数理解析研究所講究録
第 1774 巻 2012 年 147-162

等スペクトル変形について - 力学的視点から

桑原 類史
徳島大学・総合科学部
Ruishi KUWABARA[1]
Faculty of Integrated Arts and Sciences, The University of Tokushima

1 はじめに

コンパクト Riemann 多様体 (M, m) 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ のスペクトル(固有値の全体)$\mathrm{Spec}(M, m)$ は,(M, m) の幾何学的不変量との関係において様々な研究が積み重ねられている.一方,(M, m) から自然に余接束上の Hamilton 力学系(測地流の系)$\mathcal{H}_m$ が誘導されることから,$\mathcal{H}_m$ の力学的性質と (M, m) の幾何学的性質の関係についての研究も興味深い.前者の研究における基本的テーマの一つが等スペクトル問題:

『$\mathrm{Spec}(M, m) = \mathrm{Spec}(M', m')$ ならば,$(M, m) \cong (M', m')$(等長的)であるか?』

である.これを巡って,Milnor の反例を皮切りに,1970 年代から,肯定的な結果も含めて,様々な研究がなされて来た.(より広い研究テーマを含むサーベイとして,[5], [16] 等を参照されたい.)

等スペクトル問題の反例の構成についての(一つの)統一的な理論が砂田 [14] によって与えられた.これは,有限な被覆変換群による Riemann 被覆を利用して,等スペクトルな2つの異なる Riemann 多様体を構成する方法を与えるものである.ここで鍵になるのは,“almost-conjugate subgroups”と呼ばれる概念である.

一方,同じ頃,C.S. Gordon 達 [7] が計量の等スペクトル変形,すなわち M 上の Riemann 計量の連続1パラメータ族 $m_t\ (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ で,$\mathrm{Spec}(M, m_t) = \mathrm{Spec}(M, m_0)$ をみたすものの存在を示した.具体的には,ベキ零 Lie 群(または可解 Lie 群)G とその co-compact な離散群 Γ による商多様体(ベキ零多様体)$M = \Gamma\backslash G$ に対して,M 上の Riemann 計量の1パラメータ族で等スペクトルなものを構成した.ここで鍵になる概念は,“almost-inner automorphisms of G”である.

上記2種類の反例における等スペクトル性については,熱核の跡公式に基づいて統一的に証明を与えることができるが([2]),表現論的な見方など,いろいろな視点からアプローチが可能である([5] など).

本論説では,力学系の視点から,等スペクトル性(特に,等スペクトル変形)を議論する.すなわち,ラプラシアン(量子力学系)の等スペクトル性と対応する古典力学系の「同形」との関係に注目して,ベキ零多様体上の力学系の変形について考察する.

(本稿は [11], [12] のアイデアをもとに再考し,まとめたものである.)

[1]e-mail: kuwabara@ias.tokushima-u.ac.jp

2 ベキ零多様体上の等スペクトル変形 (Gordon et al.)

Gを連結，単連結なベキ零 Lie 群とする．Gの Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とすると，$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は全単射である．(逆写像を log とする.)

($\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(i+1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(i)}]$ とすると，ある $r \geq 2$ について，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{(i)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{(r)} (\neq \{0\}) \supset \mathfrak{g}^{(r+1)} = \{0\}.$$

が成り立つ．このような $\mathfrak{g}$ を r-step ベキ零 Lie 代数という.)

ΓをGの co-compact な離散部分群とし，$M := \Gamma \backslash G$ とおく．$\mathfrak{g}$の内積 $\langle , \rangle$ から，Gの左不変計量が誘導され，M 上の Riemann 計量 m が定義される．このようにして得られるコンパクト Riemann 多様体 $(M = \Gamma \backslash G, m)$ を（r-step）**ベキ零多様体 (nilmanifold)** とよぶ.（$r = 1$ のとき，(M, m) は平坦トーラスである.)

Gの自己同形の全体 (群をなす) を $\mathrm{Aut}(G)$ で表し，内部自己同形 (inner automorphism) の全体を $\mathrm{Inn}(G)$ で表すことにする：

$$\mathrm{Inn}(G) := \{\Phi \in \mathrm{Aut}(G) | \exists a \in G \text{ s.t. } \Phi(h) = aha^{-1} \, (h \in G)\}.$$

Gの自己同形は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の自己同形と同一視できる，i.e., $\mathrm{Aut}(G) \ni \Phi$ に対して，$\Phi_* = d\Phi_e \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ で，次を満たす：

$$\Phi(\exp X) = \exp\{\Phi_*(X)\} \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

$\mathfrak{g}$の微分 (derivation) の全体を $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ と表す：

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) := \{\phi \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) | \phi([X,Y]) = [\phi(X), Y] + [X, \phi(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})\}$$

$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の Lie 代数と考える．このとき，$\mathrm{Inn}(G)$ の Lie 代数は，内部微分 (inner derivation) の全体（$\mathrm{ID}(\mathfrak{g})$ で表す）である：すなわち，Gの内部自己同形 $\Phi(h) = aha^{-1}$ $(a \in G)$ に対して，$A = \log a$ とおくと，

$$\Phi_*(X) = \mathrm{Ad}(a)(X) = \exp\{\mathrm{ad}(A)X\} = \exp([A, X]) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

さて，C.S. Gordon 達 ([1], [7] など) は，“almost-inner automorphism” という概念を導入した.

定義 2.1 $\Phi \in \mathrm{Aut}(G)$ が Γ **に関して almost-inner** であるとは，次を満たすことである：

$$\forall \gamma \in \Gamma \text{ に対して，} \exists a_\gamma \in G \;\; s.t. \;\; \Phi(\gamma) = a_\gamma \gamma a_\gamma^{-1}. \tag{2.1}$$

G の Γ に関する *almost-inner automorphism* の全体 を $\mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ と表す.

命題 2.2 *(1)* $\mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の連結なベキ零部分群である.
(2) $\mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ の *Lie* 代数は

$$\mathrm{AID}(\mathfrak{g}; \Sigma) := \{\phi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) | \phi(X) \in [\mathfrak{g}, X] \; for \; \forall X \in \Sigma\}$$

である．ただし，$\Sigma (\subset \mathfrak{g})$ は $\log \Gamma$ で生成される $\mathfrak{g}$ の “格子”である.

$\phi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ に対して，G の自己同形写像の1パラメータ族 $\Phi_t (t \in \mathbb{R})$ で $\Phi_{t*} := \exp(t\phi) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を満たすものが一意的に定まる．$\Gamma_t := \Phi_t(\Gamma)$ とおくと，Γ_t は G の co-compact な離散部分群である．これより，ベキ零多様体の族 $(M_t = \Gamma_t \backslash G, m)$ が得られる．

定理 2.3 (Gordon et al.) $\phi \in \mathrm{AID}(\mathfrak{g}; \Sigma)$ から定まる G の自己同形族 $\Phi_t \in \mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ に対して，$\mathrm{Spec}(M_t = \Gamma_t \backslash G, m) = \mathrm{Spec}(M = \Gamma \backslash G, m)$ が成り立つ．

$(M_t = \Gamma_t \backslash G, m) \cong (M = \Gamma \backslash G, \Phi_t^* m)$（等長的）だから，

系 2.4 $\phi \in \mathrm{AID}(\mathfrak{g}; \Sigma)$ から定まる G の自己同形族 $\Phi_t \in \mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ に対して，$\mathrm{Spec}(M, \Phi_t^* m) = \mathrm{Spec}(M, m)$ が成り立つ．すなわち，$\Phi_t^* m$ は M 上の計量の等スペクトル変形である．

註. ϕ が内部微分，すなわち Φ_t が内部自己同形写像の族であるとき，$(M_t, m) \cong (M, \Phi_t^* m)$ は (M, m) に等長的である．実際，$\forall h \in G$ に対して，$\Phi_t(h) = a_t h a_t^{-1} (a_t \in G)$ とするとき，a_t による G 上の左移動 $L_{a_t} : h \mapsto a_t h$ は (G, m) の等長変換であり，また，$h' = \gamma h (\gamma \in \Gamma)$ ならば，$L_{a_t}(h') = \Phi_t(\gamma) L_{a_t}(h)$ を満たす．よって，L_{a_t} は $(\Gamma \backslash G, m)$ から $(\Gamma_t \backslash G, m)$ の等長写像を与える．■

定理 2.3（あるいは系 2.4）の証明は，表現論（Kirillov 理論）によるもの ([1], [7]) や熱方程式の基本解の跡公式を基づくもの ([2]) などがある．

3 ベキ零多様体上の力学系

G を連結 Lie 群とする．余接束 T^*G を $T_h^*G \ni \xi \mapsto (h, L_h^* \xi) \in G \times \mathfrak{g}^*$ によって，$G \times \mathfrak{g}^*$ と同一視する（$\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ の双対空間）．$G \times \mathfrak{g}^* (= T^*G)$ には自然なシンプレクティック形式 $\omega = -d\theta$ が導入される．

命題 3.1 $T_{(h,\mu)}(G \times \mathfrak{g}^*) \cong T_h G \times \mathfrak{g}^*$ とするとき，θ, ω は以下のように表される：
(1) $\theta(h, \mu)(v, \rho) = \mu(L_{h^{-1}*} v)$,
(2) $\omega(h, \mu)((v, \rho), (w, \sigma)) = -\rho(L_{h^{-1}*} w) + \sigma(L_{h^{-1}*} v) + \mu([L_{h^{-1}*} v,\ L_{h^{=1}*} w])$.

G 上の左不変計量 m（$\mathfrak{g}$ の内積 $\langle , \rangle$ から誘導）から定まる $G \times \mathfrak{g}^*$ 上の関数（Hamiltonian）を

$$H(h, \mu) = \frac{1}{2} \langle \mu, \mu \rangle^* = \frac{1}{2} \langle \mu^\#, \mu^\# \rangle$$

で定義する．ただし，$\mu^\# \in \mathfrak{g}$ は $\mu(v) = \langle \mu^\#, v \rangle (\forall v \in \mathfrak{g})$ で与えられる．このようにして，Hamilton 力学系（測地流の力学系）$(G \times \mathfrak{g}^*, \omega, H)$ が定義される．

H から定まる Hamilton ベクトル場 X_H，すなわち，フローの接ベクトルは次の通りである：

$$X_H(h, \mu) = (L_{h*}(\mu^\#), \mathrm{ad}^*(\mu^\#)\mu) \ \in T_h G \times \mathfrak{g}^*. \tag{3.1}$$

ただし，$\mathrm{ad}^*(\mu^\#)$ は $\mathrm{ad}(\mu^\#) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g};\ w \mapsto [\mu^\#, w]$ の随伴作用素 (dual operator) である．

3.1 ベキ零多様体上の古典力学系

さて,(§2での議論と同様に) G を連結, 単連結なベキ零Lie群とし, Γ を G のco-compactな離散部分群, $M=\Gamma\backslash G$ とする. Γ は G に左から等長変換として作用する. また, この作用を余接束 $G\times\mathfrak{g}^*$ に持ち上げた作用は ω を不変にする. よって, 力学系 $(G\times\mathfrak{g}^*,\omega,H)$ の商力学系 (M 上の測地流の系)

$$\mathcal{H}=(M\times\mathfrak{g}^*,\omega,H)$$

が得られる.

G の中心を $Z=\exp\mathfrak{z}$ とする ($\dim Z=r$). 商群 $G_1:=G/Z$ は連結, 単連結ベキ零Lie群である. 射影 $\pi:G\to G_1$ に対し, $\Gamma_1:=\pi(\Gamma)\subset G_1$ とおく.

補題 3.2 (Malcev 基底 [8]) *G の co-compact な離散部分群 Γ に対して, $\mathfrak{g}$ の基底(Malcev 基底と呼ばれる) $\{u_1,\ldots,u_n\}$ で, 以下の (1)〜(3) を満たすものが存在する:*

(1) $\mathfrak{z}=<u_{s+1},\ldots,u_n>$.

(2) $\varphi:\mathbb{R}^n\to G;\ (x_1,\ldots,x_n)\mapsto\exp(x_1u_1)\cdots\exp(x_nu_n)$ が微分同相である.

(3) $\Gamma=\{\exp(m_1u_1)\cdots\exp(m_nu_n)\mid m_j\in\mathbb{Z},1\le j\le n\}$.

補題 3.3 *(1) $Z\cap\Gamma$ は Z の co-compact な離散部分群であり, $T:=Z\cap\Gamma\backslash Z$ は r 次元トーラスである.*

(2) Γ_1 は G_1 の co-compact な離散部分群である.

このとき, 主 T 束

$$\hat{\pi}:\ M\ \to M_1:=\Gamma_1\backslash G_1 \tag{3.2}$$

が得られる. ここで, 構造群 T が M に右から作用しているとする.

■ **簡約力学系**

T の M 上の作用から, 自然に $M\times\mathfrak{g}^*(=T^*M)$ 上のシンプレクティック作用が誘導され, 対応する Ad^*-共変運動量写像 $J:M\times\mathfrak{g}^*\ \to\mathfrak{z}^*$ が定義され, 次で与えられる:

$$J([h],\mu)(v)=\mu(\mathrm{Ad}(h^{-1})v)=\mu(v)\quad(\forall v\in\mathfrak{z}\subset\mathfrak{g}).$$

任意の $\kappa\in\mathfrak{z}^*$ に対して, 簡約相空間 (P_κ,ω_κ) ($2(n-r)$ 次元シンプレクティック多様体) が得られる. ここで,

$$P_\kappa:=J^{-1}(\kappa)/T=\{([h_1],\mu_0+\mu_1)\mid[h_1]\in M_1(=\Gamma_1\backslash G_1),\mu_1\in\mathfrak{z}^\perp\}$$

である. ただし, $\mu_0\in\mathfrak{g}^*$ は $\mu_0(v)=\kappa(v)\ (\forall v\in\mathfrak{z})$ で定義される. また, T^*M 上の関数 H より, P_κ 上の Hamilton 関数 H_κ が誘導される:

$$H_\kappa([h_1],\mu)=\frac{1}{2}\langle\mu,\mu\rangle^*.$$

このように，簡約力学系 $\mathcal{H}_\kappa = (P_\kappa, \omega_\kappa, H_\kappa)$ が得られる．

■ 磁場の古典力学系

内積 $\langle\ ,\ \rangle$ について，$\mathfrak{g}$ の直交分解が得られる：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus W. \tag{3.3}$$

これは主 T 束 (3.2) の接続 $\tilde{\nabla}$ を定義する．すなわち，接空間 $T_hM \cong \mathfrak{g}$ において，$\mathfrak{z}$ が垂直空間，W が水平空間を与える．

命題 3.4 接続 $\tilde{\nabla}$ の接続形式 $\tilde{\theta}$ ($\mathfrak{z}$ 値 1 形式)，曲率形式 $\tilde{\Theta}$($\mathfrak{z}$ 値 2 形式) は次で与えられる：

(1) $\tilde{\theta}([h])(X) = (L_{h^{-1}*}X)_\mathfrak{z} \quad (X \in T_{[h]}M)$,

(2) $\tilde{\Theta}([h])(L_{h*}v, L_{h*}w) = -[v,w]_\mathfrak{z} \quad (v, w \in \mathfrak{g})$.

ただし，$v \in \mathfrak{g}$ に対して，$v_\mathfrak{z}$ は v の $\mathfrak{z}$ 成分を表す．

M 上の曲率形式 $\tilde{\Theta}$ は M_1 上の 2 形式 Θ と見なせる．すなわち，$\pi(h) = h_1 \in G_1$ $(h \in G)$, $\pi_*(v) = v_1, \pi_*(w) = w_1$ $(v, w \in \mathfrak{g},\ v_1, w_1 \in \mathfrak{g}_1)$ とするとき，

$$\Theta([h_1])(L_{h_1*}v_1, L_{h_1*}w_1) = -[v,w]_\mathfrak{z} = \tilde{\Theta}([h])(L_{h*}v, L_{h*}w).$$

また，Θ は G_1 の M_1 上左作用で不変である．

直和分解 (3.3) の双対を考える：

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{z}^\perp \oplus W^\perp, \quad W^\perp \cong \mathfrak{z}^*.$$

このとき，$\mu_0 = \kappa \in W^\perp = \mathfrak{z}^*$ ととると，

$$P_\kappa = \{([h_1], \kappa + \mu_1) \mid [h_1] \in M_1, \mu_1 \in \mathfrak{z}^\perp\}$$

と表せる．$\pi : G \to G_1 = G/Z$ より，$W \cong \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1^* \cong \mathfrak{z}^\perp$ であることに注意して，微分同相写像

$$\chi_\kappa : P_\kappa \to M \times \mathfrak{g}_1^* (= T^*M_1)\ ;\ ([h_1], \kappa + \mu_1) \mapsto ([h_1], \mu_1)$$

が定義される．(χ_κ は直和分解 (3.3) に依存する．)

微分同相写像 χ_κ によって，$\Omega_\kappa^{(1)} := (\chi_\kappa^{-1})^*\omega_\kappa$, $H_\kappa^{(1)} := (\chi_\kappa^{-1})^*H_\kappa$ は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}
&\Omega_\kappa^{(1)}([h_1], \mu_1)(\rho, \sigma) \\
&\quad = -\nu(w_1) + \tau(v_1) + \mu_1([v_1, w_1]) - \kappa\Theta([h_1])(L_{h_1*}v_1, L_{h_1*}w_1) \\
&\quad = \omega^{(1)}([h_1], \mu_1)(\rho, \sigma) - \kappa\hat{\Theta}([h_1], \mu_1)(\rho, \sigma), \\
&\qquad (\rho = (L_{h_1*}v_1, \nu), \sigma = (L_{h_1*}w_1, \tau);\ v_1, w_1 \in \mathfrak{g}_1,\ \nu, \tau \in \mathfrak{g}_1^*)
\end{aligned}$$

$$H_\kappa^{(1)}([h_1], \mu_1) = \frac{1}{2}\langle \mu_1, \mu_1 \rangle_1^* + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2.$$

$$
\begin{tikzcd}
 & M \times \mathfrak{g}^* \arrow[dl] \arrow[r, "J"] & \mathfrak{z}^* \\
M \arrow[dd, "\hat{\pi}"] & J^{-1}(\kappa) \arrow[u, "\mathrm{incl.}"'] \arrow[d, "\pi_\kappa"] & \\
 & P_\kappa (= J^{-1}(\kappa)/T) \arrow[d, "\chi_\kappa", "\cong"'] & \\
M_1 & M_1 \times \mathfrak{g}_1^* \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

図 1: 力学系の簡約

ここで，$\omega^{(1)}$ は $M_1 \times \mathfrak{g}_1^* (= T^*M_1)$ の標準シンプレクティック形式を表し，$\hat{\Theta}$ は M_1 上の $\mathfrak{z}$ 値 2 形式 Θ を $T^*M_1 \to M_1$ によって，T^*M_1 上に持ち上げたものである．また，$\langle \cdot , \cdot \rangle_1^*$ は $\mathfrak{g}_1^*$ の内積である．このように，$\mathcal{H}_\kappa$ と同値の力学系 $\mathcal{H}_\kappa^{(1)} = (M_1 \times \mathfrak{g}_1^*, \Omega_\kappa^{(1)}, H_\kappa^{(1)})$ が得られる．M_1 上の実数値 2 形式 $\kappa\Theta$ を M_1 **上の磁場**という．

■ **周期軌道，閉測地線**

$\Lambda = \mathfrak{z} \cap \log \Gamma$ とおく．Λ は $\mathfrak{z}$ の格子である．Λ に対して，

$$\Lambda^\flat := \{ \kappa \in \mathfrak{z}^* \mid \kappa^\# \in \Lambda \} \subset \mathfrak{z}^*$$

と定義する．ただし，$\kappa^\#$ は，$\langle \, , \, \rangle_\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{z} (\subset \mathfrak{g})$ の内積とするとき, $\kappa(v) = \langle \kappa^\#, v \rangle_\mathfrak{z} \ (\forall v \in \mathfrak{z})$ で定義される．$\Lambda^\flat$ を**内積** $\langle \, , \, \rangle_\mathfrak{z}$ **に関する** Λ **の双対格子**と呼ぶ．

(M, m) の閉測地線に対して，力学系 $\mathcal{H} = (M \times \mathfrak{g}^*, \omega, H)$ の周期軌道で，最小周期 1 のものを対応させることができる．

命題 3.5 $c(t)$ を $\mathcal{H}$ の基本周期 1 の周期軌道とする．このとき，$\kappa \in \Lambda^\flat$ が存在し，$c(t) \in J^{-1}(\kappa)$ である．

(証明) $c(t) = ([h(t)], \mu(t)) \in M \times \mathfrak{g}^*$ を力学系 $\mathcal{H}$ の周期 1 の周期軌道とし，$h(0) = e$ とする．このとき，$J(c(t)) \, (\in \mathfrak{z}^*)$ は一定であり，その値を κ とする．従って，

$$\mu(t)(v) = \kappa(v) \quad \text{for } \forall v \in \mathfrak{z}.$$

一方，$c(t) = ([h(t)], \mu(t))$ の運動方程式は

$$\dot{h}(t) = L_{h(t)*}(\mu(t)^\#), \qquad \dot{\mu}(t) = \mathrm{ad}^*(\mu(t)^\#)\mu(t).$$

従って，任意の $v \in \mathfrak{z}$ に対して，

$$\left\langle (L_{h(t)*})^{-1}(\dot{h}(t)), v \right\rangle = \langle \mu(t)^\#, v \rangle = \mu(t)(v) = \kappa(v) = \langle \kappa^\#, v \rangle (\text{一定}).$$

ゆえに，Malcev 基底を使って，

$$h(t)=\exp(x_1(t)u_1)\cdots\exp(x_s(t)u_s)\exp(x_{s+1}(t)u_{s+1})\cdots\exp(x_n(t)u_n) \tag{3.4}$$

とおくとき，

$$x_{s+1}(t)=\kappa_{s+1}t,\ \ldots,\ x_n(t)=\kappa_n t$$

である．ただし，$\kappa^{\#}=\kappa_{s+1}u_{s+1}+\cdots+\kappa_n u_n\in\mathfrak{z}$ とする．$[h(t)]$ は $M=\Gamma\backslash G$ 上の周期 1 の周期軌道だから，$h(1)\in\Gamma$ が成り立つ．従って，$\kappa_j\in\mathbb{Z}\,(s+1\leq j\leq n)$，すなわち，$\kappa^{\#}\in\Lambda=\mathfrak{z}\cap\log\Gamma$. ■

系 3.6 (M,m) の閉測地線の集合は

$$\Big(\bigcup_{\kappa\in\Lambda^{\flat}}\{\mathcal{H}_\kappa\text{ の周期軌道 }\}\Big)\cup\{\text{ ファイバー }T\text{ 上の閉測地線 }\}$$

と 1 対 1 対応がつく．

(証明) $c(t)$ を $J^{-1}(\kappa)$ の周期軌道とする．$\pi_\kappa: J^{-1}(\kappa)\to P_\kappa=J^{-1}(\kappa)/T$ とするとき，(3.4) より，$\pi_\kappa(c(t))$ は P_κ 上の周期軌道であることが分かる．また，$\pi_\kappa(c(t))=1$ 点の場合，$c(t)$ はファイバー T の周期軌道になっている．よって，系がいえる． ■

3.2 磁場の量子力学系

$\mathfrak{z}$ 内の格子 Λ に対して，

$$\Lambda^*:=\{\lambda\in\mathfrak{z}^*|\,\lambda(v)\in\mathbb{Z}\text{ for }\forall v\in\Lambda\}$$

とおく．各 $\lambda\in\Lambda^*$ に対して，T のユニタリ表現 $\rho_\lambda: T\to\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\backslash\{0\}$：

$$\rho_\lambda(t)=e^{-2\pi i\lambda(v)}\qquad(t=[\exp v]\in T,\ v\in\mathfrak{z})$$

を考える．表現 ρ_λ によって，主 T 束 $\hat{\pi}: M\to M_1$ の同伴 Hermite 直線束

$$E_\lambda:=M\times_{\rho_\lambda}\mathbb{C}\to M_1$$

が誘導される．E_λ には，$\widetilde{\nabla}$ から誘導された線形接続 $\widetilde{\nabla}^{(\lambda)}$ が定義される．4 つ組

$$Q_\lambda=(M_1,m_1;E_\lambda,\widetilde{\nabla}^{(\lambda)})$$

を古典力学系 $\mathcal{H}^{(1)}_\lambda$ に対する量子力学系と考える．接続 $\widetilde{\nabla}^{(\lambda)}$ より，E_λ の L^2 断面の空間 $L^2(E_\lambda)$ 上の 2 階対称楕円型作用素

$$D^{(\lambda)}:=-\sum_{j,k}m_1^{jk}\widetilde{\nabla}^{(\lambda)}_j\widetilde{\nabla}^{(\lambda)}_k$$

が定義される．これを**磁場付き Schrödinger 作用素**と呼ぶ．

M 上の L^2 関数 f で $f(xk)=\rho_\lambda(k)f(x)$ $(x\in M, k\in T)$ を満たすもののなす空間を $L^2_\lambda(M)$ とすると，$L^2(M)=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda^*}L^2_\lambda(M)$ であり，また，$L^2_\lambda(M)$ と $L^2(E_\lambda)$ はユニタリ同形であることがいえる．この同形によって，(M,m) 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ と $D^{(\lambda)}$ について，次の対応関係が成り立つ：

$$\Delta|_{L^2_\lambda(M)} \sim D^{(\lambda)}+4\pi^2|\lambda|^2.$$

(詳細は [11] 参照)．従って，$\mathrm{Spec}(D^{(\lambda)})=\{\mu_j^{(\lambda)}|\, j\in\mathbb{N}\}$ とするとき，古典力学系の系 3.6 に対応する次の命題が成り立つ．

命題 3.7 $\mathrm{Spec}(M,m)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda^*}\{\,\mu_j^{(\lambda)}+4\pi^2|\lambda|^2\mid j\in\mathbb{N}\,\}.$

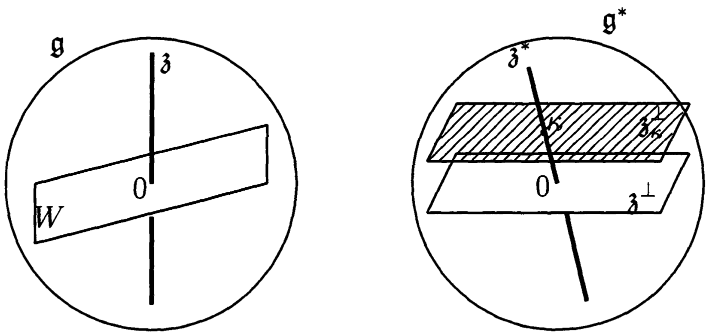
4 PRITと力学系の変形

4.1 Pseudo-restricted-inner transformations

$G,\Gamma,Z,\mathfrak{g},\mathfrak{z},\ldots$ を前節と同様とする．

$\kappa\in\mathfrak{z}^*(\cong\mathfrak{g}^*/\mathfrak{z}^\perp)$ に対して，$\mathfrak{g}^*$ の部分集合 $\mathfrak{z}_\kappa^\perp$ を次のように定義する：

$$\mathfrak{z}_\kappa^\perp := \begin{cases}\{\kappa+\mu_1\mid \mu_1\in\mathfrak{z}^\perp\} & (\kappa\neq 0)\\ \mathfrak{z}^\perp\backslash\{0\} & (\kappa=0)\end{cases}$$



定義 4.1 (PRIT, RIT) $\kappa\in\mathfrak{z}^*$ とする．$\mathfrak{g}$ の線形変換 ϕ が κ **に関する pseudo-restricted-inner transformation (PRIT)** であるとは，次の *(i)*, *(ii)* を満たすことである：

(i) 滑らかな写像 $Y_\kappa:\mathfrak{z}_\kappa^\perp\to W\subset\mathfrak{g}$ が存在して，$\forall\mu\in\mathfrak{z}_\kappa^\perp$ に対し，

$$\phi^*\mu=\mathrm{ad}^*(Y_\kappa(\mu))\mu$$

が成り立つ．(ϕ^* は ϕ の双対変換)

(ii) $Y_\kappa(\mu)\in W=(\mathfrak{z}^\perp)^*$ が $\mathfrak{z}_\kappa^\perp$ 上の 1 形式として閉形式である．

さらに，$Y_\kappa(\mu)$ が $\mathfrak{z}_\kappa^\perp$ 上で一定であるとき，ϕ を **restricted-inner transformation (RIT)** と呼ぶ．

κ に関する PRIT の全体（resp. RIT の全体）を $\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};\kappa)$ （resp. $\mathrm{RIT}(\mathfrak{g};\kappa)$）と表す．$\mathfrak{z}^*$ の部分集合 S に対して，

$$\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};S) := \bigcap_{\kappa\in S} \mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};\kappa), \quad \mathrm{RIT}(\mathfrak{g};S) := \bigcap_{\kappa\in S} \mathrm{RIT}(\mathfrak{g};\kappa)$$

とおく．特に，$S=\mathfrak{z}^*$ のとき，$\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{RIT}(\mathfrak{g})$ と表す．

註． PRIT についての条件 (ii) は，具体的に述べれば，以下のようになる：$\mathfrak{g}$ の基底 $\{u_1,\ldots,u_n\}$ で，

$$< u_1,\ldots,u_s >= W, \quad < u_{s+1},\ldots,u_n >= \mathfrak{z} \qquad (s=n-r)$$

となるものをとる．$\{u_1^*,\ldots,u_n^*\}$ を $\{u_j\}$ の双対基底とすると，

$$< u_1^*,\ldots,u_s^* >= \mathfrak{z}^\perp, \quad < u_{s+1}^*,\ldots,u_n^* >= \mathfrak{z}^* = W^\perp.$$

$\mathfrak{z}_\kappa^\perp$ の元は $\kappa+\sum_{j=1}^s \mu_j u_j^*$ と表されるから，$\mathfrak{z}_\kappa^\perp$ の座標として，$(\mu_1,\ldots,\mu_s)$ をとると，

$$Y_\kappa(\mu) = \sum_{j=1}^s Y^j(\mu_1,\ldots,\mu_s)u_j \in W$$

と書ける．このとき，条件 (ii) は

$$\frac{\partial Y^j}{\partial \mu_k} - \frac{\partial Y^k}{\partial \mu_j} = 0 \qquad (1\le j,k\le s)$$

を意味する．

補題 4.2 *(1)* ϕ が $\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};\Lambda^*)$ または $\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};\Lambda^\flat)$ の要素ならば，$\phi(\mathfrak{z})=\{0\}$．
(2) $\mathfrak{g}$ が *2-step* ベキ零 *Lie* 代数ならば，次が成り立つ：

$$\mathrm{RIT}(\mathfrak{g}) = \mathrm{PRIT}(\mathfrak{g}) = \mathrm{AID}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{RIT}(\mathfrak{g};\Lambda^*) = \mathrm{PRIT}(\mathfrak{g},\Lambda^*) = \mathrm{AID}(\mathfrak{g};\Sigma).$$

4.2 古典力学系の変形

$\phi\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に対して，$\Phi_{t*}:=\exp(t\phi)\in GL(\mathfrak{g})$ により，$\mathfrak{g}$ の内積の変形

$$\langle X,Y\rangle_t := \langle \Phi_{t*}(X),\Phi_{t*}(Y)\rangle \qquad (X,Y\in\mathfrak{g})$$

が定義され，$M=\Gamma\backslash G$ の計量の 1 パラメータ族 m_t が得られる．これに対応して，Hamilton 力学系の 1 パラメータ族

$$\mathcal{H}_t = (T^*M,\omega,H_t), \quad \mathcal{H}_{\kappa,t} = (P_\kappa,\omega_\kappa,H_{\kappa,t}), \quad \mathcal{H}^{(1)}_{\kappa,t} = (T^*M_1,\Omega^{(1)}_{\kappa,t},H^{(1)}_{\kappa,t})$$

が得られる．ここで，$\mathcal{H}_{\kappa,t}\cong\mathcal{H}^{(1)}_{\kappa,t}$ である．

註． $\phi\in\mathrm{ID}(\mathfrak{g})$ ならば，(M,m_t) は (M,m_0) と等長的である．すなわち，M の 1 パラメータ微分同相写像 $\psi_t: M\to M$ で $m_t=\psi_t^* m_0$ を満たすものが存在する．実際，$\phi=\mathrm{ad}(Y)$ $(Y\in\mathfrak{g})$ とするとき，$\psi_t:=R_{\exp(tY)}$ ($\exp(tY)\in G$ による右移動) が求める ψ_t である．このような 1 パラメータ変形 m_t を**自明な変形**と呼ぶ．

定理 4.3 **([11])** ϕ が $\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};\kappa)\,(\kappa\in\mathfrak{z}^*)$ に属するならば，$\forall t$ に対して，*Hamilton* 力学系として，$\mathcal{H}_{\kappa,t}\cong\mathcal{H}_{\kappa,0}$ が成り立つ．すなわち，P_κ の 1 パラメータ微分同相写像 $\psi_t: P_\kappa\to P_\kappa$ で

$$\psi_t^*\omega_\kappa=\omega_\kappa,\qquad \psi_t^*H_{\kappa,0}=H_{\kappa,t} \tag{4.1}$$

を満たすものが存在する．

(証明) $\phi\in\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};\kappa)$ が

$$\phi^*\mu=\mathrm{ad}^*(Y_\kappa(\mu))\mu\qquad(\mu\in\mathfrak{z}_\kappa^\perp,\,Y_\kappa(\mu)\in W)$$

を満たすとする．$Y_\kappa^{(1)}:=\pi_*\circ Y_\kappa:\mathfrak{z}_\kappa^\perp\to\mathfrak{g}_1(=\mathfrak{g}/\mathfrak{z})$ として，P_κ 上のベクトル場 V_κ を

$$V_\kappa([h_1],\mu)=\left(L_{h_1*}(Y_\kappa^{(1)}(\mu)),-\phi^*\mu\right)\ \in T_{[h_1]}M_1\times\mathfrak{z}^\perp \tag{4.2}$$

と定義する．このとき，

$$\mathcal{L}_{V_\kappa}\omega_\kappa=0,\qquad V_\kappa H_{\kappa,t}=H'_{\kappa,t}\left(=\frac{d}{dt}H_{\kappa,t}\right) \tag{4.3}$$

が示せる．M_1 がコンパクトだから，1 パラメータ微分同相写像 $\psi_t\,(t\in\mathbb{R})$ で

$$\frac{d}{dt}\psi_t=V_\kappa\circ\psi_t$$

を満たすものが存在し，(4.1) が成り立つ． ■

$Y_\kappa^{(1)}(\mu)=\sum_{j=1}^s Y^j(\mu)u_j$ について，$\mathfrak{z}_\kappa^\perp$ 上の 1 形式 $\alpha=\sum_{j=1}^s Y^j(\mu)d\mu_j$ を考えると，α は閉であり，ある関数 f_κ によって，$\alpha=df_\kappa$ となる．このとき，P_κ 上の関数 F_κ を

$$F_\kappa([h_1],\mu):=-f_\kappa(\mu)$$

で定義すると，ベクトル場 V_κ は F_κ の Hamilton ベクトル場であることが分かる，すなわち，$V_\kappa\rfloor\omega_\kappa=dF_\kappa$．よって，(4.3) より，

$$\{F_\kappa,H_{\kappa,t}\}_\kappa=H'_{\kappa,t} \tag{4.4}$$

が成り立つ．ただし，$\{\cdot,\cdot\}_\kappa$ は Poisson 括弧を表す．

さらに，$\chi_{\kappa,t}:P_\kappa\to T^*M_1$ によって，T^*M_1 上の "変形" 方程式

$$\{F_{\kappa,t}^{(1)},H_{\kappa,t}^{(1)}\}_{\kappa,t}^{(1)}=H'^{(1)}_{\kappa,t}. \tag{4.5}$$

が得られる．ここで，$H'^{(1)}_{\kappa,t}:=(\chi_{\kappa,t}^{-1})^*(H'_{\kappa,t})$ である．

■ Length spectrum

一般に，コンパクト Riemann 多様体 (M,m) に対して，$\mathrm{Spec}_L(M,m)$ を (M,m) の閉測地線の長さの集合とする．ここで，$l\in\mathrm{Spec}_L(M,m)$ の重複度を長さ l の互いにホモトピックでない閉測地線の個数として，重複度を込めて考える．$\mathrm{Spec}_L(M,m)$ を **length spectrum** と呼ぶ．

ベキ零多様体 $M=\Gamma\backslash G$ について，系 3.6 と定理 4.3 より，次がいえる．

定理 4.4 ϕ が $\mathrm{PRIT}(\mathfrak{g};\Lambda^b)$ に属するならば，$\forall t$ に対して，$\mathrm{Spec}_L(M,m_t)=\mathrm{Spec}_L(M,m_0)$ が成り立つ．

註. Gordon 達の $\mathrm{AIA}(G,\Gamma)$ による定式化における同様な結果は [3] を参照されたい．

4.3 Lax 方程式 - 等スペクトル性

$\lambda \in \Lambda^*$ とする．古典力学系の 1 パラメータ族 $\mathcal{H}^{(1)}_{\lambda,t}$ に対応して，量子力学系の 1 パラメータ族 $Q_{\lambda,t}$ における磁場付き Schrödinger 作用素 $D^{(\lambda)}_t$ を考える．$D^{(\lambda)}_t$ に対して，歪対称作用素 B_t で

$$[B_t, D^{(\lambda)}_t] = (D^{(\lambda)}_t)' \tag{4.6}$$

を満たすものが存在したとする．このとき，(適当な条件の下で)

$$U'_t = B_t U_t, \quad D^{(\lambda)}_t = U_t D^{(\lambda)}_0 U_t^{-1}$$

をみたすユニタリ作用素の 1 パラメータ族が得られる．よって，$D^{(\lambda)}_t$ は等スペクトル作用素族である．(4.6) 式（ソリトン理論に倣って Lax 方程式と呼ぶことにする）は古典力学系の変形方程式 (4.5) の量子化版である．適当な量子化ルールを定義し，(4.5) 式を満たす $F^{(1)}_{\lambda,t}$ の量子化作用素 B_t が Lax 方程式 (4.6) を満たすことを示したい．

■ **量子化ルール**

M_1 の局所座標を $(x_1, \ldots, x_s)$ とし，$(x_1, \ldots, x_s, \xi_1, \ldots, \xi_s)$ を T^*M_1 の正準座標とする．

量子化ルール $Q : \{T^*M_1$上の多項式関数$\} \to \{L^2(E_\lambda)$ の対称作用素$\}$ を以下のように定義する：

- $\widetilde{D}^{(\lambda)}_j := -i\widetilde{\nabla}^{(\lambda)}_j$ として，$\xi_1, \ldots, \xi_s$ の p 次同次多項式

$$F_p(x, \xi) = \sum a^{j_1\cdots j_p}(x)\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_p}$$

に対して，

$$Q_p(F_p) = \sum_{q=0}^{p} c^{(p)}_{p-q} \sum_{j_1\cdots j_p} (D_{j_1}\cdots D_{j_p} a^{j_1\cdots j_p})\widetilde{D}^{(\lambda)}_{j_{q+1}}\cdots\widetilde{D}^{(\lambda)}_{j_p}$$

とおく．ここで，実数値係数 $c^{(p)}_{p-q}$ $(0 \le q \le p)$ は $Q_p(F_p)$ が対称作用素になるように次のように定義される：

$$c^{(p)}_p = 1, \qquad c^{(p)}_{p-2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$c^{(p)}_{p-2k+1} = \frac{1}{2}\left\{\binom{p}{2k-1} - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{p-2j+1}{2k-2j}c^{(p)}_{p-2j+1}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

- 一般の多項式

$$F(x, \xi) = \sum_{p=0}^{m}\sum a^{j_1\cdots j_p}(x)\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_p}$$

に対して，$Q(F) = \sum_{p=0}^{m} Q_p(F_p)$ と定義する．

さて，$\phi \in \mathrm{PRIT}(\mathfrak{g}; \Lambda^*)$ に対する M の計量の変形 m_t について考える．これについて，以下の結果が得られる（[12]）．

補題 4.5 *(1)* (M, m_t) および $(M_1, m_{1,t})$ の体積要素は t に依らず一定である．
(2) $\hat{\pi} : M \to M_1$ のファイバー T の計量は t に依らず一定である．
(3) $\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}$ ならば，$(M_1, m_{1,t})$ は t に依らず不変である．

系 4.6 $\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}$ を満たすとき，各 $\lambda \in \Lambda^*$ に対して，*Hermite* 直線束 $E_\lambda \to (M_1, m_1)$ における接続の *1* パラメータ族 $\tilde{\nabla}_t^{(\lambda)}$ が得られる．

補題 4.7 $Q(H_{\lambda,t}^{(1)}) = \frac{1}{2}D_t^{(\lambda)}$, $Q({H'_{\lambda,t}}^{(1)}) = \frac{1}{2}(D_t^{(\lambda)})'$.

定理 4.8 $\phi \in \mathrm{RIT}(\mathfrak{g}; \lambda) \cap \mathrm{PRIT}(\mathfrak{g}; \Lambda^*)$ とする．このとき
(1) $F_{\lambda,t}^{(1)}$ は ξ の 1 次多項式である：$F_{\lambda,t}^{(1)}(x, \xi) = \sum_{j=1}^{s} c^j(x)\xi_j + f(t)$.
(2) $B_t = Q(F_{\lambda,t}^{(1)}) = \sum_{j=1}^{s} c^j(x)\tilde{\nabla}_j^{(\lambda)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} \nabla_j c(x) + if(t)$ は *Lax* 方程式 *(4.6)* を満たす．
(3) E_λ の自己同型写像 ψ_t が存在し，$\tilde{\nabla}_t^{(\lambda)} = \psi_t^* \tilde{\nabla}_0^{(\lambda)}$ が成り立つ．すなわち，$(E_\lambda, \tilde{\nabla}^{(\lambda)})$ の自明な変形 *i.e.,* $Q_{\lambda,t} \cong Q_{\lambda,0}$ を与える．

系 4.9 ϕ が $\mathrm{RIT}(\mathfrak{g}; \Lambda^*)$ に属するならば，$\mathrm{Spec}(M, \Phi_t^* m) = \mathrm{Spec}(M, m)$ $(t \in \mathbb{R})$ が成り立つ．

例 1 (2-step ベキ零多様体)
Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を，基底 $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2\}$ が

$$[u_1, v_1] = [u_2, v_2] = w_1, \quad [u_1, v_2] = w_2, \quad \text{other} = 0.$$

$$\mathfrak{z} = < w_1, w_2 >$$

を満たすものとして定義する．対応する単連結 Lie 群は

$$G = \exp\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & x_1 & x_2 & z_1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & & O & \\ 0 & 0 & 1 & y_2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & x_1 & z_2 \\ & O & & & 0 & 1 & y_2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) | x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}\}.$$

ここで，

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \cdot (x_1', x_2', y_1', y_2', z_1', z_2') \\ &= (x_1 + x_1', x_2 + x_2', y_1 + y_1', y_2 + y_2', z_1 + z_1' + x_1y_1' + x_2y_2', z_2 + z_2' + x_1y_2').\end{aligned}$$

$\Gamma := \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \mid x_i, y_i, z_i \in \mathbb{Z}\}$ とおくと，Γ は G の co-compact な離散部分群である．

$\{u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*, w_1^*, w_2^*\}$ を $\mathfrak{g}^*$ の基底（双対基底）とすると，$\mathfrak{z}^\perp =< u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^* >$.

$\mathfrak{g}$ の線形変換 ϕ を

$$\phi(v_2) = w_2, \quad \phi(\text{other}) = 0$$

によって定義すると，$\phi \in \mathrm{RIT}(\mathfrak{g})$ である．実際，$\mu = \sum_{i=1}^2 (\mu_i u_i^* + \nu_i v_i^* + \kappa_i w_i^*) \in \mathfrak{g}^*$ に対して，

$$\phi^*(\mu) = \begin{cases} \mathrm{ad}^*(u_1)\mu & (\kappa_1 = 0) \\ \mathrm{ad}^*\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} u_2\right)\mu & (\kappa_1 \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ．このとき，

$$F_\kappa([h_1], \mu) = \begin{cases} -\mu_1 & (\kappa_1 = 0) \\ -\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\mu_2 & (\kappa_1 \neq 0) \end{cases} .$$

このように，$\forall \kappa \in \mathfrak{g}^*$ に対して，

$$\mathcal{H}_{\kappa,t} \cong \mathcal{H}_{\kappa,0} \quad \text{（古典力学系の同形）.}$$

また，$\forall \lambda \in \Lambda^*$ に対して，

$$Q_{\lambda,t} \cong Q_{\lambda,0} \quad \text{（量子力学系の同形）}$$

が成り立つ．

註. $T^*M = M \times \mathfrak{g}^*$ 上の力学系としては（適当な $\mathfrak{g}$ の内積をとるとき），$(M \times \mathfrak{g}^*, \omega, H_t) \ncong (M \times \mathfrak{g}^*, \omega, H_0)$ である ([4], [6]) が，$U := \mathfrak{g}^* \backslash \{\kappa_1 = 0\}$ とおくと，T^*M の conic, open dense な部分集合 $M \times U$ において，

$$(M \times U, \omega, H_t) \cong (M \times U, \omega, H_0)$$

が成り立つ（[10]）．

■（RIT でない）PRIT による変形について

$\phi \in \mathrm{PRIT}(\mathfrak{g}; \Lambda^*)$ の場合，一般に，$F_{\lambda,t}^{(1)}$ は ξ の 1 次多項式ではない．このとき，

『$B_t = iQ(F_{\lambda,t}^{(1)})$ が Lax 方程式を満たすか？』

が問題である．

これについて，ここでは肯定的である例を 1 つ挙げる．([12] で他の例を挙げている.)

例 2（3-step ベキ零多様体）

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を，基底 $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ が

$$[u_1, v_1] = v_2, \quad [u_1, v_2] = w, \quad [u_1, w] = [u_1, u_2] = 0,$$

$$[u_2, v_1] = w, \quad [u_2, v_2] = [u_2, w] = 0, \quad [v_1, v_2] = 0$$

を満たすものとして定義する．$\mathfrak{g}$ は 3-step ベキ零 Lie 代数であり，中心 $\mathfrak{z} =< w >$ である．

対応する単連結 Lie 群は

$$\begin{aligned} G = \exp \mathfrak{g} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & 1 & x_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_i, y_i, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \mid x_i, y_i, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \cdot (x_1', x_2', y_1', y_2', z') \\ &\quad = (x_1 + x_1', x_2 + x_2' + x_1 x_1', y_1 + y_1', y_2 + y_2' + x_1 y_1', z + z' + x_1 y_2' + x_2 y_1'). \end{aligned}$$

$\Gamma := \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) | \, x_i, y_i, z \in \mathbb{Z}\}$ とおくと，Γ は G の co-compact な離散部分群である．

$\{u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*, w\}$ を $\mathfrak{g}^*$ の基底（双対基底）とすると，$\mathfrak{z}^\perp =< u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^* >$.

$\mathfrak{g}$ の線形変換 ϕ を

$$\phi(u_2) = w, \quad \phi(\text{other}) = 0$$

で定義すると，$\phi \in \mathrm{PRIT}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{RIT}(\mathfrak{g}; 0)$ である．実際，$\mu = \sum_{j=1}^{2} (\mu_j u_j^* + \nu_j v_j^*) + \kappa w^* \in \mathfrak{g}^*$ に対して，

$$\phi^*(\mu) = \begin{cases} 0 & (\kappa = 0) \\ \mathrm{ad}^*\big(- v_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} v_2 \big) \mu & (\kappa \neq 0) \end{cases},$$

$$F_\kappa([h_1], \mu) = \begin{cases} C & (\kappa = 0) \\ \nu_1 - \frac{1}{2\kappa} \nu_2^2 & (\kappa \neq 0) \end{cases}.$$

さらに，$\lambda = 2\pi k w^*$ $(k \in \mathbb{Z})$ に対して，

$$F_{\lambda,t}^{(1)}(x, \xi) = \begin{cases} C & (k = 0) \\ -\frac{1}{4\pi k} \xi_4^2 + \xi_3 + x_1 \xi_4 & (k \neq 0) \end{cases}$$

となる．ただし，M_1 の局所座標を $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ とおいた．このように，$F_{\lambda,t}^{(1)}$ $(\lambda \neq 0)$ が ξ の 2 次多項式になり，

$$B_t = iQ(F_{\lambda,t}^{(1)}) = \frac{i}{4\pi k} (\widetilde{\nabla}_4^{(\lambda)})^2 + \widetilde{\nabla}_3^{(\lambda)} + x_1 \widetilde{\nabla}_4^{(\lambda)} \quad (k \neq 0).$$

このとき，B_t が Lax 方程式を満たすことを直接確かめることができる．

まとめると，次が得られる．

命題 4.10 例2における $M=\Gamma\backslash G$ の計量の変形 m_t について，以下が成り立つ：

(1) $(M_1, m_{1,t}) = (M_1, m_{1,0})$.

(2) 主 S^1 束 $\hat{\pi}: M \to M_1$ の接続 $\tilde{\nabla}_t$ の曲率（磁場）Θ_t について，$\Theta_t = \Theta_0$.

(3) $\mathfrak{g}$ の適当な内積をとれば，$\forall\lambda \in \Lambda^*\backslash\{0\}$ に対して，$(E_\lambda, \tilde{\nabla}_t^{(\lambda)}) \not\cong (E_\lambda, \tilde{\nabla}_0^{(\lambda)})$.

(4) $\forall\lambda \in \Lambda^*$ に対して，$\mathrm{Spec}(D_t^{(\lambda)}) = \mathrm{Spec}(D_0^{(\lambda)})$.

（証明） (1),(2),(4) は定理 4.3, 補題 4.4,(3) および B_t が Lax 方程式を満たすことから従う.

(3) ある $\lambda \neq 0$ について，$\tilde{\nabla}_t^{(\lambda)}$ が自明な変形とすると，$\hat{\pi}: M \to M_1$ の接続も自明な変形であり，従って，M の計量の変形 m_t も自明な変形である．ところで，このような自明な変形は内部微分から誘導されることが [7, Proposition 5.2] で示されている. ■

このように，例2は「Riemann 多様体上の Hermite 直線束における接続の非自明な等スペクトル変形」の例を与える.（離散的な場合の例は，“砂田の方法”に基づいて，[9] で与えられている.）

5 おわりに

本論説では，ベキ零多様体における左不変計量の PRIT による変形を定義し，その変形のもとで，以下のことを示した：

(1) 対応する古典力学系は不変である.

(2) 条件 RIT のもとで，あるいは RIT でないある例で，対応する Schrödinger 作用素の固有値は不変である．また，固有値の不変性を導く（無限小）intertwining operators は微分作用素として与えられる.

(2) の主張が無条件に成り立つために残された問題（課題）は以下である：

- PRIT$(\mathfrak{g};\Lambda^*)$ に対応する関数 $F_{\lambda,t}^{(1)}(x,\xi)$ は ξ の多項式か？
- $F_{\lambda,t}^{(1)}(x,\xi)$ が ξ の（2次以上の）多項式のとき，$B_t = iQ(F_{\lambda,t}^{(1)})$ が常に Lax 方程式をみたすことがいえるか？

註. (2) に関連して，等スペクトル性の背景にある intertwining operators に関する興味深い研究として [13], [15] をあげておく.

参考文献

[1] D.M. DeTurck and C.S. Gordon, Isospectral deformation I: Riemannian structures on two-step nilspaces, Comm. Pure Appl. Math., **40**(1987), 367-387.

[2] ———, Isospectral deformation II: Trace formulas, metrics, and potentials, Comm. Pure Appl. Math., **42**(1989), 1067-1095

[3] C.S. Gordon, The Laplace spectra versus the length spectra of Riemannian manifolds, Contemp. Math., **51**(1986), 63-80.

[4] ______, You can't hear the geodesic flow, private communication, 1992

[5] ______, Survey of isospectral manifolds, *Handbook of differential geometry*, F.J.E. Dillen and L.C.A. Verstraelen eds., Vol.1, 747-778, Elsevier Science B.V., 2000.

[6] C.S. Gordon, Y. Mao, and D. Schueth, Symplectic rigidity of geodesic flows on two-step nilmanifolds, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, **30**(1997), 417-427.

[7] C.S. Gordon and E.N. Wilson, Isospectral deformations of compact solvmanifolds, J. Diff. Geometry, **19**(1984), 241-256.

[8] L. Gorwin and F.P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications. Part 1: Basic theory and examples.* Cambridge Univ. Press. 1989.

[9] R. Kuwabara, Isospectral connections on line bundles, Math. Z., **204**(1990), 465-473.

[10] ______, A note on the deformations of Hamiltonian systems on nilmanifolds, J. Math. Tokushima Univ., **26**(1992), 19-29.

[11] ______, Spectra and geodesic flows on nilmanifolds: Reductions of Hamiltonian systems and differential operators, J. Math. Soc. Japan, **46**(1994), 119-137.

[12] ______, Lax-type isospectral deformations on nilmanifolds, Ann. Global Anal. Geom., **14**(1996),193-218.

[13] F. Marhuenda, Microlocal analysis of some isospectral deforamtions, Trans. Amer. Math. Soc., **343**(1994), 245-275.

[14] T. Sunada, Riemannian coverings and isospectral manifolds, Ann. of Math., **121**(1985), 169-186

[15] S. Zelditch, Isospectrality in the FIO category, J. Diff. Geometry **35**(1992), 689-710.

[16] ______, The inverse spectral problem, Surv. Diff. Geom., **9**(2004), 401-467.

(2012.1.7)