数理解析研究所講究録
第1774巻 2012年 192-213

時間, エネルギー, 真空, 配位空間

大森 英樹 (東京理科大 嘱託教授)

昔から幾何学とは空間図形を扱う学問ではあったが、まったくおかしなことに時空内の「図形」は埒外とされてきた. 図形は幾何学の領分だが, 「時間」は物理学の領分であって正統派の幾何学者は手出しすべきでないと“日本では”思われてきたように思う. しかし目で見えるものだけが「形」なのだろうか, 音楽家が言う「曲の形」は形でないのだろうか. 表題に掲げた単語は (適宜使われてはいるが) 真の意味ではすべて数学的には無定義である.

1. 基本事項

前期量子論の幾何学的部分を手短に述べるには以下に述べる代数から始めるのが都合がよい. $\mathbb{C}$を係数体とする1を含む (完備とは限らない) 位相結合代数 $(\mathcal{A};*)$ が μ-**制御代数**である (cf.[13], 原型はcf.[11]p.298) とは次が成立することである:

(A.1) **制御子**と称する $\mathcal{A}$ の元 μ があって $[\mu,\mathcal{A}]\subset\mu*\mathcal{A}*\mu$.
(A.2) $[\mathcal{A},\mathcal{A}]\subset\mu*\mathcal{A}$ (非可換性を μ で制御するため).
(A.3) $\mu*\mathcal{A}$ は閉部分空間であり, その補空間 B が存在, i.e. $\mathcal{A}=B\oplus\mu*\mathcal{A}$.
(A.4) $\mu*:\mathcal{A}\to\mu*\mathcal{A}$, $*\mu:\mathcal{A}\to\mathcal{A}*\mu$ が線形同型.

(A.1) より $a*\mu=\mu*a+\mu*{}^{\exists}b*\mu=\mu*(a+b*\mu)$ だから $\mu*\mathcal{A}\subset\mathcal{A}*\mu\subset\mu*\mathcal{A}$ がわかり, $\mu*\mathcal{A}$ は両側 ideal となる. (A.1) は Heisenberg 代数 (後出) のような特別な場合には $[\mu,\mathcal{A}]=\{0\}$ となることもあるが, (A.2) より $\mathcal{A}/\mu*\mathcal{A}$ は可換環となる.

(A.3) は位相まで考えての補空間の意味であるから B は線形閉部分空間で $\mathcal{A}=B\oplus\mu*\mathcal{A}$ となっている. B は自然に可換環 $(B,\cdot)\cong\mathcal{A}/\mu*\mathcal{A}$ となる. 補空間 B の選び方は一意的ではないがすべて同型. (A.4) は μ を左/右からかける $a\to\mu*a,/a\to a*\mu$ という演算がどちらも位相線形同型写像であるというものである.

(A.3), (A.4) より $\mathcal{A}$ は $\forall N$ で

$$\mathcal{A}=B\oplus\mu*B\oplus\cdots\oplus\mu^{N-1}*B\oplus\mu^{N}*\mathcal{A}.$$

のように分解され, 特に $\forall a,\forall b\in B$ について

$$a*b\sim\sum\nolimits_{k\geq 0}\mu^{k}*\pi_{k}(a,b),\quad \pi_{k}(a,b)\in B.$$

$\pi_0(a,b)=a\cdot b$ は可換結合代数を定義し, π_1 の歪対称部分 $\pi_1^{-}:B\times B\to B$ は biderivation である. これはしばしば $\{a,b\}$ と書かれ Poisson 括弧積と呼ばれる.

(A.4) より形式的な逆元 μ^{-1} を $\mathcal{A}$ に添加でき, 代数 $\mathcal{A}[\mu^{-1}]$ が作られる. $[\mu^{-1},a]=-\mu^{-1}*[\mu,a]*\mu^{-1}$ である. $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ は $\mathcal{A}$ の derivation であり, 上の分解に応じて

$$\mathrm{ad}(\mu^{-1})(a)=\xi_0(a)+\mu*\xi_1(a)+\cdots+\mu^{k}*\xi_k(a)+\cdots,$$

とすると ξ_0 は $(B,\cdot)$ の derivation となる. ξ_0 は characteristic vector field と呼ばれ, これの積分曲線が“時間”をパラメータとする曲線と思われている. $\mathcal{A}*\mu^{-1}$ は

自然に Lie 環となり $\mathcal{A}[\mu^{-1}]$ はその展開環である. $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}*\mu^{-1}$ の Lie ideal となるが, $\mathcal{A}*\mu^{-1}/\mathcal{A}$ は B 上に次の括弧積を入れた, Jacobi 代数と称する Lie 環となる：

$$\{f,g\}_c=f\xi_0(g)-g\xi_0(f)+\{f,g\}.$$

$\{f,g\}_c$ はしばしば Liouville 括弧積と呼ばれる. $(B,\cdot)$ が普通の多様体上の関数環の場合にはこれらは古典的一般力学系に登場する用語で, $\{f,g\}$, ξ_0, $\{f,g\}_c$ 等の性質に応じて symplectic 構造, 接触構造など様々な呼び名がある.

前期量子論は「世界は本当は量子論でできてるのに古典力学はその第一近似のみを見てきたのだ」と考え, 一般力学系に登場する構造はすべて上の μ-制御代数のような結合代数の中の初めの方の項に埋めこまれなければならないとし, これを指導原理として成立してきたと言って良いだろう. これが可能のときその幾何構造は「量子化可能」と呼ばれる (cf.[3]). $\mathcal{A}$ は古典的「相空間」に相当している.

問題が μ-制御代数を作るだけにしぼられるなら, μ を形式変数として μ の形式的冪級数で書かれる μ-制御代数を作ればよい. これは問題を格段に簡単にする. 例えば「すべての Poisson 構造は量子化可能 (Kontsevich [10])」である.

しかし, 物理からの強い批判はある. 「量子論は作用素環の中で書かれるべきなのに, これでは作用素になっていないので 固有値のような数量を取り出せない. μ を形式変数としていたのではなおのこと作用素表現はつけられない.」

このような批判にどのように答えていけばよいかを考えねばならないが, その基本方針は「始めから作用素代数で考えなくても, μ-制御代数を超越的に拡張した Weyl 代数 (後述) の中に実現すれば, 真空表現を経由して, 行列表現は自然に手にはいる」というものである. この考え方は別に新しいものではないが, Weyl 代数を超越的に拡張するときに, 補空間 B の選び方がいろいろあることに対応して, 表示法を一般にした積公式 (cf.(1)) を使うことが (これまでの物理には見られない) 特徴である.

超越的に拡張した Weyl **代数**という述べ方をしたが, 正しくは Weyl 代数を両側作用域に持つ module のことである (D-module とも言うらしい). 2 次式の指数関数を扱いはじめるとこの辺まで必要になる.

1.1. **真空作用素, 表現空間.** 物理ではエネルギーの最低固有状態を真空と呼ぶのが普通だろうが, ここでは $\varpi\in\mathcal{A}$ が

$$\varpi*\varpi=\varpi,\quad \varpi*\mathcal{A}*\varpi=\mathbb{C}\varpi$$

をみたすとき**真空作用素**と呼ぶ. かような元は Weyl 代数の中には入っていないが, 超越的に拡張された Weyl 代数の中にはたくさんある (§3 参照). $\mathcal{A}^\infty=\bigcap\mu^n*\mathcal{A}$ と置く. $\mu\varpi=\varpi$ となる場合には, $\varpi\in\mathcal{A}^\infty$ である.

ϖ が真空作用素で $\varpi*g*\varpi=\lambda_g\varpi$, $\lambda_g\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ならば, $\lambda_g^{-1}g*\varpi$ も真空作用素である.

$L=\{f;f*\varpi=0\}$ は左 ideal であり, 商空間 $(\mathcal{A}/L)*\varpi$ を**表現空間**と呼ぶが, 部分空間 $\mathcal{L}$ で $\mathcal{L}\to\mathcal{L}*\varpi$ が線形同型となるものが選べることが多い.

$\mathcal{A}$ の中に $e*e=-1$, $e*\varpi=-\varpi$ となるような元があり, これが

$$\mathrm{Ad}(e):\mathcal{A}\to\mathcal{A},\quad \mathrm{Ad}(e)f=e*f*e^{-1}(=f^e\text{と書く})$$

なる同形を引き起している場合には表現空間を $\begin{bmatrix}\phi{*}\varpi\\ \psi{*}e{*}\varpi\end{bmatrix}$ のように２成分とし，

$$e{*}\begin{bmatrix}\phi{*}\varpi\\ \psi{*}e{*}\varpi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e{*}\phi{*}e{*}e{*}\varpi\\ e{*}\psi{*}e{*}\varpi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\phi^e\\ \psi^e & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varpi\\ e{*}\varpi\end{bmatrix}$$

と書くほうが便利になる．これを２成分真空作用素と呼んでおく．もっと一般に $\mathcal{A}$ が $e_1,\cdots,e_m$ を生成元とする Clifford 環を含み，しかも

$$e_{i_1}{*}\cdots{*}e_{i_m}{*}\varpi=\mathrm{sgn}(i_1,\cdots,i_m)\varpi$$

となるような真空作用素を含むとき (cf.[18],[19]) にはもう少し手のこんだことができる (cf.§3.5).

多くの場合 $\mathcal{A}/L$ とか $\mathcal{L}$ には自然に可換あるいは超可換代数の構造が入る (cf.[13]) ので，それを多様体 M 上の関数環/外微分環とみなし，M を「配位空間」(そこに物が存在している空間) と呼ぶようであるが，時間を捨象したものだけに限ることもあり，これが最も数学的にわかりにくいものである．

$\mathcal{A}$ が有限生成の場合には，生成系を非線形に変更をすると別の真空作用素 ϖ' が得られる．この場合，**配位空間は変えないように**生成系を変更すると，これまで $y_i{*}\varpi=0$ としていたものを $y_i{*}\varpi=\phi_i(x){*}\varpi$ としなければならないようなことが起こり，これが電磁ポテンシャルとして認識される (§3 参照) が，数学的にはこれは接続の概念と同じである．電磁場を line bundle の接続の曲率形式と理解するとよいというのは Weyl が言ったことである．しかし，当時は fiber にあたる１次元が物理的に理解不可な変数ということで受け入れられなかったという話である．

1.2. **包合的反自己同形.** Hermite とかユニタリとかの概念は内積の構造がなくても定義することができる．$(\mathcal{A},*)$ に，$\mathbb{R}$-線形同形 $a\to a^\iota$ で次の性質をもつものが定義されているとしよう：

$$(a^\iota)^\iota=a,\quad (a{*}b)^\iota=b^\iota{*}a^\iota,\quad (i)^\iota=\bar{i}=-i,\quad \mu^\iota=\mu.$$

$H^\iota=H$ であるような元は *Hermite* 元と呼ばれる．ϖ が真空作用素なら ϖ^ι もそうである (共役真空作用素)．真空作用素で $\varpi^\iota=\varpi$ のものもある (後述の複素真空，擬真空).

$\widetilde{\mathcal{H}}$ を Hermite 元全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする．分解 $f=\frac{1}{2}(f+f^\iota)+i\frac{1}{2i}(f-f^\iota)$ により，$\mathcal{A}=\widetilde{\mathcal{H}}\oplus i\widetilde{\mathcal{H}}$ だが，ι を (A.3) に使うと，$\mu{*}\mathcal{A}=\mathcal{A}{*}\mu$ だから $\mathcal{A}=B^\iota\oplus\mu{*}\mathcal{A}$ となるが，$B_r=\{\frac{1}{2}(b+b^\iota), b\in B\}$ と置けば，補空間は $B=B_r\oplus iB_r$ のように選べて

$$\mathcal{A}=\widetilde{\mathcal{H}}\oplus i\widetilde{\mathcal{H}}=(B_r\oplus iB_r)\oplus\frac{1}{2}(\mu{*}\mathcal{A}+\mathcal{A}{*}\mu).$$

H が Hermite 元のとき，$*$-指数関数 (後述) e_*^{itH} をユニタリ元と言う．

一般に結合代数 $(A,*)$ において， **対称積** $a{\circ}b$ を $\frac{1}{2}(a{*}b+b{*}a)$ で定義すると $(A,\circ)$ は (初期の量子論で注目された)Jordan 代数と呼ばれるものになるが，

$$a\circ(b\circ c)-(a\circ b)\circ c=\frac{1}{4}[[a,c],b]$$

なので, 対称積 $\circ$ で商空間 $\mathcal{A}/\mu^2{*}\mathcal{A}$ は可換結合代数となる. $\mathcal{A}/\mu^2{*}\mathcal{A}$ は $B\oplus\mu{\circ}B$ であり $(\mu{\circ}B){\circ}(\mu{\circ}B)=\{0\}$. しかし, この構造の微分幾何的特徴はよくわからない.

1.3. **元の次数/階数, 有限生成系.** 制御子 μ は展開環の元に次数とか階数という序列をつける役目をしている. まず $\mathcal{A}[\mu^{-1}]=\sum_k\mu^{-k}{*}\mathcal{A}$ だからこれは filtered algebra

$$\mathcal{A}[\mu^{-1}]=\cdots\supset\mu^{-k-1}{*}\mathcal{A}\supset\mu^{-k}{*}\mathcal{A}\supset\cdots\supset\mathcal{A}\supset\cdots\supset\mu^{k}{*}\mathcal{A}\supset\cdots$$

であり $\mu^k{*}\mathcal{A}{*}\mu^\ell{*}\mathcal{A}\subset\mu^{k+\ell}{*}\mathcal{A}$ となる. すると $\Big(\bigcup_k(\sum_{\ell=-k}^{\infty}\mu^\ell{*}B),*\Big)$ は filtered subalgebra となり, これの graded algebra $\Big(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mu^\ell{\cdot}B,\cdot\Big)$ が

$$(\mu^k{*}a){*}(\mu^\ell{*}b)=\mu^{k+\ell}{\cdot}a{\cdot}b+h.o.t,\quad a,b\in B,$$

と置いて自然に作られる.

$\mu^{-k}{*}\mathcal{A}$ の元は**階数** k の元 (正確には階数 $\le k$ の元) と呼ばれる. 作用素の感覚で言うと, 階数 ≤ 0 の元は有界作用素, 階数 >0 の元は非有界作用素であり, 微分の階数を指していが, Fourier 変換すると微分の階数は多項式の次数に変わるので, μ の次数をそのまま使って $\mu^{-k}{*}\mathcal{A}$ の元を $-k$ **次の元**ということもある.

具体的に計算できる例では多くの場合 $\mathcal{A}$ が位相有限生成 (生成系から代数を生成し閉包をとると全体になる) であるが, その生成元を具体的に与えるとなると話は別で, 上の graded algebra $\Big(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mu^\ell{\cdot}B,\cdot\Big)$ の生成系として有界, 非有界が混在する生成元が与えられることが多い.

$\{\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_n\}$ をその生成元とし, これらを与える $\mathcal{A}[\mu^{-1}]$ の元を $\{u_1,\cdots,u_n\}$ とする. このとき μ がどのように与えられるかで $\mathcal{A}$ はほとんどきまってしまう.

次節で与える Heisenberg 代数は μ 自身が単独でこの生成系に加わっている最も簡単な例であるが, §4 で与える例では μ^{-1} が $u_1,\cdots,u_n$ の関数として $\mu^{-1}=\mu^{-1}(\boldsymbol{u})$ として与えられる.

Hamilton 関数 H の与えられた力学系では, 曲面 $H=c$ をエネルギー面と呼ぶことがあるが, このような系を μ-制御代数として扱うときには $\mu^{-1}=H$ と置き, μ^{-1} をエネルギーとして扱う. 作用素表現したときには μ^{-1} は非有界作用素, μ は一般には有界作用素でしかないが, compact 作用素となることも多い.

複素係数なので $\mathcal{A}{*}\mu^{-1}$ を Lie 環に持つ Lie 群は一般には存在しないが, Hermite 元 $H_*=\frac{1}{2}(a{*}\mu^{-1}+\mu^{-1}{*}a^{\iota})$ に対しては $e_*^{itH_*}$, $t\in\mathbb{R}$ が作れることが多いので, $\mathbb{R}$ 上の $i\widetilde{\mathcal{H}}{*}\mu^{-1}\oplus\mathcal{A}$ を Lie 環に持つ Lie 群の存在は期待できる.

話がこみいってきたので, 次節から数学的に定義していくことにする.

2. Weyl 代数, Heisenberg 代数, 量子化された接触代数

生成元 $x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m$ に次の基本交換関係 $[x_i,y_j]=-i\hbar\delta_{ij}$ ($\hbar$ は正定数) を入れて生成される結合代数を **Weyl 代数**と呼び W_{2m} と書く. ここで $\hbar$ を正定数ではなく生成元の仲間に入れて $\mu,x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m$ を生成元とし, 次の基本交換関係 $[x_i,y_j]=-i\mu\delta_{ij}$ (μ は他の元と可換) を入れて生成される結合代数を

Heisenberg 代数と呼び $\mathcal{H}_{2m}$ と書く. W_{2m} と $\mathcal{H}_{2m}$ は代数としては同形だが自己同形写像の定義が違ってくる. 生成元に対し

$$E_t(x_i)=e^t x_i, \quad E_t(y_j)=e^t y_j, \quad E_t(\mu)=e^{2t}\mu$$

と定義すれば E_t は $\mathcal{H}_{2m}$ の自己同形だが $(E_t(\hbar)\neq\hbar$ なので$)W_{2m}$ の自己同形ではない. 同様 $\mathcal{H}_{2m}$ の表現と言う時 μ を単位元として表現したのでは W_{2m} の表現と同じである. E_t の無限小生成元 $D=\frac{d}{dt}E_t\Big|_{t=0}$ は次で与えられる:

$$D(\mu)=2\mu, \quad D(x_i)=x_i, \quad D(y_i)=y_i, \quad i=1,\ldots,m.$$

ところで, Heisenberg 代数での μ は単なる中心元とは思われていない. ある場合には μ^{-1} はエネルギーを表していると考えるので, μ^{-1} は配位空間の座標関数にはならないものであり, むしろその正準共役元が (接触多様体等の) 座標関数となるものである.

そこで, 上の D が仮想的な元 τ を使って $\frac{1}{\mu}\mathrm{ad}(\frac{1}{i}\tau)$ のような姿で与えられると仮定し, このような τ を Heisenberg 代数 $\mathcal{H}_{2m}$ に添加した代数 $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ を考える. 交換関係は次のようになる:

$$[i\tau,\mu]=-2\mu^2, \quad [i\tau,x_i]=-\mu{*}x_i, \quad [i\tau,y_i]=-\mu{*}y_i, \quad i=1,\ldots,m.$$

μ^{-1} は $\mathcal{H}_{2m}$ の元ではないが $[\mu^{-1},\tau]=2i$ としてよいから τ は μ^{-1} の正準共役とみなせる. μ^{-1} をエネルギーを表わす変数とすればその正準共役 τ は**宇宙時間**を表す変数とみなしてもよいであろう.

$\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ は $B[\tau]$ を $\mu{*}\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ の補空間として (A.1)~(A.4) をみたす. これを**量子化された接触代数**と呼ぶこともある. ここでは characteristic vector field があからさまに見えていて $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}$ である.

前のほうで, Heisenberg 代数を作用素に表現するときに μ を単位元となるように表現したのでは Weyl 代数を作用素に表現したことにしかならないと述べたが, 上の $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ を作用素表現できればこの批判をかわせるであろう. ところで Weyl 代数を作用素に表現する方法として「真空表現」というのが昔から知られている. 従って $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ をもっと大きな Weyl 代数の中に埋め込めればよいのだが, 実は Weyl 代数の方を少し超越的に拡張したものの中にしか埋め込めないので, この問題を扱うには少し準備がいる.

2.1. **超越的拡張.** 代数を超越的に拡張するやりかたは大体きまっている. 普通の多項式の空間に別の積 $*$ を定義しその積を使って多項式空間の中にその代数を (忠実に) 表現してしまえばよい. 積公式が具体的に書かれてしまえばいろいろな手段で拡張された元を考えることができる.

$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m,u_{m+1},\cdots,u_{2m})$ とし, J を単位歪対称行列 $J=\begin{bmatrix}0 & -I_m\\ I_m & 0\end{bmatrix}$ とする. 任意の $2m\times 2m$-複素対称行列 $K\in\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(2m)$ に対し $\Lambda=K+J$ と置く.

多項式の空間 $\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ に $*_{_K}$-積を次式で定義する ($\hbar$ は正定数):

$$(1) \quad f *_{_K} g = f e^{\frac{i\hbar}{2}(\sum \overleftarrow{\partial_{u_i}}\Lambda^{ij}\overrightarrow{\partial_{u_j}})} g = \sum_k \frac{(i\hbar)^k}{k!2^k}\Lambda^{i_1j_1}\cdots\Lambda^{i_kj_k}\partial_{u_{i_1}}\cdots\partial_{u_{i_k}} f \, \partial_{u_{j_1}}\cdots\partial_{u_{j_k}} g.$$

この積公式は $K=0$ の場合は **Moyal 積公式**と呼ばれている．([16], [17], [18], [19] では $*_K$-積は最初の方では $*_\Lambda$ とか $*_{K+J}$ と書かれていて，J を上のように固定した後で $*_K$ としている.)

$(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}], *_K)$ は K によらず互いに同形な非可換結合代数で，これの同型類を **Weyl 代数**と呼び，W_{2m} と書く．積公式 (1) で $\hbar$ を μ に変えれば Heisenberg 代数 $\mathcal{H}_{2m}$ を得る．$(\mathcal{H}_{2m}; *)$ は μ-制御代数である．ここで，μ を可逆元とすれば，後の方で出て来る Weyl 代数の公式はすべて $\hbar$ を μ に換えて成立することになるが，次のことを前もって注意しておこう：

注意 μ^{-1} があり，しかも $e_*^{it\tau}$ も $e_*^{it\tau}*\mu^{-1}*e_*^{-it\tau}$ も $\forall t\in\mathbb{R}$ で定義できるのだとすると，$e_*^{it\tau}*\mu^{-1}*e_*^{-it\tau}=\mu^{-1}+2t$ となり，$\mu^{-1}+2t$ が $\forall t\in\mathbb{R}$ で可逆となる．これは困ることだが，後の方で，$e_*^{it\tau}*\mu^{-1}*e_*^{-it\tau}$ は $t\geq 0$ でしか定義できないことが分かる．

K を固定し，元をすべて $*_K$-積公式を用いて**計算しきって**しまえばこれは Weyl 代数の元に (普通の多項式としての) 一意的な表示を与えるので，これを $f_*\in(W_{2m}[\hbar]; *)$ に対し $:f_*:_K\in\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ と書いて f_* の **K-順序表示**とか **K-表示**と呼ぶ．一意的な表示があればこれを使って位相が定義でき様々な超越的元が考えられる (cf.[21]).

2.2. **指数関数** $:e_*^{z\frac{2}{i\hbar}u\circ v}:_K$, $:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(u_*^2+v_*^2)}:_K$. 超越的な元で基本的なのは指数関数である．$H_*\in(W_{2m}, *)$ の $*$-指数関数 $e_*^{tH_*}$ は H_* が 1 次式ならば $\sum\frac{t^n}{n!}H_*^n$ で定義でき面白い性質 (cf.[17]) を持つが，H_* が 3 次式以上だとこれの収束半径は 0 である (cf.[17]). 一般には $*$-指数関数 $e*^{tH_*}$ は K ごとに発展方程式

$$\frac{d}{dt}:f_t:_K=:H_*:_K*_K:f_t:_K,\quad :f_0:_K=1.$$

を解き，その解の集団として定義するのである．式を書くだけなら $(W_{2m}, *)$ の中でできる．しかし，解である指数関数は表示 K によってかなり見かけが変わる．簡単な 2 次式の $*$-指数関数を書いてみよう．

指数関数 $e_*^{z\frac{2}{i\hbar}u\circ v}$ は (実解析解の 1 意性を考慮して) 次の微分方程式で定義される：

$$\frac{d}{dz}f_z=\left(\frac{2}{i\hbar}u\circ v\right)*_K f_z,\quad f_0=1,\quad z\in\mathbb{C}.$$

積公式 (1) で使われるパラメータ (これを表示パラメータと言う) を $K=\left[\begin{smallmatrix}\delta & c\\ c & \delta'\end{smallmatrix}\right]$ として解を書くと $\Delta=e^z+e^{-z}-c(e^z-e^{-z})$ とし，次式となる ([19])：

$$(2)\qquad :e_*^{z\frac{2}{i\hbar}u\circ v}:_K=\frac{2}{\sqrt{\Delta^2-(e^z-e^{-z})^2\delta\delta'}}\,e^{\frac{1}{i\hbar}\frac{e^z-e^{-z}}{\Delta^2-(e^z-e^{-z})^2\delta\delta'}\left((e^z-e^{-z})(\delta'u^2+\delta v^2)+2\Delta uv\right)},$$

指数関数なのに一般に分岐特異点が出ることがわかるが，$\delta\delta'=\rho^2$ と置くと，

$$(3)\quad \sqrt{\Delta^2-(e^t-e^{-t})^2\delta\delta'}=e^{-t}\sqrt{((1-c+\rho)e^{2t}+(1+c-\rho))((1-c-\rho)e^{2t}+(1+c+\rho))}.$$

だから．K に応じて特異点の位置がどう変化するかが読み取れる．同様に (cf. [19])

$$(4)\quad :e_*^{z\frac{1}{\hbar}(u_*^2+v_*^2)}:_K=\frac{1}{\sqrt{\Delta_K(z)}}e^{\frac{1}{i\hbar}\frac{i\sinh z}{\Delta_K(z)}\left((\cosh z-\delta' i\sinh z)u^2+(\cosh z-\delta i\sinh z)v^2+2ci(\sinh z)uv\right)}$$

ただし $\Delta_K(z)=\cosh^2 z-(\delta+\delta')i\sinh z\cosh z+(c^2-\delta\delta')\sinh^2 z$ である．

$K{=}0$ の場合は **Weyl-表示**, $c{=}1, \delta{=}0{=}\delta'$ の場合は**正規順序表示**と呼ばれていて物理にもよくでてくるが, 物理では一般の K は使われていない.

しかし, Weyl-表示, 正規順序表示では現れない奇妙な性質が見えるから以下で $:e_*^{(s+it)\frac{2}{i\hbar}u\circ v}:_K$ $(s,t\in\mathbb{R})$ の場合にそれを列挙しよう：

Proposition 2.1. *a.*) s に関して両側急減少 ($e^{-|s|}$ のオーダ).

b.) t に関して 2π-周期的, 詳しくは

*b.*1) $\exists a < s < \exists b$ のときは π-周期的,

*b.*2) それ以外の所では π-交代周期的.

c.) $\log\left|\frac{\rho-c-1}{\rho-c+1}\right|\log\left|\frac{\rho+c+1}{\rho+c-1}\right| < 0$ の場合には上の a,b は $a<0<b$ となる.

d.) 分岐特異点があるのでこれを 1 価に扱うためには 2 枚のシートを用意しなければならない. すると $\oplus$ シートの z, $\ominus$ シートの z と 2 つの $z{=}s{+}it$ ができる.

e.) それにも拘わらず $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}{=}\sqrt{\alpha\beta}$ のような計算で指数法則が成立する.

f.) $z{=}\frac{1}{2}\pi i$ のとき $e_*^{(\pi i)\frac{1}{i\hbar}u\circ v}{=}e_*^{(\pi i)\frac{1}{2\hbar}(u_*^2+v_*^2)}$. この元を § *3.5* では **polar element** と呼んで ε_{00} と書かく. かなり奇妙な振舞いをする元で, 生成元と反交換する：

$$u{*}\varepsilon_{00} = -\varepsilon_{00}{*}u, \quad v{*}\varepsilon_{00} = -\varepsilon_{00}{*}v, \quad (\textit{cf.}[19],\ \textit{bumping lemma}).$$

ついでに [19] でのべた ε_{00} の奇妙な振舞いについて述べておこう. Polar element ε_{00} は Weyl 表示 ($K{=}0$ の表示) では見えない元だが, $c^2{-}ab = 1$ ならば $\varepsilon_{00}{=}e_*^{\frac{\pi i}{2i\hbar}(au_k^2+bv_k^2+2cu_k\circ v_k)}$ なのである. つまり polar element はいろいろな 1 径数部分群に乗っているのである. これはちょうど北極から出る子午線の集団みたいなもので $\pi/2$ のところで polar element である南極に集まる. 従って polar element は赤道上に無数の 2 乗根を持つのである.

南極を超えた子午線は初期値 1 が (定義によって) 与えられている北極に再び帰っていくのだが, 驚くべきことに, K によっては, 全部が 1 にかえるのではなく, シートを乗り換えて -1 に帰っていくものがあり, しかもこの場合には必ず 1 に帰っていく 1 径数部分群も現れるのである. これは 2 枚のシートが使われているためであるが, polar elements は本質的に 2 価の元 (cf.[16]) なのである. しかし, 集合の要素が 2 価であるという概念はブルバキ数学の中には存在していないので取り扱いは要注意である. polar elements は単独では元としての性格は無く, どの 1 径数部分群に乗ってるかを指定しないと 1 価には決まらない元なのである.

2.3. **Intertwiners.** K を変えたところで代数の同型類は変化しないのだから, 表示 K に依存しないものが本質的なものであると考えるのは一応もっともなのだが, これは少し安直すぎる (cf.[19]). この考えが通用するのは 1 次式の指数関数までであって (cf.[17]), 我々は表示そのものが何か (観測論のような) 物理的意味を持っていると考えている.

K-表示から K'-表示への intertwiner は

$$I_K^{K'}(f) = \exp\Big(\frac{i\hbar}{4}\sum_{i,j}(K'^{ij}{-}K^{ij})\partial_{u_i}\partial_{u_j}\Big)f \ \ (= I_0^{K'}(I_0^K)^{-1}(f)), \tag{5}$$

であり, 同形 $I_K^{K'}:(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_K)\to(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{K'})$ を与える. Intertwiners は $*$-積の代数構造は変えないのだが普通の可換積による元の表示が変更される. これは (A.3) で補空間 B のとり方を変えることに対応するが, 実は補空間 B の変更の方が生成系の非線形な変更まで含むので, はるかに自由である.

上の f) で述べたことと関連するが, intertwiner は 2 次式の指数関数に作用するときには (1 対 1 でなく) 2 対 2 の写像としてしか定義されない (cf.[16], [18]).

2.4. **代数の拡張.** W_{2m} とか $\mathcal{H}_{2m}$ では多項式程度の元しか扱えないから, もう少し超越的な元も代数の元として扱える位に代数を拡張しておく (cf. [14][15]).

任意正定数 p にたいし, 次のような関数空間を作る：

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m})=\{f\in Hol(\mathbb{C}^{2m})\,;\,\|f\|_{p,s}=\sup|f|\,e^{-s|\xi|^p}<\infty,\ \forall s>0\} \tag{6}$$

ただし $|\xi|=(\sum_i|u_i|^2)^{1/2}$ である. セミノルム系 $\{\|\cdot\|_{p,s}\}_{s>0}$ で位相を入れると $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m})$ は普通の可換積 $\cdot$ で閉じて可換位相 Fréchet 代数となる (cf.[5]).

任意の $0<p<p'$ に対して, 連続な埋め込み $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m})\subset\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^{2m})$ がある. また次のように置く,

$$\mathcal{E}_{p+}(\mathbb{C}^{2m})=\bigcap_{p'>p}\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^{2m}),\quad (\text{位相は射影極限位相}) \tag{7}$$

任意の多項式は $\mathcal{E}_{0+}(\mathbb{C}^{2m})$ の元である,

記号を簡単にするため以下では適宜次のような記号を使う: $\langle\boldsymbol{a}\Gamma,\boldsymbol{b}\rangle=\sum_{ij=1}^{2m}\Gamma^{ij}a_ib_j$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle=\sum_{i=1}^{2m}a_iu^i$. これらは次のようにも書く: $\boldsymbol{a}\Gamma\,{}^t\boldsymbol{b}$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle=\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{u}$.

$e^{\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle}\in\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m})$ である. d-次の項式 $p(\boldsymbol{u})$ に対し $e^{p(\boldsymbol{u})}$ は $\mathcal{E}_{d+}(\mathbb{C}^{2m})$ の元であるが, $\mathcal{E}_d(\mathbb{C}^{2m})$ には入らない.

Theorem 2.1. $0<p\le2$ のとき, 積 (1) は次のように拡張される*:*
(1) $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}),*_K)$ は非可換完備結合代数となる.
(2) *Intertwiner* $I_K^{K'}$ は $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}),*_K)$ から $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}),*_{K'})$ への位相同型を与える.

この同型類を $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}),*)$ $(0\le p\le2)$ と書く. $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}),*)$ の元 H_* とは intertwiner で移り合う $I_K^{K'}H_K=H_{K'}$ をみたす族 $\{H_K;K\in\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(2m)\}$ のことであるが, H_K を $:H_*:_K$ のように書く方が良いであろう.

しかし 2 次式の指数関数は定理 2.1 では扱えない. $p>2$ ではは次のようになる:

Theorem 2.2. $p>2$ については $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\ge1$ となるように p' をとると, 積 (1) は連続双線形写像

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m})\times\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^{2m})\to\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}),\quad \mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^{2m})\times\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m})\to\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^{2m}), \tag{8}$$

に拡張される. さらに $f,g,h\in\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^n)$ $(p>2)$ のどれか二つが $\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^n)$ の元ならば, 結合律 $(f*_Kg)*_Kh=f*_K(g*_Kh)$ が成立する. つまり, $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^n)$ は $\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^n)$ を両側作用域に持つ *module* である.

2.5. **指数関数と Hermite 構造.** 包合的反自己同型 $x \to x^\iota$ を生成元のところで

$$u_k^\iota = u_k, \quad k = 1 \sim 2m, \quad i^\iota = -i, \quad \hbar^\iota = \hbar.$$

と置いて定義する. $H \in W_{2m}$ で $H^\iota = H$ をみたす元を **Hermite 元**と呼ぶ, しかしこれの K-順序表示 $:H_*:_K$ が $\overline{:H_*:_K} = :H_*:_K$ という性質を持つわけでないので要注意. 次の公式は有用である:

Proposition 2.2. $e_*^{tH_*}$, $e_*^{tH_*^\iota}$ 及び $e_*^{sH_*^\iota} * e_*^{tH_*}$ が任意の $s, t \in \mathbb{R}$ で定義されているならば, $e_*^{tH_*^\iota} = (e_*^{tH_*})^\iota$ である. 特に, $e_*^{tu_i}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ は *Hermite* 元.

Proof. $f_t = e_*^{tH_*}$, $g_t = e_*^{tH_*^\iota}$ と置く. $\frac{d}{dt} f_{-t} = (-H_*) * f_{-t}$ だから, $\frac{d}{dt} f_{-t}^\iota = f_{-t}^\iota * (-H_*^\iota)$. これより $\frac{d}{dt} f_{-t}^\iota * g_t = f_{-t}^\iota * (-H_*^\iota + H_*^\iota) * g_t = 0$. $f_{-t}^\iota * g_t = 1$ だから, $e_*^{tH_*^\iota} = (e_*^{tH_*})^\iota$. □

2.6. **埋め込み $\mathcal{H}_{2m}[\tau] \subset (\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2}), *)$.** 前のほうで, Heisenberg 代数を作用素に表現するときに μ を単位元となるように表現したのでは Weyl 代数を作用素に表現したことにしかならないから量子化された接触代数 $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ の表現を考えるべきだと述べた. そのために $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ を $*$-積で閉じている $(\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2}), *)$ に埋め込むのだが, まず $\mathbb{C}^{2m+2}$ の座標関数を

$$x_0, x_1, \cdots, x_m, y_0, y_1, \cdots, y_m \tag{9}$$

とし, $(\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2}), *)$ を考える.

表示パラメータ $K \in \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(2(m+1))$ を固定し, $H = \frac{1}{\hbar} e_*^{2y_0}$ とし, これをハミルトニアンと見て $\mu^{-1} = H_* = \frac{1}{\hbar} e_*^{2y_0}$ と置き, さらに次のように置く

$$\mu = \hbar e_*^{-2y_0}, \ \tau = \frac{1}{2}(e_*^{-2y_0} * x_0 + x_0 * e_*^{-2y_0}), \ \tilde{u}_i = e_*^{-y_0} * x_i, \ \tilde{v}_i = e_*^{-y_0} * y_i, \ i = 1 \sim m.$$

これらは Hermite 元であるが, $[e_*^{-2y_0}, x_0] = -2i\hbar e_*^{-2y_0} = -2i\mu$ なので, $\tau = e_*^{-2y_0} * (x_0 + i\hbar) = (x_0 - i\hbar) * e_*^{-2y_0}$ とも書かれる. μ は $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2})$ の中で可逆であり

$$[\mu^{-1}, \tau] = 2i, \ [\mu, \tilde{u}_i] = 0, \ [\mu, \tilde{v}_i] = 0, \ [\tau, \tilde{u}_i] = \mu i * \tilde{u}_i, \ [\tau, \tilde{v}_i] = \mu i * \tilde{v}_i, \ [\tilde{u}_i, \tilde{v}_j] = -i\mu\delta_{ij}.$$

$[\mu * \mu^{-1}, \tau] = 0$ だから, $[\mu, \tau] = 2i\mu^2$ も分かる. $\mathcal{A}$ を $\{\mu, \tau, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i, i = 1 \sim m\}$ で生成される $(\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^{2m+2}), *)$ の閉部分環とする.

Proposition 2.3. $\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ と同型な μ-制御代数である. 従って $\mathcal{H}_{2m}$ を含む. B は $\{\tau^k * \tilde{u}_i^\ell * \tilde{v}_i^n, i = 1 \sim m, \ k, \ell, n \in \mathbb{N}\}$ で張られる閉部分空間である.

$\mu^{-1} \circ \tau = x_0$ なので, $E_t = \mathrm{Ad}(e_*^{t\frac{1}{i\hbar}x_0})$ となる. Characteristic vector field はあからさまに書かれて, $\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\tau}$ である. これは特殊なことのように見えるが, この形は一種の局所標準形である (cf.[22]). これまでは非線形の生成元変更は考えてこなかったのだが

$$(\mu^{-1}, \tau) = (\hbar^{-1} e_*^{2y_0}, \frac{1}{2}(e_*^{-2y_0} * x_0 + x_0 * e_*^{-2y_0})$$

は $y_0 = \frac{1}{2}\log(\hbar\mu^{-1})$ と考えれば非線形の生成元変更と思えないこともない.

3. 真空作用素, POLAR ELEMENTS

式 (2) で与えた 2 次の指数関数を使うと真空作用素が色々作れる.

3.1. 真空作用素, 共役真空作用素. 以下では W_{2m} の生成元を $(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_m)$ とする. m=1 で生成元が u,v のときで考えれば (2) より $s\ll 0$ には特異点が無いから, Cauchy の積分定理より積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_*^{(s+it)\frac{1}{i\hbar}(u_k\circ v_k-\frac{1}{2})}dt$$

は s に無関係となり冪等元となる (cf.[21]). これを $\varpi_{00}(k)$ と書く.

$$\varpi_{00}(k)*\varpi_{00}(k)=\varpi_{00}(k),\quad v_k*\varpi_{00}(k)=0,\quad \varpi_{00}(k)*u_k=0,$$

なのでこれは m=1 のときの真空作用素である. しかも各 k で

$$E_{p,q}^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{p!q!(i\hbar)^{p+q}}}u_i^p*\varpi_{00}(k)*v_i^q$$

は (p,q)-行列要素で, $E_{p,q}^{(k)}*E_{r,s}^{(k)}=\delta_{q,r}E_{p,s}^{(k)}$ が次が成立する. Proposition 2.1, b) のところで述べた a,b で $0<a$ となるような K では, $e_*^{(\log w)\frac{1}{i\hbar}u*v}$ と置いたとき, w に関する (w=0 での)Taylor 級数の収束半径が $e^a>1$ となることより, w=1 と置いて

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_{n,n}^{(k)}(K)=1\quad(\text{Weyl 代数 } W_2 \text{ の } 1)\tag{10}$$

が成立する (cf.[20], [21]). だから Weyl 代数 W_2 の元はすべて行列 $E_{p,q}^{(k)}(K)$ で表現される. m が一般の場合はこれらをテンソル積して考える.

$\widetilde{\varpi}(L)=\varpi_{00}(1)*\varpi_{00}(2)*\cdots*\varpi_{00}(m)$ とする. $\widetilde{\varpi}(L)$ は物理で $|0\rangle\langle 0|$ と書かれるものにあたる, これを**真空作用素**と呼んでおく.

$W_{2m}*\widetilde{\varpi}(L)=\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]*\widetilde{\varpi}(L)$ なので $\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ を何らかの位相で完備化したものを表現空間とするのは問題ないだろうが, 配位空間をどう取るかは真空作用素だけではきまらない. これを $\mathbb{C}^m$ の開集合としてしまうと複素関数論の難問を抱え込むから, Fourier 変換との相性を考えて $\mathbb{R}^m$ の開集合を U として, 余接束 T_U^* 上の関数空間に表現される μ-制御代数を考える. $r=\sqrt{v_1^2+\cdots+v_m^2}$ とし $\mu^{-1}=\sqrt{r^2+1}$ とする. S_U^* を U 上の単位余接束とし $C_0^\infty(S_U^*)$ をその上の, 台がコンパクトな C^∞-関数全体とする. $\mathcal{A}$ を $C^\infty(T_U^*)$ の元で次の形

$$f\sim f_0+f_1r^{-1}+\cdots+f_kr^{-k}+\cdots,\quad f_i\in C_0^\infty(S_U^*).$$

に漸近展開できるものの全体とする. これを **Hörmander 型の表象**と言う. ラフに言えばこれは微分すればするほど質 (たち) が良くなる関数族 (symbol 族) である. Generic(表示空間の中で open dense) な K で $(\mathcal{A},*_K)$ は μ-制御代数となる. $U=\mathbb{R}^m$ のときには characteristic vector field ξ_0 は 1 径数変換群 $T_t: S^*\mathbb{R}^m\to S^*\mathbb{R}^m$ を引き起こす. $T_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$, ($\|\boldsymbol{y}\|$=1). これの orbit space は $2m-2$-次元 symplectic 多様体で $\coprod_{\boldsymbol{y}\in S^{m-1}}\{y^\perp\}$ である.

この積を正規順序表示の積公式 ($K=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$ とした積公式) で Fourier 変換と振動積分を用いて計算すると Hörmander 型の擬微分作用素と呼ばれるものの積公式になっている cf. [13],pp170-172. $\mathcal{A}\to\mathcal{A}*\widetilde{\varpi}(L)$ なる射影はファイバー毎の積分で与えられ, Fourier 変換と振動積分を 組み合わせると $C_0^\infty(U)$ に作用する Hörmander 型の擬微分作用素 (order 0) になる. さらに, $\mathbb{R}$ 上の Lie 環 $i\widetilde{\mathcal{H}}*\mu^{-1}\oplus\mathcal{A}$ は Fourier 積分作用素 (cf.[6]) として exponentiate できる.

双曲距離の場合. $\mathbb{R}^m$ の開集合を $V^*=\{\boldsymbol{v}; v_m^2-\sum_{k=1}^{m-1}v_k^2>0,\ v_m>0\}$ とし $r=\sqrt{v_m^2-\sum_{k=1}^{m-1}v_k^2}$, $\mu^{-1}=\sqrt{r^2+1}$ とする. さらに $\hat{V}=\{\boldsymbol{v}; v_m^2-\sum_{k=1}^{m-1}v_k^2=1,\ v_m>0\}$ とする. $\hat{V}_U^*=\hat{V}\times U$ を U 上の fiber bundle とし $C_0^\infty(\hat{V}_U^*)$ をその上の, 台がコンパクトな C^∞-関数全体とする. $\mathcal{A}$ を $C^\infty(V\times U)$ の元で次の形

$$f\sim f_0+f_1r^{-1}+\cdots+f_kr^{-k}+\cdots,\quad f_i\in C_0^\infty(\hat{V}_U^*).$$

に漸近展開できるものの全体とする. $(\mathcal{A},*_K)$ は generic な K で μ-制御代数となる. 上と同様にして, 擬微分作用素による表現が得られる.

$$v_m^2-\sum_{k=1}^{m-1}v_k^2=\left(v_m+\sqrt{\sum v_k^2}\right)\left(v_m-\sqrt{\sum v_k^2}\right)$$

と因数分解して個別に考えれば $\mathbb{R}$ 上の Lie 環 $i\widetilde{\mathcal{H}}*\mu^{-1}\oplus\mathcal{A}$ も Fourier 積分作用素 (cf.[6]) として exponentiate できる.

共役真空作用素, $s\gg0$ のとき $\overline{\varpi}_{00}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e_*^{(s+it)\frac{1}{i\hbar}(u\circ v+\frac{1}{2})}dt$ は Cauchy の積分定理より s に無関係となり, 冪等元, $\overline{\varpi}_{00}*\overline{\varpi}_{00}=\overline{\varpi}_{00}$ となる. これを**共役真空作用素**と呼ぶ. これは, u,v の立場を入れ替えたものにすぎないが, 表現空間は $\mathbb{C}[v]*\overline{\varpi}_{00}$ であり, $\overline{E}_{p,q}^{(i)}=\frac{\sqrt{-1}^{p+q}}{\sqrt{p!q!(i\hbar)^{p+q}}}v_i^p*\overline{\varpi}_{00}(i)*u_i^q$ は (p,q)-行列要素となる. Hilbert 空間をきめる以前に「行列」のほうが決まっているというところが面白い.

Proposition 2.1, b) のところで述べた a,b で $b<0$ となるような K については, $e_*^{(-\log w)\frac{1}{i\hbar}u*v}$ と置いたとき, w に関する (w=0 での)Taylor 級数の収束半径が $e^{-b}>1$ となることより, w=1 と置いて

$$\sum_n\overline{E}_{n,n}^{(i)}(K)=1\quad(\text{Weyl 代数の }1)\tag{11}$$

である (cf. [20], [21]).

3.2. **複素真空作用素** $\varpi_{\mathbb{C}}(L)$. $z_i=u_1+iv_i$, $z_i^\iota=u_i-iv_i=\bar{z}_i$ とすると $z_i*\bar{z}_i=u_i^2+v_i^2-\hbar$ だから, (4) 式と指数法則より generic な K で, 極限 $:\varpi_{\mathbb{C}}(i):_K=\lim_{s\to-\infty}:e_*^{s\frac{1}{\hbar}z_i*\bar{z}_i}:_K$ は存在し,

$$\bar{z}_i*\varpi_{\mathbb{C}}(i)=0=\varpi_{\mathbb{C}}(i)*z_i,\quad(\varpi_{\mathbb{C}}(i))^\iota=\varpi_{\mathbb{C}}(i)$$

をみたす冪等元となる．これを**部分複素真空作用素**と呼ぶ．§3.1 と同じ計算で，

$$C^{(i)}_{p,q}=\frac{1}{\sqrt{p!q!(i\hbar)^{p+q}}}z_i^p{*}\varpi_{\mathbb{C}}(i){*}\bar{z}_i^q,\quad i=1{\sim}m$$

は (p,q)-行列要素で，$C^{(i)}_{p,q}{*}C^{(i)}_{r,s}{=}\delta_{q,r}C^{(i)}_{p,s}$ が成立する (cf.[12] pp283-303)．しかし§3.1 で (10) と (11) とが同時にみたされる例が無いのと同じ理由で，$\sum_s C^{(i)}_{s,s}(K){=}1$ は成立しないと思われる．

複素真空作用素は $\tilde{\varpi}_{\mathbb{C}}(L){=}\varpi_{\mathbb{C}}(1){*}\cdots{*}\varpi_{\mathbb{C}}(m)$ とする．$W_{2m}{*}\tilde{\varpi}_{\mathbb{C}}(L){=}\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]{*}\tilde{\varpi}_{\mathbb{C}}(L)$ だが，配位空間を $\mathbb{C}^m$ とするとかなり不自由になるので，以下では $\mathbb{C}^m$ の開単位球体を $B^{2m}{=}\{\sum|z_i|^2{<}1\}$ とし，表現空間を B^{2m} 上の有界正則関数全体とする．

$\mathbb{C}^m{=}\mathbb{R}^{2m}$ 内の単位球を S^{2m-1} とし，$C^\infty(S^{2m-1})$ をその上の C^∞-関数全体とする．更に $\rho^{-2}=\sum_{i=1}^{2m}|u_i|^2{+}1$ とする．これを Hamiltonian, ρ を制御子とする．しかしここでは $\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}}$ の関数と考えている．

$\mathcal{A}$ を $C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ の元で次の漸近展開

$$f\sim f_0{+}f_1\rho{+}\cdots{+}f_k\rho^k{+}\cdots,\quad f_i\in C^\infty(S^{2m-1})$$

を持つもの全体とする．これを **Weyl 型表象**と言う (cf.[13] p233)．Generic な K での積公式 $*_{_K}$ で $(\mathcal{A},*_{_K})$ は ρ-制御代数である．$B=C^\infty(S^{2m-1})$ であり characteristic vector field $\mathrm{ad}(\rho^{-1}){=}\xi_0$ は S^{2m-1} 上に S^1-作用をひきおこす．しかし軌道を表す $\xi_0=\frac{\partial}{\partial\tau}$ となるような座標関数 τ は局所的にしか存在しない．この積を Moyal 積公式 ($K{=}0$ の積公式) で Fourier 変換と振動積分を用いて計算すると **Weyl 型の擬微分作用素** (cf.[7]) と呼ばれるものの積公式になっている (cf. [13],pp170-172)．

ここでは，表現空間として何を選んで行列表現を作るのかきまっていないが，B^{2m} を配位空間とすると，Bergmann space と結びつき，Toeplitz operator として表現される (cf.[9]) が，真空がどんな射影作用素になるのかよくわからない．しかし，実変数にこだわって，普通の真空 $\tilde{\varpi}(L)$ の方を選ぶこともできる．こちらを選ぶといわゆる Weyl 型の擬微分作用素として表現される．つまり，Weyl 型表象族で作る μ-制御代数では真空とか配位空間の選び方にはまだ自由度が残る．

3.3. **擬真空作用素.** (cf.[21]) 簡単のためここでは 2 変数 u,v の場合 ($m=1$ の場合) で話をする．Proposition 2.1, c) のところで述べた a,b で $a<0<b$ となる表示 $K{\in}\mathfrak{K}_0$ では，$:e_*^{it(\frac{1}{i\hbar}u\circ v)}:_{_K}$ は 2π-periodic となり，Cauchy の積分定理より積分 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e_*^{it\frac{1}{i\hbar}(u\circ v)}dt$ は $a{<}s{<}b$ なる限り s に無関係となり，冪等元となる．これを $\varpi_*(0)$ と書く．

$$(12)\qquad\begin{gathered}(u{\circ}v){*}\varpi_*(0){=}0{=}\varpi_*(0){*}(u{\circ}v),\\ u^n{*}e_*^{it(\frac{1}{i\hbar}u\circ v)}{=}e_*^{it(\frac{1}{i\hbar}u\circ v-n)}{*}u^n,\quad v^n{*}e_*^{it(\frac{1}{i\hbar}u\circ v)}{=}e_*^{it(\frac{1}{i\hbar}u\circ v+n)}{*}v^n.\end{gathered}$$

と Fourier 級数の直交性より $\varpi_*(0){*}W_2{*}\varpi_*(0){=}\mathbb{C}\varpi_*(0)$ がわかるから，(これを含む μ-制御代数を指定していないが)$\varpi_*(0)$ を真空作用素と呼んでもよいであろう．

$\varpi_*(0)$ を含む μ-制御代数 $\mathcal{A}$ は次のようになる：$\mathbb{R}^2$ の座標関数を u,v とし，$r^2=u^2{+}v^2$ とし，$\mu{=}r^{-1}$ とする．$C^\infty(S^1)$ を $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 上の次数 0 の C^∞ 斉次関数全体とし

$\mathcal{A}$を次のように展開される関数全体とする：

$$f_0(u,v)+\mu f_1(u,v)+\mu^2 f_2(u,v)+\cdots, \quad f_i(u,v)\in C^\infty(S^1)$$

とする．Generic なKで$(\mathcal{A},*_K)$はμ-制御代数であり，$K\in\mathfrak{K}_0$の場合には$(\mathcal{A}[\mu^{-1}],*_K)$は$\varpi_*(0)$を含む．前の場合と違って，$u*\varpi_*(0)*u$のような元も現れるので，便宜的記号の約束として次の記号を使う：

$$(13) \qquad \zeta^k=\begin{cases}u^k, & k\geq 0\\ v^{|k|}, & k<0,\end{cases} \qquad \hat{\zeta}^\ell=\begin{cases}v^\ell, & \ell\geq 0\\ u^{|\ell|}, & \ell<0,\end{cases}$$

$$D_{k,\ell}(K)=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})_k(\frac{1}{2})_\ell(i\hbar)^{|k|+|\ell|}}}\zeta^k*{:}\varpi_*(0){:}_K*\hat{\zeta}^\ell, \quad {:}\varpi_*(0){:}_K=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{:}e_*^{it(\frac{1}{i\hbar}u\circ v)}dt{:}_K dt$$

は$k,\ell\in\mathbb{Z}$について，$D_{k,\ell}(K)*D_{r,s}(K)=\delta_{\ell,r}D_{k,s}(K)$をみたし，行列要素となる．但し$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$, $(a)_0=1$, $(a)_{-n}=(a-1)(a-2)\cdots(a-n)$である．

${:}e_*^{it\frac{1}{i\hbar}u\circ v}{:}_K$ の Fourier 級数展開は

$${:}e_*^{it\frac{1}{i\hbar}u\circ v}{:}_K=\sum_n D_{n,n}(K)e^{int}, \quad D_{n,n}(K)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{:}e_*^{is(\frac{1}{i\hbar}u\circ v-n)}{:}_K ds.$$

となる．Fourier 級数の収束性より$a<0<b$となるような$K(K\in\mathfrak{K}_0)$については$t=0$として次が成立する:

$$1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}D_{n,n}(K), \quad (\text{左辺の 1 は Weyl 代数の 1})$$

だから Weyl 代数W_2の元はすべて行列$D_{r,s}(K)$で表現される．

物理では正規順序表示 (normal ordering) とか Weyl 表示 (Weyl ordering) しか使わないので，擬真空作用素は現れないように見える．しかも，$\frac{1}{i\hbar}u\circ v$が半有界に表現されないので，これは物理的にはあまり歓迎されない都合の悪い元のようにも見える．

表現空間は$\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]*\varpi_*(0)$だが記号の約束で，$\zeta^{-1}$は$\zeta$の逆元ではなく，$(u*v+\frac{1}{2}i\hbar)*\varpi_*(0)=(u\circ v)*\varpi_*(0)=0$だから，表現空間の中では$u*v=i\hbar$としてよい．表現空間の中に現れる代数なのに非可換代数とみているわけで，これを考慮すると，[12]p.230 の**非可換極座標系**の代数と同型なものとして扱うと都合がよいらしいことがわかる．表現空間の代数自身が極座標系の量子化だと見ていることになる．この場合の配位空間は単位円盤Dである．

3.4. **電磁場付き抽象的真空作用素.** 上の例では生成元の変更が配位空間の変更にもつながる例だが，配位空間を変えない生成元の変更もある．電磁場をある line bundle 上の接続の曲率形式と考えればよいというのは Weyl も言っているし，Dirac もそれを使っているが，これは真空作用素の変更とみなすことができるというのがこの節の主題である．

Weyl 代数 W_{2m} の生成系を $(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_m)$ $[u_i,v_j]=-i\hbar\delta_{ij}$ としよう．このような生成系に関する**真空作用素** $\varpi(u,v)$ は Weyl 順序表示では

$$:\varpi(u,v):_0=2^m e^{\frac{2}{i\hbar}\sum_k u_k\circ v_k}$$

のように書かれ，$\varpi(u,v)*\varpi(u,v)=\varpi(u,v)$ かつ $v_j*\varpi(u,v)=0=\varpi(u,v)*u_i$ を充たすものとして理解される．

Weyl 代数 W_{2m} に別の生成系 $(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)$ があって真空作用素 $\varpi(x,y)$ が $:\varpi(x,y):_0=2^m e^{\frac{2}{i\hbar}\sum_k x_k\circ y_k}$ で

$$\varpi(x,y)*\varpi(x,y)=\varpi(x,y),\quad y_j*\varpi(x,y)=0=\varpi(u,v)*x_i$$

をみたすものとして与えられたとしよう．さらにこの二つの生成系には関係

$$(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_m)=(x_1,\cdots,x_m,y_1-i\hbar\phi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,y_m-i\hbar\phi_m(\boldsymbol{x})).$$

があるものとしよう．すると $\varpi(x,y),\varpi(u,v)$ はどちらで書いても真空作用素である．二つの真空作用素のずれが電磁場と認識されるのである．$v_i*\varpi(u,v)=0$ なので $y_i*\varpi(u,v)=i\hbar\phi_i(\boldsymbol{x})*\varpi(u,v)$ である．$\phi_j*\phi_i*\varpi(u,v)=\phi_i*\phi_j*\varpi(u,v)$ に注意すれば，

$$[y_i,y_j]*\varpi(u,v)=y_i*(y_j*\varpi(u,v))-y_j*(y_i*\varpi(u,v))=(i\hbar)^2(\partial_{x_i}\phi_j(\boldsymbol{x})-\partial_{x_j}\phi_i(\boldsymbol{x}))*\varpi(u,v).$$

$\theta=\sum i\hbar\phi_i(\boldsymbol{x})dx_i$ とおけば．上の関係は共変微分

$$\nabla_X\varpi(u,v)=\theta(X)*\varpi(u,v),\quad \nabla_X\varpi(x,y)=0$$

であり，曲率形式は $\nabla_X(\nabla_Y\varpi(u,v))-\nabla_Y(\nabla_X\varpi(u,v))=d\theta(X,Y)*\varpi(u,v)$ である．

しかし，§2.2 で述べたように 2 次式の指数関数は一般には 2 枚のシートを用意して考えるべきものであるから，真空作用素にあたるものも $\oplus$ シートの真空作用素と $\ominus$ シートの真空作用素の二つが現れる (cf. [20])．これが電磁場の記述では大きな意味をもつように見えるので次節で詳しくみよう．

3.5. Polar element, Clifford-vacuum.

Proposition 2.1, e) のところで $\varepsilon_{00}(k)=e_*^{\frac{\pi i}{i\hbar}\tilde{u}_k\circ\tilde{v}_k}$ は **polar element** と呼ぶ奇妙な元であると述べた．確かに

$$\varepsilon_{00}(k)*u_l=(-1)^{\delta_{kl}}u_l*\varepsilon_{00}(k),\quad \varepsilon_{00}(k)*v_l=(-1)^{\delta_{kl}}v_l*\varepsilon_{00}(k),\quad (k=1\sim m)$$

であり，$\varepsilon_{00}(k)*\tilde{\varpi}(L)=\tilde{\varpi}(L)*\varepsilon_{00}(k)$, $\varepsilon_{00}(k)*\tilde{\varpi}(L)=\pm i\tilde{\varpi}$ (不確定) となる．

ところが一方，K_s-表示と称するある特別な表示 (cf.[18]) においては上の性質に加えて $\varepsilon_{00}(1),\cdots,\varepsilon_{00}(m)$ は Clifford 環 $\boldsymbol{C}(m)$ をなすのである，　つまり

$$:\varepsilon_{00}(k)*\varepsilon_{00}(\ell):_{K_s}+:\varepsilon_{00}(\ell)*\varepsilon_{00}(k):_{K_s}=-2\delta_{k\ell}$$

なのである．この奇妙な現象は指数関数 $:e_*^{i\frac{1}{i\hbar}(su_k\circ v_k+tu_\ell\circ v_\ell)}:_{K_s}$ が $(s,t)\in(0,\pi)^2$ で 1 点 (s_0,s_0) に分岐特異点を持ち，そこ以外では正則となっていることに起因する．

以下では $e_i=\varepsilon_{00}(i)$ と表し，$dV=\coprod_{i=1}^m *e_i$, $(e_i*e_j)^\sharp=e_i*e_j*dV$ 等と表す．

ところで，電磁場の式はもともと積分形で書かれているので，これと関連させるために次のような “無限小スカラー” δx を導入する:

$$(\delta x)^2=0,\quad \delta x^2=(\delta x)x+x\delta x=0.$$

多変数での積分の為の無限小としては

$$\delta u_i \delta u_j = \delta u_j \delta u_i, \quad (\delta u_i)^2 = 0, \quad (\delta u_i) u_j = (-1)^{\delta_{ij}} u_j \delta u_i.$$

そこで, $du_i = \delta u_i e_i$ と置けば,

$$du_i * du_j + du_j * du_i = 0, \, u_i * du_j = du_j * u_i$$

となり, Grassmann 代数が現れ. 外微分をうまく定義して, 微分形式の代数が得られる. "無限小スカラー" δu_i は Weyl 代数とは関係なく, 線積分, 面積分のような配位空間内の "図形" に沿う積分を考える為の補助手段として導入されるのだが, Clifford 環と合わせると微分形式の代数になる. これは配位空間と称する連続体の中での微積分の代数である.

話を簡単にするため, 以下では $m=4$ で考える. そこで, 真空作用素が $\widetilde{\varpi}(u,v)$ から $\widetilde{\varpi}(x,y)$ に変更され, 生成元も次のように変更されたとしよう：

$$(u_1, \cdots, u_4, v_1, \cdots, v_4) = (x_1, \cdots, x_4, y_1 - i\hbar\phi_1(\boldsymbol{u}), \cdots, y_4 - i\hbar\phi_4(\boldsymbol{u}))$$

ただし, $\phi_i(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{R}^8)$ 程度としておく. 真空作用素 $\widetilde{\varpi}(u,v) = \widetilde{\varpi}$, および du_i はもとのままだから dx_i と表し, これを x, y で計算する. $\theta = \sum_k dx_k * \frac{1}{i\hbar} y_k$ とすると

$$\theta * \widetilde{\varpi} = \sum dx_k * \phi_k(\boldsymbol{x}) * \widetilde{\varpi}, \quad \theta * dV * \widetilde{\varpi} = \sum dx_k * \phi_k(\boldsymbol{x}) * dV * \widetilde{\varpi} = \sum \phi_k(\boldsymbol{x}) * dx_k^\sharp * \widetilde{\varpi},$$

$$\theta * (\theta * \widetilde{\varpi}) = \sum_{i<j} dx_i * dx_j * (\partial_j \phi_i - \partial_i \phi_j) * \widetilde{\varpi}.$$

2 枚のシートで考えると, 真空作用素が二つできるが, これを $\begin{bmatrix} \widetilde{\varpi} \\ dV * \widetilde{\varpi} \end{bmatrix}$ と表す.

$$\theta * \begin{bmatrix} \theta * \widetilde{\varpi} \\ \theta * dV * \widetilde{\varpi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i<j} dx_i * dx_j * (\partial_i \phi_j - (\partial_j \phi_i) * \widetilde{\varpi} \\ \sum (dx_i * dx_j)^\sharp * (\partial_i \phi_j - (\partial_j \phi_i) * \widetilde{\varpi} \end{bmatrix}.$$

なので,

$$\theta * \begin{bmatrix} \sum_{i<j} dx_i * dx_j * (\partial_i \phi_j - (\partial_j \phi_i) * \widetilde{\varpi} \\ \sum_{i<j} (dx_i * dx_j)^\sharp * (\partial_i \phi_j - (\partial_j \phi_i) * \widetilde{\varpi} \end{bmatrix}$$

を計算する. Jacobi の恒等式より第 1 成分は

$$\theta * \sum_{i<j} dx_i * dx_j * (\partial_i \phi_j - (\partial_j \phi_i) * \widetilde{\varpi} = 0$$

第 2 成分を

$$\theta * \sum (dx_i * dx_j)^\sharp * (\partial_i \phi_j - \partial_j \phi_i) * \widetilde{\varpi} = \sum_{k=1}^{4} dx_k^\sharp J_k(\boldsymbol{x}),$$

とすると, 右辺は電荷・電流密度とよばれる 3 次閉微分形式に対応していて, Maxwell の式になっている.

4. Heisenberg vacuum

この節で $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ の真空表現を考えるが, 「真空」なるものを少し変更した真空作用素が必要である. $\mathbb{R}^{2m+2}$ の座標関数を

$$x_0, u_1, \cdots, u_m, y_0, v_1, \cdots, v_m \tag{14}$$

とし, $(\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{R}^{2m+2}), *)$ を考える. $\widetilde{\varpi}(L_0)=\varpi_{00}(0)*\widetilde{\varpi}(L)$ とする. $\mu*\widetilde{\varpi}(L_0)=\widetilde{\varpi}(L_0)$ である.

以下の計算では計算を簡単にするため Weyl 表示 $(K=0)$ を使って計算し, $:X:_0$ と書くのは略すことが多いが, おもな結論はかなり一般な表示で成立する. $*_0$-積公式では次のような計算公式になる：

$$:\varpi_{00}:_0 = 2e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}, \quad :\overline{\varpi}_{00}:_0 = 2e^{\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}.$$

$$f(y_0)*_0e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}=f(0)e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}, \quad e^{\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}*_0f(x_0)=e^{\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}f(0),$$

$$e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}*_0f(y_0)=f(2y_0)e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}, \quad f(x_0)*_0e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}=f(2x_0)e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0}.$$

4.1. 指数関数 $e_*^{it\tau}*F$, $F*e_*^{-it\tau}$ の計算. $\tau=\frac{1}{2}(e_*^{-2y_0}*x_0+x_0*e_*^{-2y_0})$ だから $\tau=e^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)=(x_0-i\hbar)*e^{-2y_0}$. $:\tau:_0=e^{-2y_0}x_0$ 等となる.

$*$-指数関数 $:e_*^{ite^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)}:_K$ とか, それとの $*$-積 $:e_*^{ite^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)}*F:_K$ は以下の方程式で定義される：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}F_t = :(ie_*^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)):_K*_KF_t, \quad F_0 = :F:_K \\ &\frac{d}{dt}\hat{F}_t = \hat{F}_t*_K:(ie_*^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)):_K, \quad \hat{F}_0 = :F:_K. \end{aligned} \tag{15}$$

Hermite 構造 $a \to a^\iota$ があるので, 第 2 のものは

$$\frac{d}{dt}\hat{F}^\iota_{-t}=-(ie_*^{-2y_0}*(x_0+i\hbar)):_K*_K\hat{F}^\iota_{-t}$$

として扱えるから不要である. $i\tau$ は skew-hermitian なので次の保存則が成立する:

$$\frac{d}{dt}F_t^\iota*F_t = 0. \tag{16}$$

実解析解の一意性を考慮すれば $F_t = F_t(x_0, y_0)$ と 2 変数の関数に限定して考えてよい. まず次のことに注目:

Proposition 4.1. $\varpi_{00}*e_*^{is\tau}*\varpi_{00}=\frac{1}{\sqrt{1-2s\hbar}}$, 従って, $\sqrt{1-2s\hbar}e_*^{is\tau}*\varpi_{00}$ は真空作用素である.

Proof $\varpi_{00}*x_0 = 0$, $e^{-2y_0}*\varpi_{00}=\varpi_{00}$ に注意して $\varpi_{00}*(\tau_*^n)*\varpi_{00}$ を計算すると, $\varpi_{00}*(is\tau_*^n)*\varpi_{00}=(\frac{1}{2})_n(s\hbar)^n*\varpi_{00}$ となり, これより

$$\sum_n \varpi_{00}*\frac{1}{n!}(is\tau_*^n)*\varpi_{00}=\sum_n\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})_n(s\hbar)^n=\frac{1}{\sqrt{1-2s\hbar}}*\varpi_{00}, \quad |2s\hbar| < 1.$$

となることからわかる. □

方程式 (15) については

$$(x_0+i\hbar)*_0F_t(x_0,y_0)=(x_0+i\hbar)F_t(x_0,y_0)-\frac{i\hbar}{2}\partial_{y_0}F_t(x_0,y_0)$$

であり

$$e^{-2y_0}*_0 f(x_0,y_0)=e^{-2y_0}f(x_0-i\hbar,y_0)$$

だから (15) は初期条件 F_0 で次の式となる：

$$\frac{d}{dt}F_t(x_0,y_0)=ie^{-2y_0}x_0F_t(x_0-i\hbar,y_0)+\frac{\hbar}{2}e^{-2y_0}\partial_{y_0}F_t(x_0-i\hbar,y_0). \tag{17}$$

$F_t(x_0,y_0)=G_t(x_0,y_0)e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}$ と置いてやると， (17) 式は次に変わる：

$$\frac{d}{dt}G_t(x_0,y_0)=\frac{\hbar}{2}e^{-4y_0}\partial_{y_0}G_t(x_0-i\hbar,y_0),\quad G_0=F_0(x_0,y_0)e^{-\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}. \tag{18}$$

(18) は微分方程式ではなく, 微分差分方程式である.
実は次のような, 驚くべきことが成立する：

Theorem 4.1. ある表示の族では $\mathrm{Ad}(e_*^{ti\tau})$ は $t\geq 0$ でしか定義されない. 正確には $t<0$ でも定義はできるが, 指数法則 $\mathrm{Ad}(e_*^{si\tau})\mathrm{Ad}(e_*^{ti\tau})=\mathrm{Ad}(e_*^{(s+t)i\tau})$ は $s,t\geq 0$ でしか成立しない. これは時間が一方向きであることを考えれば歓迎できる.

さらに, $t\leq -1$ のとき $:e_*^{it\tau}*\widetilde{\varpi}(L_0):_K=0$ である. そこで $s=-t$ として, 真空作用素の族

$$\{:\sqrt{1+2s\hbar}\, e_*^{-is\tau}*\widetilde{\varpi}(L_0):_K, s>-1/2\hbar\}$$

を **Heisenberg 真空作用素**と呼ぶことにする. $\mu*\widetilde{\varpi}(L_0)=\hbar\widetilde{\varpi}(L_0)$ より

$$\mu^{-1}*e_*^{-is\tau}*\widetilde{\varpi}(L_0)=(2s+\hbar^{-1})\widetilde{\varpi}(L_0)=\frac{1}{\hbar}(2s\hbar+1)\widetilde{\varpi}(L_0)$$

だから

$$\mu*e_*^{-is\tau}*\widetilde{\varpi}(L)=\begin{cases}\frac{\hbar}{2s\hbar+1}\ e_*^{-is\tau}*\widetilde{\varpi}(L), & 2s\hbar+1>0\\ \qquad 0, & 2s\hbar+1\leq 0\end{cases}$$

これはエネルギーの正値性からみるとむしろ歓迎すべきことである.

このようなことが起こるのは無論無限次数の関数の $*$-指数関数のせいだが, どの程度一般的なものかはよくわからない.

4.2. **Fourier 変換.** $G_t(x_0,y_0)$ が緩増加超関数 $a(t,\xi,y_0)$ の Fourier 変換を使って

$$G_t(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\xi,y_0)e^{i\xi x_0}d\!\!\bar{}\,\xi,\quad G_0(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}a(0,\xi,y_0)e^{i\xi x_0}d\!\!\bar{}\,\xi$$

のように書けているものとしよう. $a(t,\xi,y_0)$ は ξ について compact 台だと考えやすいが, そうなっていなくてもたいした問題にはならない. 実変数だから $G_t(x_0-i\hbar,y_0)$ を考えるときには ξ を平行移動して

$$G_t(x_0-i\hbar,y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\xi,y_0)e^{i\xi(x_0-i\hbar)}d\!\!\bar{}\,\xi=\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\xi,y_0)e^{\hbar\xi}e^{i\xi x_0}d\!\!\bar{}\,\xi.$$

とする. すると方程式 (18) は ξ をパラメータにする, 次の微分方程式となる：

$$(e^{-\hbar\xi}\partial_t - \frac{\hbar}{2}e^{-4y_0}\partial_{y_0})a(t,\xi,y_0) = 0. \tag{19}$$

(19) は $a(t,\xi,y_0)$ が (y_0,t)-面上の実ベクトル場 $e^{-\hbar\xi}\partial_t - \frac{\hbar}{2}e^{-4y_0}\partial_{y_0}$ に沿って一定ということを示しているから, 一般解は $\mathbb{R}^2$ 上の (下の条件 1 をみたす) 任意関数 $\phi(\xi,\eta)$ を使って

$$a(t,\xi,y_0) = \phi(\xi, 2\hbar t + e^{-\hbar\xi}e^{4y_0}), \quad a(0,\xi,y_0) = \phi(\xi, e^{-\hbar\xi}e^{4y_0}) \tag{20}$$

として与えられる.

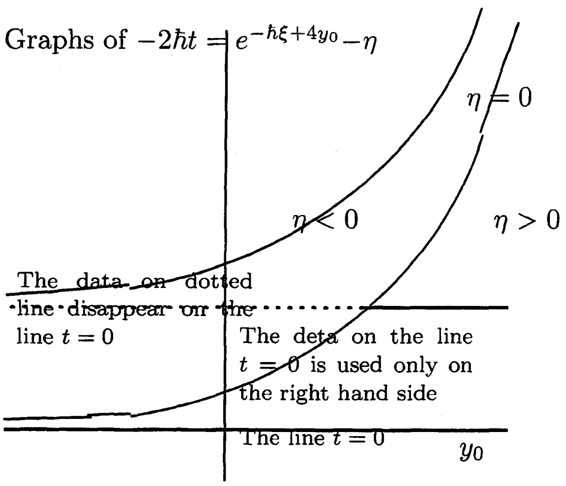
条件 1. $f(\xi) = \phi(\xi, 2\hbar t + e^{-\hbar\xi}e^{4y_0})$ も緩増加超関数. 緩増加超関数とは急減少関数の双対だから, $\phi(\xi,\eta)$ が $\eta=\infty$ の近くで多項式程度になっておればよく, 成立しやすい条件である.

ここでは次のような奇妙な現象が起こる. 任意に固定した ξ で, $\eta=2\hbar t+e^{-\hbar\xi}e^{4y_0}$ と置くと $a(t,\xi,y_0)$ は曲線 $\eta=2\hbar t+e^{-\hbar\xi}e^{4y_0}$ 上で一定だから, $\eta \leq 0$ だと

$$\eta - e^{-\hbar\xi}e^{4y_0} = 2\hbar t$$

は常に負である. このような曲線は初期面 $t=0$ を通過できない. $t=0$ での初期データは $\eta>0$ のところでしか与えられないのである:

$$a(0,\xi,y_0) = \phi(\xi,\eta), \quad \eta = e^{-\hbar\xi}e^{4y_0} \quad i.e.\ 4y_0 = \hbar\xi + \log\eta. \tag{21}$$



$\phi(\xi,\eta)$ が与えられた場合, $t=0$ でのデータは $\phi(\xi, e^{-\hbar\xi+4y_0})$ で与えられるがこれには $\eta > 0$ の部分のデータしか使われていない. 領域 $\eta < 0$ のところでどんな関数を付け加えても影響がないのだから, (15) 式は**過去** ($t_0<0$) **方向には一意性がない**のである. また, 未来 ($t_0>0$) 方向では $t=0$ の一部のデータが失われる. ではあるが, 次も成り立つ：

Proposition 4.2. 領域 $\eta \leq 0$ で $\phi(\xi,\eta)=0$ としてしまえば, つまりこの領域 $\eta \leq 0$ でのデータを使わないことにしてしまえば, (15) の解は $t=0$ の初期データで一意的に定まる.

このことは指数法則 $e_*^{is\tau}*e_*^{it\tau}*F = e_*^{i(s+t)\tau}*F$ が $t>0$, $s<0$ では成立しないことを意味する. 初期 ($t=0$) データ $a(0,\xi,y_0)=a(0,\xi,\frac{1}{4}(\hbar\xi+\log\eta))$ でスタートし, s $(s>0)$ での解 (一意的) を $a(s,\xi,\frac{1}{4}(\hbar\xi+\log\eta))$ とする. しかしこのとき $0<\eta<2\hbar s$ にあるデータは捨てられている. そこでこの $t=s$ を初期データとして $t=0$ に戻っていくことを考える. $t=0$ のもとのデータには戻らないことは明らかである. このことは各データを ξ について積分しても同様である. つまり, $e_*^{it\tau}*F$ については**未来に**

向かって進んでから後戻りしてももとには戻らない (覆水盆に復らず) のである. しかし, 逆に**過去のデータから前進のみすれば指数法則は保たれる** (半群 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の作用になっている).

これは随伴作用素 $\mathrm{Ad}(e_*^{it\tau})F = e_*^{it\tau}{*}F{*}e_*^{-it\tau}$ に影響を与える. $\mathrm{Ad}(e_*^{it\tau})$ は F^ι が使えれば, $e_*^{it\tau}{*}(e_*^{it\tau}{*}F^\iota)^\iota$ で定義される. 上の考察から $t{>}0$ のときは $\mathrm{Ad}(e_*^{it\tau})F = 0$ となるような元 F があり単射でないが, 解が一意的になるよう (cf. Proposition 4.2) にしておけば $t{\leq}0$ のときは $\mathrm{Ad}(e_*^{it\tau})$ は単射となる. しかし, このような細工をしない限り $\mathrm{Ad}(e_*^{it\tau})$ は定義されない.

これまでの考察から, つぎがわかる:

Proposition 4.3. 条件 *1* をみたす ξ に関する緩増加超関数 $\phi(\xi,\eta)$ が $\eta > 0$ で $\phi(\xi,\eta) = 0$ となっているならば $G_t(x_0,y_0){=}\int_{\mathbb{R}}\phi(\xi, 2\hbar t{+}e^{-\hbar\xi+4y_0})e^{i\xi x_0}d\xi$ は $t{\geq}0$ で $G_t(x_0,y_0){=}0$. 従って $F_t(x_0,y_0){=}G_t(x_0,y_0)e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}$ は (15) をみたすが, $t{\geq}0$ では $F_t(x_0,y_0){=}0$ となる. ここで $t = t_0{>}0$ 値を初期データとして使おうとすれば, $-2\hbar t{=}e^{-\hbar\xi+4y_0}{+}\eta$ の代わりに $-2\hbar(t{+}t_0){=}e^{-\hbar\xi+4y_0}{+}\eta$ を使うことになるが, そこには 0 以外のデータがある.

Note $\phi(\xi,\eta)$ を ξ に関してコンパクトな台を持つ緩増加超関数とすれは, これは条件 1 をみたすから, $t\in\mathbb{R}$ で $\hat{g}_a(\xi,y_0){=}\phi(\xi, 2\hbar t{+}e^{-\hbar\xi+4y_0})$ と置き

$$:g_t(x_0,y_0):_0 = \int_{\mathbb{R}}\hat{g}_t(\xi,y_0)e^{i\xi x_0}d\xi$$

とすると, 積分

$$F_t(x_0,y_0){=}\int_{\mathbb{R}}\hat{g}_t(\xi,\frac{1}{4}(\hbar\xi{+}\log(e^{-\hbar\xi+4y_0}{+}2\hbar t))e^{i\xi x_0}d\xi\; e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}$$

は (17) の解で未来方向には一意的である. 従って,

$$F_t(x_0,y_0){=}{:}e_*^{it\tau}{:}_0{*_0}F_0(x_0,y_0),\quad t\geq 0.$$

のように書いてよいだろう. これより

Proposition 4.4. 正方向には次の指数法則が成立する：
$:e_*^{i(s+t)\tau}{:}_0{*_0}F_0(x_0,y_0){=}{:}e_*^{is\tau}{*}e_*^{it\tau}{:}_0{*_0}F_0(x_0,y_0),\ s,t{>}0.$

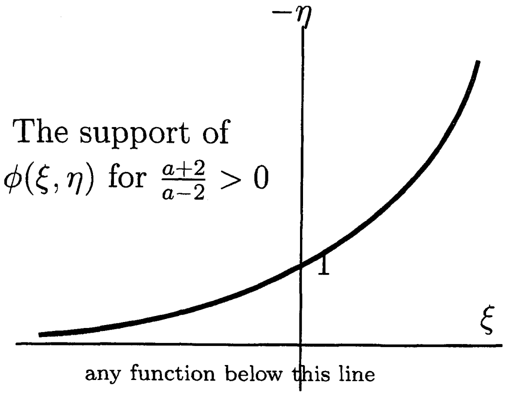
4.3. **初期値 $e^{a\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}$ の解.** $:e_*^{it\tau}{:}_0{*_0}e^{a\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}$, $a{\in}\mathbb{R}$, をもう少し精密に解を調べよう. $e^{(a-2)\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}{=}\int_{\mathbb{R}}\delta(\xi{+}\frac{a-2}{\hbar}y_0)e^{i\xi x_0}d\xi$, に注意すると

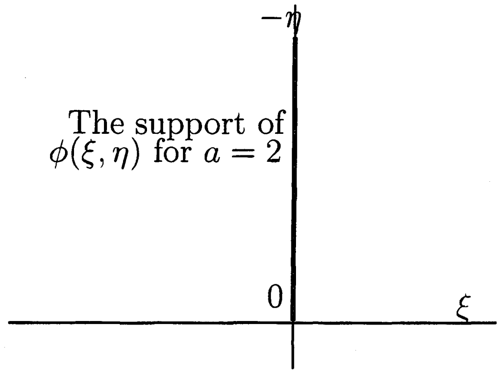
$$e^{a\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}{=}\int e^{-2y_0}\delta(\xi{+}\frac{a-2}{\hbar}y_0)e^{i\xi x_0}d\xi e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}$$

だから, (21) に於ける 初期データは $\phi(\xi,\eta)$ に $y_0 = \frac{1}{4}(\hbar\xi{+}\log(\eta))$ を代入して, 次で与えられる：

$$\phi(\xi,\eta) = e^{-2y_0}\delta(\xi{+}\frac{a-2}{\hbar}y_0){=}e^{-\frac{1}{2}(\hbar\xi+\log\eta)}\delta((1{+}\frac{a-2}{4})\xi{+}\frac{a-2}{4\hbar}\log\eta),$$

$\delta(x)$ の台は $x=0$ だから, $\phi(\xi,\eta)$ の台は (ξ,η) 平面内の曲線 $(\frac{a+2}{4})\xi+\frac{a-2}{4\hbar}\log\eta=0$ となる：





しかし初期データは "半分" の領域 $\eta>0$ での $\phi(\xi,\eta)$ をきめているだけである.

解は η を $2\hbar t+e^{-\hbar\xi+4y_0}$ に置き換えて得られるから：

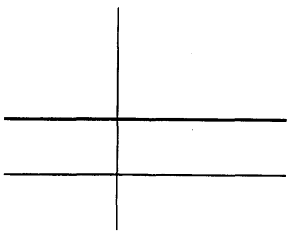
(22)

$$:e_*^{it\tau}:_0 *_0 e^{a\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}=$$

$$\int e^{-\frac{1}{2}(\hbar\xi+log(e^{4y_0-\hbar\xi}+2\hbar t))}\delta\Big((\frac{a+2}{4})\xi+\frac{a-2}{4\hbar}\log(e^{4y_0-\hbar\xi}+2\hbar t)\Big)e^{i\xi x_0}d\xi\; e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}.$$

である. 少し計算すると $:e_*^{it\tau}:_0 *_0 e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}=e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0}$ ということ等がわかるが, $a=-2$ 以外は計算結果が表示 K に大きく依存していて, 一般的なことを言うのは難しいので, 以下では $a=-2$ 場合を調べることにする：

The case $a=-2$. この場合は $:\varpi_{00}:_0=2e^{-2\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}$ なので, $e_*^{it\tau}*\varpi_{00}$ を Weyl 表示で計算していることになるが, $\phi(\xi,\eta)$ の台は図のようになる. これが真空表現に関係する.



ここでは $\phi(\xi,\eta)=e^{-\frac{1}{2}(\hbar\xi+\log\eta)}\delta(-\frac{1}{\hbar}\log(\eta))$ である. $\phi(\xi,\eta)$ の台は痩せていて (ξ,η) 平面内の $\eta=1$ という直線である. $\xi'=-\frac{1}{\hbar}\log(e^{-\hbar\xi+4y_0}+2\hbar t)$ と置くと, $1\leq 2\hbar t$ のときには ξ' は 0 になりえない. つまり, $1-2\hbar t\leq 0$ では $\delta(\xi')=0$ である. 従って解は

$$:e_*^{it\tau}:_0 *_0 e^{-2\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}=\begin{cases}0 & 2\hbar t\geq 1\\ e^{-\frac{\hbar}{2}(\xi-\xi')}\int\delta(\xi')e^{i\xi x_0}d\xi\; e^{\frac{2}{i\hbar}(x_0+i\hbar)y_0} & 2\hbar t<1\end{cases}$$

$\xi'=0$ となるのは $\hbar\xi=4y_0-\log(1-2\hbar t)$ のときで, $e^{-\frac{1}{2}\hbar\xi}|_{\xi'=0}=\sqrt{1-2\hbar t}\,e^{-2y_0}$ であるから,

$$\frac{d\xi'}{d\xi}\Big|_{\xi'=0}=\frac{e^{-\hbar\xi}e^{4y_0}}{e^{-\hbar\xi}e^{4y_0}+2\hbar t}=1-2\hbar t$$

となる. 従って解は,

$$(23)\qquad :e_*^{it\tau}:_0 *_0 e^{-2\frac{1}{i\hbar}x_0y_0} = \begin{cases} 0 & 2\hbar t \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-2\hbar t}} e^{-i\frac{x_0}{\hbar}\log(1-2\hbar t)} e^{-\frac{2}{i\hbar}x_0y_0} & 2\hbar t<1 \end{cases}$$

となる. 真空作用素は $:\varpi_{00}:_0 = 2e^{-2\frac{1}{i\hbar}x_0y_0}$ であって $:f(x_0):_0 *_0 :\varpi_{00}:_0 = f(2x_0):\varpi_{00}:_0$ だったから, (23) は Weyl 表示 : $:_0$ で計算してきたが, 結局表示によらない式として読みとれるから, $t=-s$ として

$$e_*^{-is\tau} * \varpi_{00} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1+2\hbar s}} e_*^{-i\frac{x_0}{2\hbar}\log(1+2\hbar s)} * \varpi_{00} & s > -1/2\hbar \\ 0 & s \leq -1/2\hbar. \end{cases}$$

のように書いてよい.

Note 真空作用素を初期条件とする解が $2\hbar t \geq 1$ で 0 となるというのだが, このことは保存則 (16) に矛盾しない. これは $F_t^\iota * F_t = 0$ を意味するだけである. $t=0$ では $\overline{\varpi}_{00} * \varpi_{00} = 0$, $\varpi_{00}^\iota = \overline{\varpi}_{00}$ である (cf. [20]).

4.4. $\mathcal{H}_{2m}[\tau]$ **の表現空間.** $\mathbb{R}_{>0}$ 上の自明束 $\coprod_{2s\hbar+1>0} \mathbb{C}[\boldsymbol{x}] * e_*^{-is\tau} * \tilde{\varpi}_0(L)$ を考えこれの連続切断の全体を $\Gamma(\coprod_{2s\hbar+1>0} \mathbb{C}[\boldsymbol{x}] * e_*^{-is\tau} * \tilde{\varpi}_0(L))$ とする. $\mathcal{H}_{2m}$ をここに作用させるのだが真空作用素の族を $\{e_*^{-is\tau} * \varpi_{00}; s > -1/2\hbar\}$ を真空作用素と呼んだからこれも真空表現といってよいであろう.

$$\mu * f(s,\boldsymbol{x}) * e_*^{-is\tau} * \tilde{\varpi}_*(L_0)) = \frac{\hbar}{2s\hbar+1} f(s,\boldsymbol{x}) * e_*^{-is\tau} * \tilde{\varpi}_*(L_0))$$

は各ファイバーでは Weyl 代数の表現になっているが, μ にあたるものが $\frac{\hbar}{2s\hbar+1}$ と表現され, τ は $-i\partial_s$ と表現されている. 特に $[u_k, v_l] = \mu i \delta_{kl}$ は $[u_k, v_l] = \frac{i\hbar}{1+2\hbar s}\delta_{kl}$ である. この結果を Berezin[4] と対比させてみると, 何やら flat metric の入った相空間を与えているようにも見える.

表現空間としては $\mathbb{C}[x_0, \boldsymbol{x}] * e_*^{-is\tau} * \tilde{\varpi}_*(L_0))$ を使うこともできるが, これで表現すると上とは別の描像が現れる.

References

[1] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, SPECIAL FUNCTIONS, Encyclopedia Math, Appl. 71, Cambridge, 2000.

[2] G. S. Agawal, E. Wolf, *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space method of functions*, Physcal Review D, vol.2, no.10, 1970, 2161-2186.

[3] F.Bayen, M,Flato, C.Fronsdal, A.Lichnerowicz, D.Sternheimer, *Deformation theory and quantization I, II*, Ann. Phys. 111, (1977), 61-151.

[4] F. Berezin, *General concept of quantization,* Comm. Math. Phys. 8 (1975), 153-174.

[5] I.M.Gel'fand, G.E.Shilov, Generalized Functions, 2, Acad. Press, 1968.

[6] L. Hörmander *Fourier Integral operators, I*, Acta Math. 127 (1971), 79-183.

[7] L. Hörmander, *The Weyl calculua of pseudo-differential operators*, Commun. Pure. Appl. Math. 32 (1979) 359-443

[8] N. Hitchin, *Lectures on special Lagrangian submanifolds*, arXiv:math.DG/9907034vl 6Jul, 1999.

[9] N.P. Jewll, *Toeplitz operators on the Bergman space and in several complex variables*, Proc. London Math. Soc. (3) 41,1980 pp193-216.
[10] M. Kontsevitch Deformation quantization of Poisson manifolds, I, qalg/9709040.
[11] H. Omori, INFINITE DIMENSIONAL LIE GROUPS, AMS Translation Monograph 158, 1997.
[12] 大森, 前田, 量子的な微分積分, 2004, シュプリンガー・フェアラーク東京
[13] 大森 英樹, 数学の中の物理学, 東京大学出版会, 2004.
[14] H. Omori, Y. Maeda, N, Miyazaki, A. Yoshioka, *Deformation quantization of Fréchet-Poisson algebras -Convergence of the Moyal product-*, Math. Phys. Studies. **22** (2000), 233-246.
[15] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, *Deformation quantizations of Fréchet-Poisson algebras of Heisenberg type* , Contemp. Math. **288** (2001), 391-395.
[16] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Strange phenomena related to ordereing problems in quantizations*, Jour. Lie Theory, Vol 13, No 2, (2003), 481-510.
[17] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (I)*, -(Jacobi's theta functions and $*$-exponential functions)- arXiv:1104.2109
[18] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (II)*, -(Weyl algebra of $2m$-generators)- arXiv:1105.1218
[19] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (III)*, -Generic product formula for $*$-exponentials of quadratic forms- arXiv:1107.2474
[20] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (IV)* -Matrix elements and related integrals- arXiv:1109.0082
[21] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (V)* -Diagonal matrix calculus and $*$-special functions- arXiv:1111.18062
[22] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (VI)* -Vacuum representation of Heisenberg algebra-, 準備中