数理解析研究所講究録
第 1774 巻 2012 年 118-129

“交換力とは何か” についての再考

横浜市立大学・国際総合科学部 藤井一幸 (Kazuyuki FUJII)
International College of Arts and Sciences,
Yokohama City University

概要

量子力学の基本は以下の原理である ([1], [2] を見よ)。

重ね合わせの原理 状態 $|a\rangle$ と状態 $|b\rangle$ が可能な状態であれば、α と β を複素数として、その重ね合わせ $\alpha|a\rangle+\beta|b\rangle$ $(|\alpha|^2+|\beta|^2=1)$ も可能な状態である。

初心者にとってこの原理は 何が面白いのか 又は 何が有難いのか よくわからない。しかしこれを用いると「交換力」が説明出来ると益川は主張する。

場の理論における交換力とは、2つの粒子の間である (素) 粒子を交換することで引き起こされる引力のことである (例えば、原子核内で陽子と中性子の間でパイオンが交換され、それらが強く結びついていること)。これは、粒子を交換する前の状態と交換した後の状態が重ね合わさり、そこから生じる量子力学的現象そのものであると益川は言うのである。

このことを2準位系の例で詳しく紹介する。そして3準位系以上、特に3準位系、に対して拡張を試みる。しかし3準位系では2準位系と同様のことが必ずしも成り立たないことを示す。

結論として2準位系と3準位系 (以上) では深い溝があるのである。

[A] 2準位系

(相互作用のない) 2準位系のハミルトニアン

$$H_0=\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \quad 0<h_1<h_2$$

を考えよう。h_1 及び h_2 は系のエネルギーである。

$$|1\rangle=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$H_0|j\rangle = h_j|j\rangle, \quad \langle 1|2\rangle = 0$$

を満たす。

次に相互作用（状態をミックスさせる力）のあるハミルトニアン

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & \bar{\gamma} \\ \gamma & h_2 \end{pmatrix}$$

を考え、これの対角化を行う。ここに γ は複素数である。

[I] H の固有値を求める ： 固有方程式

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda E - H| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - h_1 & -\bar{\gamma} \\ -\gamma & \lambda - h_2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (h_1 + h_2)\lambda + h_1 h_2 - |\gamma|^2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \frac{h_1 + h_2 \pm \sqrt{(h_1 + h_2)^2 - 4(h_1 h_2 - |\gamma|^2)}}{2} \\ &= \frac{h_1 + h_2 \pm \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}}{2} \end{aligned}$$

である。即ち、H の固有値は $\{\lambda_-, \lambda_+\}$ で、これより明らかに

$$\lambda_- < h_1 < h_2 < \lambda_+$$

である。

[ノート] ある公式をリストしておく。

$$\lambda_+ - h_2 = \frac{h_1 - h_2 + \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}}{2}$$

より

$$(\lambda_+ - h_2)^2 = \frac{2(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2 + 2(h_1 - h_2)\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}}{4}$$

で

$$\begin{aligned} (\lambda_+ - h_2)^2 + |\gamma|^2 &= \frac{2\{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2 + (h_1 - h_2)\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}\}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}\{h_1 - h_2 + \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}\}}{2} \\ &= \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}(\lambda_+ - h_2) \end{aligned}$$

となり公式

$$\frac{(\lambda_+ - h_2)^2 + |\gamma|^2}{\lambda_+ - h_2} = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}$$

を得る。同様に

$$\lambda_+ - h_2 = \frac{h_1 - h_2 + \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}}{2} = h_1 - \lambda_-$$

に注意して

$$\frac{(h_1 - \lambda_-)^2 + |\gamma|^2}{h_1 - \lambda_-} = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}$$

を得る。

[II] 固有値に対応する固有ベクトル

$$Hv = \lambda v, \qquad \lambda = \lambda_\pm$$

を求める：

(a) $Hv_+ = \lambda_+ v_+$ となる v_+ を求める。

$$\begin{pmatrix} h_1 & \bar{\gamma} \\ \gamma & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda_+ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} h_1 v_1 + \bar{\gamma} v_2 \\ \gamma v_1 + h_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ v_1 \\ \lambda_+ v_2 \end{pmatrix}.$$

２番目の式より

$$\gamma v_1 + h_2 v_2 = \lambda_+ v_2 \Longleftrightarrow \gamma v_1 = (\lambda_+ - h_2) v_2$$

で、$\lambda_+ - h_2 \neq 0$ より

$$v_2 = \frac{\gamma}{\lambda_+ - h_2} v_1$$

となる。従って

$$v_+ = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{\gamma}{\lambda_+ - h_2} v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{\lambda_+ - h_2} \end{pmatrix}$$

で、更に v_1 を正規化条件

$$< v_+ | v_+ > = 1$$

を満たすように選ぶ。即ち、

$$\begin{aligned} 1 &= |v_1|^2 \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{(\lambda_+ - h_2)^2}\right) \\ &= |v_1|^2 \frac{(\lambda_+ - h_2)^2 + |\gamma|^2}{(\lambda_+ - h_2)^2} \\ &= |v_1|^2 \frac{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}}{\lambda_+ - h_2} \end{aligned}$$

より

$$v_1 = \frac{\sqrt{\lambda_+ - h_2}}{\sqrt[4]{(h_1-h_2)^2+4|\gamma|^2}}$$

と選ぶ。Dirac の記号を用いると

$$\begin{aligned} |+\rangle &= v_+ = \frac{\sqrt{\lambda_+ - h_2}}{\sqrt[4]{(h_1-h_2)^2+4|\gamma|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{\lambda_+ - h_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt[4]{(h_1-h_2)^2+4|\gamma|^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_+ - h_2} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_+ - h_2}} \end{pmatrix} \\ H|+\rangle &= \lambda_+|+\rangle \end{aligned}$$

が求める（正規化された）固有ベクトルである。

(b) $Hv_- = \lambda_- v_-$ となる v_- を求める。
(a) と同様にして

$$\begin{aligned} |-\rangle &= v_- = \frac{\sqrt{h_1 - \lambda_-}}{\sqrt[4]{(h_1-h_2)^2+4|\gamma|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\gamma}}{h_1 - \lambda_-} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt[4]{(h_1-h_2)^2+4|\gamma|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{h_1 - \lambda_-}} \\ \sqrt{h_1 - \lambda_-} \end{pmatrix} \\ H|-\rangle &= \lambda_-|-\rangle \end{aligned}$$

を得る。

[練習問題] チェックせよ。

[III] H の対角化 ：

行列 U を

$$U = (|-\rangle, |+\rangle) = \frac{1}{\sqrt[4]{(h_1-h_2)^2+4|\gamma|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{h_1 - \lambda_-}} & \sqrt{\lambda_+ - h_2} \\ \sqrt{h_1 - \lambda_-} & \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_+ - h_2}} \end{pmatrix}$$

とおく。

[練習問題] $U \in U(2)$ を示せ。

このとき

$$\begin{aligned} HU &= H(|-\rangle, |+\rangle) \\ &= (H|-\rangle, H|+\rangle) \\ &= (\lambda_-|-\rangle, \lambda_+|+\rangle) \\ &= (|-\rangle, |+\rangle) \begin{pmatrix} \lambda_- & \\ & \lambda_+ \end{pmatrix} \\ &= U \begin{pmatrix} \lambda_- & \\ & \lambda_+ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で、$U^{-1} = U^{\dagger}$ に注意すれば

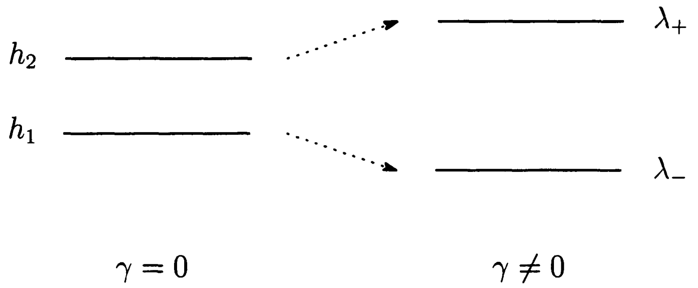
$$H = U \begin{pmatrix} \lambda_- & \\ & \lambda_+ \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_- & \\ & \lambda_+ \end{pmatrix} U^{\dagger}$$

となる。これがハミルトニアンの対角化である。

[IV] 意味 ： 相互作用項がないとき（$\gamma = 0$）、２つの独立な状態 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ があるだけだが、相互作用があれば（$\gamma \neq 0$）これらの重ね合わせである

$$|-\rangle = \frac{-\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{h_1 - \lambda_-}}}{\sqrt[4]{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{h_1 - \lambda_-}}{\sqrt[4]{(h_1 - h_2)^2 + 4|\gamma|^2}}|2\rangle$$

の方がエネルギーが低い（$\lambda_- < h_1$）のである。



２準位の混合

これはまさに量子現象で、これが「交換力」の正体であるとされている（[3], [4] を見よ）。 実際 益川 [3] では、

「２つの準位にそれらを混合させる作用が働くと、低い準位をさらに押し下げる。後に粒子の交換で生じる交換力の話をするが、それはここで話した準位の混合が本質であることがわかる」

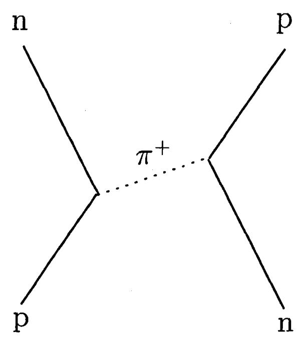
と書かれている。準位の混合とは、もちろん 準位の重ね合わせ のことである。

[補足] 原子核は陽子 (proton) と中性子 (neutron) によって構成されている。原子核の安定性は、湯川によれば、陽子と中性子の間でパイオン (π) を交換することによって生じる引力のためである。

他方、陽子は

$$p \longrightarrow n + \pi^+$$

と壊れることがあるので、原子核は $\{p, n\}$ と $\{n, n, \pi^+\}$ の２つの状態を取りうる。上で説明したように、この２つの状態の重ね合わせの方が（単独の状態より）エネルギーが低くなり（引力！）安定なのである。これこそが「交換力」の正体であると益川 [3] は主張するのである。



湯川相互作用

以上のことは一般的に言えること (universal) なのか？ それとも２準位系だけの特殊な現象なのであろうか？ ３準位系でチェックしてみよう。

[B] **３準位系**

以下のハミルトニアンを考える。

$$H_0 = \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{pmatrix},$$

ここで h_1, h_2, h_3 はエネルギーで正で、簡単のため

$$0 < h_1 < h_2 < h_3$$

と仮定する。 これに（状態をミックスさせる）相互作用を加える ：

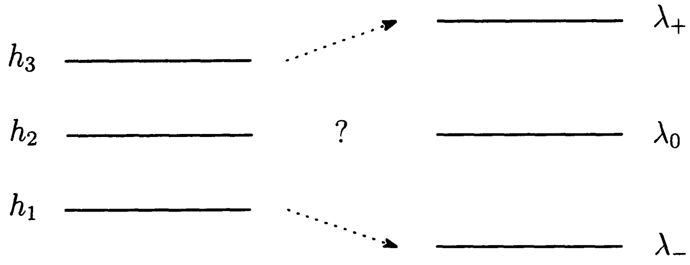
$$H = \begin{pmatrix} h_1 & \bar{\alpha} & \gamma \\ \alpha & h_2 & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \beta & h_3 \end{pmatrix},$$

ここに α, β, γ は複素数である。

[**問題**] ２準位系と同じことが成り立つか？　即ち、初めに３つの状態

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

があり、各々エネルギーは h_1, h_2, h_3 である $(H_0|j\rangle = h_j|j\rangle)$。これらをミックスさせる力 (permutation power ?) があると（h_1 の）エネルギーが下がるのか？



3準位の混合

固有値を計算しよう。

$$
\begin{aligned}
0 &= |\lambda E - H| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - h_1 & -\bar{\alpha} & -\gamma \\ -\alpha & \lambda - h_2 & -\bar{\beta} \\ -\bar{\gamma} & -\beta & \lambda - h_3 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^3 - (h_1 + h_2 + h_3)\lambda^2 + (h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2)\lambda + \\
&\quad |\beta|^2 h_1 + |\gamma|^2 h_2 + |\alpha|^2 h_3 - h_1h_2h_3 - \alpha\beta\gamma - \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}
\end{aligned}
$$

カルダノの公式にこのデータを代入しても意味不明の数式が出てくるだけである。

[練習問題] MATHEMATICA か MAPLE を用いて実行してみよ。

そこで簡単のため

$$h_1 = h_2 = h_3 = m$$

とおく（3重根の場合)。このとき

$$
H = \begin{pmatrix} m & \bar{\alpha} & \gamma \\ \alpha & m & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \beta & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{\alpha} & \gamma \\ \alpha & 0 & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \beta & 0 \end{pmatrix} \equiv mE + F
$$

で、F の固有多項式は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(\mu) &= |\mu E - F| \\
&= \begin{vmatrix} \mu & -\bar{\alpha} & -\gamma \\ -\alpha & \mu & -\bar{\beta} \\ -\bar{\gamma} & -\beta & \mu \end{vmatrix} \\
&= \mu^3 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2)\mu - (\alpha\beta\gamma + \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}).
\end{aligned}
$$

ここで

$$\alpha = r_1 e^{i\theta_1}, \quad \beta = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \gamma = r_3 e^{i\theta_3}$$

とおくと 固有多項式は

$$f(\mu) = \mu^3 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)\mu - 2r_1r_2r_3\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

となる。このとき解は書き下せて

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}\cos\frac{\phi}{3}, \\
\mu_2 &= 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \\
\mu_3 &= 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

となる。ここに ϕ は

$$\cos\phi = \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} r_1r_2r_3\ \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

で与えられる。

[練習問題] チェックせよ。このとき公式

$$\cos(3\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi \iff 4\cos^3\phi = \cos(3\phi) + 3\cos\phi$$

に注意すること。

よって H の固有値は

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= m + 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}\cos\frac{\phi}{3}, \\
\lambda_2 &= m + 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \\
\lambda_3 &= m + 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

である。

以上のことから固有値は**周期関数**になり、2準位系とは全く異なる様相を示している。

[**問題**] 2準位系と3準位系でのこの違いは何を意味するのか？

更に

[**問題**] 3準位系での「交換力」とは何なのか？

[**考察**] 3つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する固有ベクトルを $|\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle, |\lambda_3\rangle$ としよう（書き下すのは容易でない)。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は α, β, γ ($\alpha = r_1 e^{i\theta_1}$, $\beta = r_2 e^{i\theta_2}$, $\gamma = r_3 e^{i\theta_3}$) の振動関数なので、ある値で λ_1 が最小だとすると固有状態 $|\lambda_1\rangle$ が選ばれる。

その値が変化して、例えば λ_2 が最小になったときは固有状態 $|\lambda_2\rangle$ が選ばれる。即ち、固有状態の変化 $|\lambda_1\rangle \ \rightarrow |\lambda_2\rangle$ が起こるのである。

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の変化に応じて（最小のそれに対応する）$|\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle, |\lambda_3\rangle$ のどれかに（カメレオンの色のように）変わって（全体としての）安定性を保つのである。まさに「カメレオン現象」で、これが3準位系での「交換力」の正体かもしれない。

[ノート] もし $\gamma = 0$ ならば

$$H = \begin{pmatrix} m & \bar{\alpha} & 0 \\ \alpha & m & \bar{\beta} \\ 0 & \beta & m \end{pmatrix} = mE + F$$

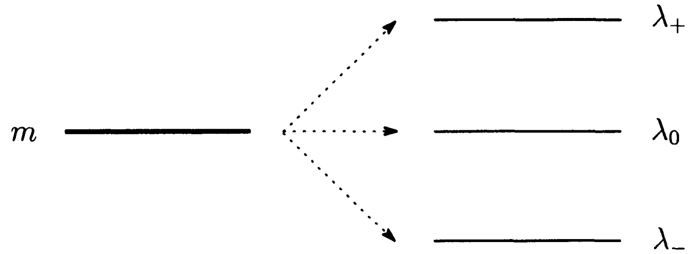
で、F の固有多項式は

$$f(\mu) = \mu^3 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\mu$$

となる。よって H の固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= m + \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \\ \lambda_0 &= m, \\ \lambda_- &= m - \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \end{aligned}$$

となり、2準位系と基本的に同じである。



3準位の混合 ($\gamma = 0$)

最後に少しコメントしておく。制限のないハミルトニアンの固有多項式は

$$\begin{aligned} f(\lambda) \ = \ & \lambda^3 - (h_1 + h_2 + h_3)\lambda^2 + (h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2)\lambda + \\ & |\beta|^2 h_1 + |\gamma|^2 h_2 + |\alpha|^2 h_3 - h_1 h_2 h_3 - \alpha\beta\gamma - \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} \end{aligned}$$

であった。また $\alpha = r_1 e^{i\theta_1}$, $\beta = r_2 e^{i\theta_2}$, $\gamma = r_3 e^{i\theta_3}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^3 - (h_1 + h_2 + h_3)\lambda^2 + (h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)\lambda + \\ &\quad r_2^2 h_1 + r_3^2 h_2 + r_1^2 h_3 - h_1 h_2 h_3 - 2 r_1 r_2 r_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

となる。$f(\lambda) = 0$ の解を求めるため カルダノの公式に代入しても非常に複雑な式になるが、3つの解が周期関数であることは正しい。

[C] **4準位系**

4準位系を調べてみよう。簡単のため以下のハミルトニアンに制限する。

$$H = \begin{pmatrix} m & \bar{\alpha} & 0 & 0 \\ \alpha & m & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & \beta & m & \bar{\gamma} \\ 0 & 0 & \gamma & m \end{pmatrix},$$

ここに α, β, γ は複素数である。

固有多項式は

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda E - H| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - m & -\bar{\alpha} & 0 & 0 \\ -\alpha & \lambda - m & -\bar{\beta} & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda - m & -\bar{\gamma} \\ 0 & 0 & -\gamma & \lambda - m \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - m)^4 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2)(\lambda - m)^2 + |\alpha|^2 |\gamma|^2 \end{aligned}$$

となる。

[練習問題] チェックせよ。

$t = (\lambda - m)^2$ とおくと、$f(\lambda) = 0$ より2次方程式

$$t^2 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2)t + |\alpha|^2 |\gamma|^2 = 0$$

を得る。これより解は

$$\begin{aligned} t &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \pm \sqrt{(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2)^2 - 4|\alpha|^2|\gamma|^2}}{2} \\ &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \pm \sqrt{\{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 - 2|\alpha||\gamma|\}\{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + 2|\alpha||\gamma|\}}}{2} \\ &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \pm \sqrt{\{(|\alpha| - |\gamma|)^2 + |\beta|^2\}\{(|\alpha| + |\gamma|)^2 + |\beta|^2\}}}{2} \end{aligned}$$

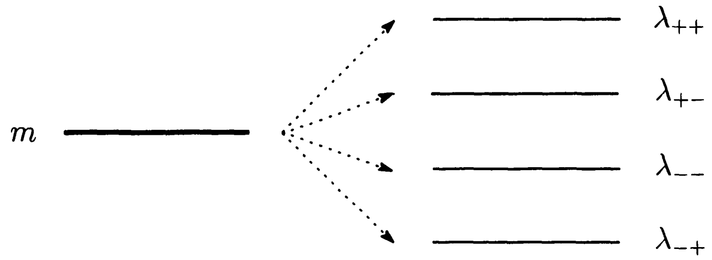
となる。したがって求める λ は

$$\lambda = m \pm \sqrt{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2 \pm \sqrt{\{(|\alpha|-|\gamma|)^2+|\beta|^2\}\{(|\alpha|+|\gamma|)^2+|\beta|^2\}}}{2}}$$

で、4つの解は

$$\begin{aligned}
\lambda_{++} &= m + \sqrt{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2 + \sqrt{\{(|\alpha|-|\gamma|)^2+|\beta|^2\}\{(|\alpha|+|\gamma|)^2+|\beta|^2\}}}{2}}, \\
\lambda_{+-} &= m + \sqrt{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2 - \sqrt{\{(|\alpha|-|\gamma|)^2+|\beta|^2\}\{(|\alpha|+|\gamma|)^2+|\beta|^2\}}}{2}}, \\
\lambda_{--} &= m - \sqrt{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2 - \sqrt{\{(|\alpha|-|\gamma|)^2+|\beta|^2\}\{(|\alpha|+|\gamma|)^2+|\beta|^2\}}}{2}}, \\
\lambda_{-+} &= m - \sqrt{\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2 + \sqrt{\{(|\alpha|-|\gamma|)^2+|\beta|^2\}\{(|\alpha|+|\gamma|)^2+|\beta|^2\}}}{2}}
\end{aligned}$$

となる。基本的に2準位系と同じである。



4準位の混合

[D] **まとめ**

陽子と中性子よりなる原子核は何故安定なのか？

○ 湯川は、陽子 (p) と中性子 (n) の間でパイオン (π^+) を交換することによって引力が生じ、これが核力の正体であると言っている（力学的描像)。

○ 益川の主張は、$p \longrightarrow n+\pi^+$ と壊れることがあるので、原子核は $\{p, n\}$ と $\{n, n, \pi^+\}$ の２つの状態を取りうる。これらの重ね合わせは 各々の単独の状態よりエネルギーが下がるので "引力" となり、これこそが核力の正体であると言っている（量子力学的描像)。

○ 藤井の計算は、３つの状態では**一般に**エネルギーが振動するので益川の主張は必ずしも正しくないと言っている。

参考文献

[1] P. Dirac : The Principles of Quantum Mechanics, Fourth Edition 1958, Oxford University Press.

[2] 細谷暁夫：量子コンピュータの基礎, SGC ライブラリ 4, サイエンス社, 1999.

[3] 益川敏英：いま、もう一つの素粒子論入門, parity books, 丸善株式会社, 1998.

[4] 東京物理サークル：益川さん、むじな沢で物理を語り合う ～素粒子と対称性～, 日本評論社, 2010.

[5] K. Fujii and H. Oike : Riccati Diagonalization of Hermitian Matrices, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **7** (2010), 1437, arXiv : 1004.1207[math-ph].

[6] K. Fujii, K. Higashida, R. Kato and Y. Wada : A Rabi Oscillation in Four and Five Level Systems, Yokohama Mathematical Journal, **53** (2006), 63. quant-ph/0312060.

[7] 大池宏清：３次方程式、４次方程式の実根条件, 準備中.