889; reprint 1966, 文献 [12]) では, pp.50-51) に簡単に触れられている⁹. そこには, 具体例として $\log_{10} 5$ の求め方を説明しているが最後まで計算していない. Cajori(1931, 文献 [4])p.155 によれば,

Perhaps suggested by Napier's remarks in the *Constructio*, this method was developed by French writers, of whom Jacques Ozanam (1640-1717) in 1670 was perhaps the first.

とあり, ネピアが提案した方法を初めて詳しく説明したのが Ozanam であるらしい.

Ozanam(1685, 初版は 1670) では $\log_{10} 9$ の求め方を例にとりて説明しているが、『数理精蘊』もまた同じである. そこで, 以下で Ozanam が与えた具体例である $\log_{10} 9$ の求め方を説明する. 以下本節では常用対数の底 10 は省略する. また, 近似値でも等号を用いる.

まず, 9 をはさむ 2 数を考える. その 2 数の対数値は既知でなければならない. $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $1 < 9 < 10$ であるから, その 2 数は 1 と 10 とする. ここで, 2 つの真数を a, b としたとき, それらの対数の相加平均をとると,

$$\frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2} \log ab = \log \sqrt{ab} \quad (2)$$

であり, 真数の部分は \sqrt{ab} と相乗平均となっている. そこで, $\log 1 = 0$ と $\log 10 = 1$ の相加平均を取ると,

$$\frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

で, 真数の相乗平均をとると, $\sqrt{1 \times 10} = 3.1622777$ (小数第 8 位四捨五入) となる. すなわち, (2) 式より,

$$\log \sqrt{10} = \log 3.1622777 = 0.5$$

となる. 次に, 1 と 10 と $\sqrt{10} = 3.1622777$ のうち, 9 に近い 2 数は $\sqrt{10} = 3.1622777$ と 10 であり, この 2 数は 9 をはさんでいる. そこで, まずこれらの対数値 $\log \sqrt{10} = 0.5$ と $\log 10 = 1$ の相加平均をとると,

$$\frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

であり, 真数の相乗平均をとると,

$$\sqrt{10\sqrt{10}} = \sqrt{10 \times 3.1622777} = 5.62341328 \dots$$

であり, 原文では小数第 8 位が切り捨てられている. 以上の計算と (2) 式より,

$$\log 5.62341328 = 0.75$$

である.

以下同様にして, 次々に相加平均と相乗平均を計算し, 9 に近い 2 数で, はさみうちを行いながら, 逐次に近似値を求める. Ozanam は真数が 9.0000000 となるところで止めている. このとき, 全 26 回上記の相加平均と相乗平均のアルゴリズムを繰り返す,

$$\log 9 = 0.95424251$$

を求めている. これは正確な値を小数第 9 位で四捨五入した値に等しい. このように, Ozanam は真数は小数第 7 位まで, 対数は小数第 8 位までを扱っている (次ページの表参照).

一方、『数理精蘊』(文献 [15]pp.263-267) の場合は, 真数は同じ桁数を扱っているが, 対数の方は小数第 10 位まで計算している. 最終的には

⁹ネピアは *Constructio*(1619) の付録では常用対数について説明している.

$$\log 9 = 0.9542425125$$

を求めている。正確には、 $\log 9 = 0.9542425094\dots$ であるから、小数第 7 位まで正しい。Ozanam は小数第 8 位まで求めるために相加相乗平均を 26 回繰り返しているが、『数理精蘊』はこれと同じ回数で止めてしまったために末位が不正確になったと考えられる。小数第 10 位まで正確に求めるためには、筆者の計算によれば相加相乗平均を 33 回繰り返さなければならない。

以上のことから、『数理精蘊』の計算は明らかに Ozanam(1670(あるいは 1685)) を参照しており、Ozanam の計算を対数だけ小数第 10 位までに変更して計算したものということができる。

	[相乗平均] 真数	[相加平均] 対数		[相乗平均] 真数	[相加平均] 対数
A	1.0000000	0.0000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.5000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.0000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.7500000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.5000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.8750000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.7500000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.9375000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.8750000	S	8.9999250	0.95421889
B	10.0000000	1.0000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.9687500	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.9375000	S	8.9999250	0.95421889
G	9.3057204	0.9687500	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.9531250	X	8.9999650	0.95424280
F	8.6596432	0.9375000	S	8.9999250	0.95421889
G	9.3057204	0.9687500	V	9.0000041	0.95424271
I	9.1398170	0.9609375	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.9531250	X	8.9999650	0.95424280
I	9.1398170	0.9609375	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.9531250	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	&	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.9531250	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	AA	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.9531250	&	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	AA	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	BB	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	&	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	BB	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	CC	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	&	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	BB	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	DD	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	CC	8.9999998	0.95424250

表 2: Ozanam(1685), 第 3 章 pp.37-39 より (一行目日本語改変)

なお、この Napier-Ozanam の方法は、後年オイラーによっても解説されている (オイラー著、高瀬正仁訳『オイラーの無限解析』海鳴社、2001, pp.87-89 参照)。

4 会田安明『対数表起源』の対数計算の方法について

江戸時代に関流に対抗して最上流を作った会田安明(1747-1817)の著書に『対数表起源』がある。成立年ははっきりしないが、山形大学の柳原文庫の所蔵本には、「自得斉佳同筆写、寛政十二(1800)年」とあるという¹⁰。したがって、この年以前に成立していたことは確かである。『対数表起源』で説明されている方法は、まさに上記の Ozanam が説明しているアルゴリズム、すなわち、『数理精蘊』で説明されているアルゴリズムと同じである。ただ、現代的に言えば会田安明は対数の底を2として、最後に底の変換を行い、底を10とする対数、すなわち、常用対数に直している。

会田が『数理精蘊』を見たのかどうかははっきりした証拠はないが、会田安明編『諸算書銘目』(1795, 文献[1])には「律曆淵源」の名が見えるから、会田安明は1795年の時点で『数理精蘊』の存在は知っていたと考えられる。しかしながら、書名だけを知っていたのかもしれない、実際に見たかどうかはこれだけではわからない。

会田の方法は平山(2008, 文献[9])pp.295-303などに解説がある。具体的には $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $2 < 3 < 4$ であるから、 $\log_2 3$ の近似値を上記の相加相乗平均のアルゴリズムを用いて求めることができる。まず、真数の相加平均を求めると、

$$\frac{1+2}{2} = 1.5$$

となる。その真数の相乗平均を求めると、

$$\sqrt{2 \times 4} = 2.8284271247$$

となり、(2)式より、

$$\log_2 \sqrt{2 \times 4} = \log_2 2.8284271247 = 1.5$$

となる。次に、 $2.8284271247 < 3 < 4$ であることから、相加相乗平均のアルゴリズムを同様にあてはめ、以下全部で10回同様の計算を繰り返して、

$$\log_2 3 = 1.584961$$

と小数第6位まで求めている。一方、

$$\log_{10} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 10}$$

である。会田は $\log_2 10 = 3.32192[8]$ (正確な値は $\log_2 10 = 3.3219280948\dots$, より、末位の8は補う)として、 $\log_{10} 2 = 1/3.321928 = 0.3010300$ を求めている。また、 $\log_{10} 3 = 0.4771213$ となっているが、上記の値より、 $1.584961/3.321928 = 0.4771208\dots$, あるいは $1.584961/3.32192 = 0.4771219\dots$ となって計算が合わない¹¹。

ここで、底を2とした場合、底を10としたときと比べて、相加相乗平均の回数を減らすことができるのか調べてみたい。ここでは、与えられた真数に小数第7位以上一致したところで止めるものとする。また、ここでは30までの素数の常用対数を求める。会田の方法では底を2とし、3以上の素数はすべて、前後の数ではさみうちを行う。Ozanamの方法では、2と3の対数を求めるのに1と10ではさむ。3の場合は2と4ではさむこともできるが、回数が24回となって、かえって回数が多くなってしまう。Ozanamの方法も5以上の素数ではすべてその前後の数ではさむことができる。

¹⁰『山形大学 柳原文庫目録』(1981, 文献[18]) p.9 参照。

¹¹ここでは文献[2]の値を参照した。

真数	会田 回数	Napier-Ozanam 回数
2	-	24
3	23	23
5	20	20
7	22	22
11	22	22
13	23	23
17	23	23
19	21	21
23	22	22
29	22	22

この表のように、結局は底を2としても回数は底が10のときと変わらず、底の変換の分だけ回数が多くなってしまう。もちろん、計算の繁雑さは回数だけでなく、対数値が簡単かどうかなども影響するので、単純には決定できないが、真数が大きくなるにつれて計算の繁雑さはさほど変わらないように思われる。

もし、会田が『数理精蘊』を見てこの方法を考えたとしたら、間接的にOzanam(1670)の第3章の方法、さらにはネピアの *Constructio* の付録に影響を受けていることになる。『数理精蘊』がブリッグスの『対数算術』第二版だけを取り入れ、Ozanamの方法を取り入れなかったとしたら、はたして会田は『対数表起源』を書くことができたのだろうか。

5 おわりに

従来『数理精蘊』とブリッグス『対数算術』第二版(1628)の対数表の作り方(対数値の計算方法)に違いがあることはほとんど知られていなかった。本稿ではその違いを指摘した。自然数を累乗して、その値の桁数からその数の対数値を求める方法では『数理精蘊』の方法は一見すると『対数算術』より計算が面倒になり、改悪とも思われるが、実は正確さの点では改良といえる方法であることを明らかにした。また、『対数算術』第二版(1628)のほかにOzanam(1670)の方法が取り入れられているが、相加相乗平均の回数が同じで真数の精度が同じにもかかわらず、『数理精蘊』は対数値だけ桁数を多くとったために、末位が不正確となっていることを明らかにした。また、このOzanamの方法は会田安明の『対数表起源』の方法とアルゴリズムは同じであること、会田の方法は底を2としているがあまり効率的にはなっていないこともはっきりさせた。会田が『数理精蘊』を見たかどうか明確な証拠はないが、『数理精蘊』を見て『対数表起源』の方法を考えたとしたら、それはブリッグスの『対数算術』ではなく、Ozanam(1670)の方法に間接的に影響を受けたことになるのである。

『数理精蘊』が日本の江戸時代における対数研究にどのように影響を与えたのかについてはまだまだ不明な点が多い。本稿では会田安明の『対数表起源』との関連にも触れたが、今後さらに他の和算家の対数研究も含めて調査を続ける必要があると考える。

付記

ネピアが1614年に初めて対数に関する解説と対数表を含む *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* を出版してから、2014年でちょうど400周年を迎えることになる。日本でも記念行事が行われることであろう。それまでには日本の江戸時代における初期(1780年頃-1830年頃)の対数の歴史をまとめて出版したいと考えている。

参考文献

- [1] 会田安明編『諸算書銘目』写本, 寛政七(1795)年, 東北大学, 岡本写1016(明治十四(1881)年の新写本)
- [2] 会田安明『対数表起源』写本, 東北大学, 林集書1426
- [3] Bruce, Ian(2004), “Biographical Notes on Henry Briggs.”, 2004 掲載
<<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Miscellaneous/Briggs/index.html>>
(2008年12月21日確認)
- [4] Cajori, Florian(1931), *A History of Mathematics*. New York: The Macmillan Company
- [5] 藤原松三郎(1983a)『明治前日本数学史』第四卷, 東京: 岩波書店, 1959(第1刷); 1983(第2刷)
- [6] 藤原松三郎(1983b)『明治前日本数学史』第五卷, 東京: 岩波書店, 1960(第1刷); 1983(第2刷)
- [7] IREM(2006), *Histoire de Logarithmes*. Paris: Ellipses
- [8] Glaisher, J. W. L.(1872), “On Errors of Vlacq’s (often called Briggs’s or Neper’s) Tables of Ten-figure Logarithms of Numbers”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol.32, pp.255-262
- [9] 平山諦(2008)『学術を中心とした和算史上の人々』東京: 筑摩書房
- [10] 韓琦(1992), 「『数理精蘊』対数造表法与戴煦的二項展開式研究」『自然科学史研究』第11卷, 第2期, 1992, pp.109-119
- [11] 李迪(2002)『中国の数学通史』(大竹茂雄・陸人端訳) 東京: 森北出版
- [12] Napier, John(1899), *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, translated by W. R. Macdonald. Edinburgh and London: William Blackwood, 1889; reprint, London: Dawsons of Pall Mall, 1966
- [13] Ozanam, J(1685), *Tables des Sinus, Tangentes et Secantes; et des Logarithmes des Sinus et des Tangentes; & des Nombres depuis l’unité jusques à 10000*, Paris, <<http://books.google.com/books?id=NwVBAAAAcAAJ&pg=PA145&dq#v=onepage&q&f=false>> (2010年8月9日再確認)
- [14] 錢宝琮(1990)『中国数学史』(川原秀樹訳) 東京: みすず書房
- [15] 『景印文淵閣四庫全書』子部106, 第800冊, [台北]: 台湾商務印書館, [1985] (刊行年は最終巻「目録索引」後記による), pp.258-302 (『数理精蘊』下編卷三十八「対数比例」)
- [16] 『景印文淵閣四庫全書』子部106, 第801冊 (『数理精蘊』対数表), [台北]: 台湾商務印書館, [1985] (刊行年は最終巻「目録索引」後記による), pp.1-516
- [17] 篠原善富(1823序)『八線対数表解』日本学士院蔵, 請求番号6420
- [18] 『山形大学 柳原文庫目録』山形大学附属図書館, 1981