数理解析研究所講究録
第 1775 巻 2012 年 52-65

佐々木多様体の中のルジャンドル極小部分多様体と安定性

東北大学・理学研究科　梶ヶ谷　徹 (Toru Kajigaya)
Mathematical Institute, Graduate School of Sciences
Tohoku University

1　イントロダクション

$(\overline{M}^{2n},\omega,J)$ を Kähler 多様体, $\overline{L}^n$ を n 次元多様体, $\bar{\iota}:\overline{L}^n\to\overline{M}^{2n}$ をラグランジュはめ込み, すなわち, $\bar{\iota}^*\omega=0$ とする. $\bar{\iota}$ の局所的な変形 $\bar{\iota}_t:\overline{L}^n\times(-\epsilon,\epsilon)\to\overline{M}^{2n}$, $\bar{\iota}_0=\bar{\iota}$ を考える. 変形 $\{\bar{\iota}_t\}$ が**ハミルトン変形**であるとは, 変分ベクトル場 $V_t:=\frac{d}{dt}\bar{\iota}_t$ に対して, $\bar{\iota}_t^*(V_t\rfloor\omega)$ が完全形式になることを言う. ラグランジュはめ込み $\bar{\iota}:\overline{L}^n\to\overline{M}^{2n}$ は, すべてのハミルトン変形のもとで体積変分に関する停留値をとるとき, **ハミルトン極小 (H-極小)** と呼ばれる. この概念は 1990 年代, Y.G.Oh によって導入され ([9],[10]), 極小部分多様体の一つの拡張として, これまで多くの研究がなされてきた. 例えば, $\mathbb{C}^n$ の中の標準的トーラス T^n は H-極小であり, この他にも, (極小でない)H-極小ラグランジュはめ込みの多くの具体例が $\mathbb{C}P^n$ や $\mathbb{C}^n$ の中に構成されている ([5], [6], [13] など).

また, Y.G.Oh は同時に, H-極小ラグランジュはめ込みの安定性を論じた. H-極小ラグランジュはめ込み ι は, すべてのハミルトン変形のもとで第二変分が非負になるとき, ハミルトン安定 (H-安定) と呼ばれる. 例えば, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の中の極小ラグランジュ部分多様体である, 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ や Clifford トーラスなどは, 一般の変形のもとで安定でないが, H-安定である ([9]). また, 古典的な体積変分問題においては, $\mathbb{C}^n$ の中に (通常の意味で) 安定な極小閉部分多様体は存在しないことが知られているが, $\mathbb{C}^n$ の中の標準的な H-極小トーラス T^n は H-安定になる ([10]). 一般に極小でない H-極小ラグランジュはめ込みの H-安定性は多くの事が知られていないが, 極小ラグランジュ部分多様体の H-安定性については, いくつかの結果が知られている (例えば [1]).

一方で, Kähler 多様体の奇数次元版として, 佐々木多様体がある. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ を佐々木多様体 (詳しい定義は 2 節で行う), L^n を n 次元の多様体とする. このとき, ラグランジュはめ込みに対応して, ルジャンドルはめ込み $\iota:L^n\to M^{2n+1}$ が接触形式 η が L^n 上で消えることとして定義される. 再び ι の変形 $\iota_t:L^n\times(-\epsilon,\epsilon)\to M^{2n+1}$, $\iota_0=\iota$ を考え, 各 t に対して, ι_t がルジャンドルはめ込みとなるとき, それを**ルジャンドル変形**と呼ぶ (すなわち, ルジャンドル変形とは, ルジャンドル部分多様体をルジャンドル部分多様体のままで変形する変形のことである). すると, このとき, ルジャンドル変形はラグランジュの場合におけるハミルトン変形に対応していることが分かる. そこで, ルジャンドル変形のもとで, 体積の第一変分が消えるとき, それを**ルジャンドル極小 (L-極小)** ルジャンドルはめ込みと呼ぶ.

これまで, L-極小ルジャンドル部分多様体に関して, それほど多くの研究がなされてきたわけではなかった. これらの概念は, [5], [7], [11] で定義され, [5], [7] では, 単位球面内の L-極小ルジャンドル部分多様体の具体例の構成, L-極小ルジャンドル部分多様体と H-極小ラグランジュ部分多様体との関連が論じられているが (3 節にて後述する), いずれも H-極小ラグランジュ部分多様体の研究の一環として取り入れられている. また, [11] では, 佐々木多様体の中の極小ルジャンドル部分多様体のルジャンドル変形のもとでの安定性が論じられている. 従って, これまで, 「L-極小」

ルジャンドル部分多様体に主眼を絞ってなされた研究はなかったと言ってよい. そこで, 本稿では, 佐々木多様体の中の L-極小ルジャンドル部分多様体の基本的性質と具体例, およびその安定性について得られた結果を紹介する.

本稿は次の構成になっている. 2 節では, 佐々木多様体と L-極小ルジャンドル部分多様体の定義と基本的な性質を述べる. 3 節では, L-極小ルジャンドル部分多様体と H-極小ラグランジュ部分多様体の関係を述べ, 4 節で単位球面内の L-極小ルジャンドル部分多様体の具体的構成について述べる. 5 節では, L-安定性を定義し, いくつかの具体例などに対して, その安定性を調べた結果を論じる.

2 佐々木多様体と L-極小ルジャンドル部分多様体

2.1 佐々木多様体

(M^{2n+1}, η) を接触多様体とする. すなわち, η は M 上の 1 形式で, $\eta \wedge (d\eta)^{2n} \neq 0$ となるものとする (η を**接触形式**と呼ぶ). 接触形式 η が定まっていると, 次を満たす M^{2n+1} 上のベクトル場 ξ が一意的に定まる:

$$\eta(\xi) = 1, \ \xi \rfloor d\eta = 0,$$

ここで, $\rfloor$ は内部積を表す. このようなベクトル場を **Reeb ベクトル場**と呼ぶ. 接触形式 η の核 $\mathrm{Ker}\eta =: \bigcup_{p \in M} \mathcal{H}_p$ (ここで, $\mathcal{H}_p \subset T_pM$ を以後, 水平部分空間と呼ぶ) は $2n$ 次元の分布を張るが, Reeb ベクトル場 ξ とは, その余次元の方向を与えるベクトル場であり, また, $(\mathcal{H}_p, d\eta|_{\mathcal{H}_p})$ はシンプレクティックベクトル空間となる.

接触多様体 (M^{2n+1}, η) 上の (1,1)-テンソル ϕ で, 次を満たすものが与えられているとき, 組 (ϕ, ξ, η) は M^{2n+1} 上の**概接触構造**と呼ばれる:

$$\phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi, \ \eta(\xi) = 1.$$

はじめの条件は, ϕ が, 偶数次元多様体における概複素構造の役割を果たしていることを意味している. また, この条件から,

$$\eta \circ \phi = 0, \ \phi\xi = 0$$

が従う. さらに, M^{2n+1} 上のリーマン計量 g は,

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \text{for } X, Y \in \Gamma(TM)$$

を満たすとき, 概接触構造 (ϕ, ξ, η) と両立する (compatible) と言い, ここから,

$$\eta(X) = g(X, \xi) \ \ \text{for } X \in \Gamma(TM)$$

であることが分かる. このとき, (ϕ, ξ, η, g) を M 上の**概接触計量構造**と言う. また g は,

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y) \ \ \text{for } X, Y \in \Gamma(TM)$$

を満たすとき (ϕ,ξ,η) と associate すると言う. M 上の概接触計量構造で, かつ, 計量 g が associate するとき, それを**接触計量構造**と呼ぶ.

(ϕ,ξ,η,g) を M^{2n+1} 上の概接触計量構造とする. リーマン計量 g に関する Levi-Civita 接続 $\overline{\nabla}$ が, 条件

$$(\overline{\nabla}_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

を任意の $X,Y\in\Gamma(TM)$ に対して満たすとき, 組 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ のことを**佐々木多様体**と呼ぶ. 佐々木多様体ならば, リーマン計量 g は associate し (すなわち, 接触計量構造となり), また, Reeb ベクトル場 ξ はキリング場になる (このとき, 接触計量構造は **K-接触構造 (K-contact structure)** と呼ばれる).

佐々木多様体は, そのリーマン錐 $C(M)=\mathbb{R}^+\times M$ によっても特徴付けられる. すなわち, 接触計量構造を持つ多様体 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ が佐々木多様体であることは, そのリーマン錐 $(C(M),dr^2+r^2g)$ が Kähler 多様体の構造を持つことと同値である ([4]).

さらに佐々木多様体は, 次の曲率に関する条件を満たす. ここで, $\overline{R}$ は $\overline{\nabla}$ に関する曲率テンソルである:

$$\overline{R}(X,\xi)\xi = X-\eta(X)\xi,\quad X\in\Gamma(TM). \tag{1}$$

$$\overline{R}(X,Y)\xi = \eta(Y)X-\eta(X)Y,\quad X,Y\in\Gamma(TM). \tag{2}$$

$$\overline{R}(\xi,X)Y = (\overline{\nabla}_X\phi)Y,\quad X,Y\in\Gamma(TM). \tag{3}$$

$$g(\overline{R}(\phi X,\phi Y)\phi Z,\phi W) = g(\overline{R}(X,Y)Z,W),\quad X,Y,Z,W\perp\xi. \tag{4}$$

K-接触多様体であれば, (1) を満たす. 逆に, 奇数次元リーマン多様体 (M^{2n+1},g) がキリング場 ξ を持ち, ξ に直交する任意の X に対し, $\overline{R}(X,\xi)\xi=X$ を満たせば, (M^{2n+1},g) は K-接触構造を持つ. さらに, (2) を満たせば, (M^{2n+1},g) は佐々木多様体の構造を持つ. また, M^{2n+1} が接触計量構造を持つなら, (2) を満たすことが, $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ が佐々木多様体であるための必要十分条件である ([3]).

佐々木多様体は, その Ricci テンソルが, A を定数として,

$$\overline{\mathrm{Ric}} = Ag+(2n-A)\eta\times\eta$$

と書けるとき, **η-Einstein** であると呼ばれる.

また, $X\in\mathcal{H}_p,\ p\in M$ に対して, $\{X,\phi X\}$ で張られる 2 次元部分空間の断面曲率 $K(X,\phi X)$ を **ϕ-断面曲率**と呼ぶ. 任意の $p\in M, X\in\mathcal{H}_p$ に対し, その ϕ-断面曲率が一定 $(\equiv c)$ であるとき, 佐々木多様体 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ は **佐々木空間形**であると呼ばれ, $M^{2n+1}(c)$ と書かれる. 佐々木空間形 $M^{2n+1}(c)$ は, $A=\{n(c+3)+c-1\}/2$ の η-Einstein 佐々木多様体である.

例 2.1. *1.* 奇数次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2n+1}$ は次のような標準的な佐々木多様体の構造を持つ:

$$\eta=\frac{1}{2}(dz-\sum_{i=1}^n y^i dx^i),\ g=\frac{1}{4}\Big(\eta\otimes\eta+\sum_{i=1}^n((dx^i)^2+(dy^i)^2)\Big),\ \xi=2\frac{\partial}{\partial z},$$

ここで, $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n,z)$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の標準的な座標であり, (1,1)-テンソル ϕ は次の行列で与えられる.

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき, 佐々木多様体 $(\mathbb{R}^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ は ϕ-断面曲率 -3 の佐々木空間形である.

2. 奇数次元単位球面 $S^{2n+1}(1)$ は, $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的な Kähler 構造から誘導される標準的な佐々木多様体の構造を持つ. すなわち, $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的なリーマン計量と概複素構造をそれぞれ g, J として, 各点 $z \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ において,

$$\eta_z := g(\cdot, Jz),\ \xi_z := Jz,\ \phi := J - \eta \otimes \xi$$

と定め, リーマン計量 g は球面に自然に誘導されるものを考える. そのとき, $(S^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ は佐々木多様体となる. また, このとき S^{2n+1} は ϕ-断面曲率 1 の佐々木空間形である.

2.2 ルジャンドルはめ込み

(M^{2n+1},η) を接触多様体, L^n を n 次元の多様体とする. $\iota: L^n \to M^{2n+1}$ をはめ込みとし, それが**ルジャンドルはめ込み**であるとは,

$$\iota^*\eta = 0$$

の成り立つことを言う. すなわち, ルジャンドル多様体とは, 接触形式 η の核 $\mathrm{Ker}\eta$ の張る $2n$ 次元分布に接する積分多様体であり, しかもそのような積分多様体のうちで, 最大の次元を持つものとして特徴付けられる (なお, この分布は, 接触形式の定義から, 完全積分可能ではない). M が接触計量構造を持つなら, ルジャンドル多様体は, Reeb ベクトル場 ξ と直交するような部分多様体と言うことができる.

以後, M は常に佐々木多様体 $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ であるとする.

M 上の点 p に対して, $(\mathcal{H}_p, d\eta_p|_{\mathcal{H}_p})$ はシンプレクティックベクトル空間を定めていた. 一方で, ルジャンドルはめ込み $\iota: L^n \to M^{2n+1}$ は $\iota^*d\eta = 0$ を満たすから, $p \in \iota(L)$ ならば, $\iota_*(T_pL) \subset \mathcal{H}_{\iota(p)}$ はラグランジュ部分空間である. 特に次が成り立つ.

命題 2.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ を佐々木多様体とする. $\iota: L^n \to M^{2n+1}$ をルジャンドルはめ込みとすれば,

1. 任意の $p \in L$ に対して, $\iota_*T_pL \perp \phi(\iota_*T_pL)$.
2. ι の第 2 基本形式 B は, $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\eta$ に値をとる. 従ってまた, ι の平均曲率ベクトル H もまた $\mathrm{Ker}\eta$ に属する.

今, 法バンドルを $NL := \iota^*(TM)/TL$ とおく. 命題 2.2 の 1 により, NL は, 次の直交分解を持つ:

$$N_pL = \mathbb{R}\xi_p \oplus \phi(\iota_*T_pL)$$

を持つ. 法ベクトル場 $V \in \Gamma(NL)$ に対し, $g(V,\xi) = \eta(V)$ であるから, この直交分解のもと,

$$V = \eta(V)\xi + V_{\mathcal{H}}$$

と書ける. ここで $V_{\mathcal{H}}$ は, V の $\phi(\iota_* T_p L)$ 方向のベクトルである. 以下 $f := \eta(V)$ とおいて $V = f\xi + V_{\mathcal{H}}$ と書く. この直交分解のもと, 次の同型が成立する ([11]).

命題 2.3. $(M^{2n+1}, \phi, \eta, \xi, g)$ を佐々木多様体, $\iota : L^n \to M^{2n+1}$ をルジャンドルはめ込みとする. そのとき, 線形写像

$$\chi : \Gamma(NL) \to C^\infty(L) \oplus \Omega^1(L)$$
$$\chi(V) = \Big(\eta(V), -\frac{1}{2}\iota^*(V \rfloor d\eta)\Big)$$

は同型を与える. さらに,

$$g(V,W) = \eta(V)\eta(W) + g^*(\alpha_V, \alpha_W)$$

が成り立つ. ただし, ここで $\alpha_V := -\frac{1}{2}\iota^*(V \rfloor d\eta)$ であり, g^* は $\Omega^1(L)$ に g から誘導される計量である.

2.3 L-極小ルジャンドルはめ込み

定義 2.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ を佐々木多様体, $\iota : L^n \to M^{2n+1}$ をルジャンドルはめ込みとする. 滑らかなはめ込みの族 $\{\iota_t\}_{-\epsilon \le t \le \epsilon}$ が L の**ルジャンドル変形**であるとは, $\iota_0 = \iota$ かつ, 各 t に対して, $\iota_t : L^n \to M^{2n+1}$ がルジャンドルはめ込みであるときを言う.

注意 2.5. 以後, L^n は簡単のためコンパクトであると仮定する (コンパクトでない場合はルジャンドル変形を, サポートコンパクトの上で考えればよい). また, L^n には境界がついていてもよいが, その場合ルジャンドル変形は常に, 境界を固定した変形であると仮定する. すなわち, $\iota_t|_{\partial L} = id_{\partial L}$ とする.

命題 2.6. 変形 $\{\iota_t\}$ の L に沿った変分ベクトル場 $V = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\iota_t$ に対してその法方向の成分を $V^\perp$ と書く. そのとき, $\{\iota_t\}$ がルジャンドル変形であることは,

$$V^\perp = \chi^{-1}\Big(\eta(V^\perp), \frac{1}{2}d(\eta(V^\perp))\Big), \tag{5}$$

すなわち,

$$\alpha_{V^\perp} := -\frac{1}{2}\iota^*(V^\perp \rfloor d\eta) = \frac{1}{2}d(\eta(V^\perp))$$

が成り立つことと同値である.

定義 2.7. L に沿った法ベクトル場 $V^\perp \in \Gamma(NL)$ が (5) を満たすとき, $V^\perp$ を**ルジャンドルベクトル場**と呼ぶ.

従って, 変形 $\{\iota_t\}$ がルジャンドル変形であるとは, その変分ベクトル場の法成分がルジャンドルベクトル場であることとして特徴づけられる.

シンプレクティック多様体の場合, その中のラグランジュ部分多様体をラグランジュのまま変形する変形をラグランジュ変形と呼ぶ ([9]). ラグランジュ変形は, その変分ベクトル場 V が, シンプレクティック形式 ω に対して $V\rfloor\omega$ が閉形式になることとして特徴づけられ, 特に $V\rfloor\omega$ が完全形式になるとき, そのような変形はハミルトン変形と呼ばれる. 定義 2.4 ではルジャンドル変形をラグランジュ変形に対応する形で定義したが, 命題 2.6 により, $\iota^*(V\rfloor d\eta)$ は完全形式であるから, ルジャンドル変形はそのままハミルトン変形に対応していると言うことになる.

また, 命題 2.6 により, ルジャンドルベクトル場の水平成分 $V_{\mathcal{H}}$ は,

$$V_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\phi\nabla f$$

と書けることが分かる. ただし, ここで, $f = \eta(V) \in C^\infty(L)$, ∇f は f の勾配である. もし, $\nabla f = 0$ なら, f は定数関数であるが, その場合ルジャンドルベクトル場は, $V^\perp = f\xi$ であり, ξ がキリング場であることから, 体積変分は自明である. 従って特に, ルジャンドルベクトル場 V はそれに対応する関数 $f \in C^\infty(L)$ が定数でない関数の場合に本質的となる.

定義 2.8. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ を佐々木多様体とする. ルジャンドルはめ込み $\iota : L^n \to M^{2n+1}$ が**ルジャンドル極小** (以下 **L-極小**と書く) であるとは, L に対するすべてのルジャンドル変形 $\{\iota_t\}$ に対して,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(\iota_t(L)) = 0$$

が成り立つことを言う.

定義から明らかに, 極小 (*i.e.,* 平均曲率 $H = 0$) なルジャンドルはめ込みは L-極小である.
ルジャンドル変形のもとでの Euler-Lagrange 方程式は次で与えられることが知られている ([7]).

定理 2.9 (Euler-Lagrange 方程式, [7]). 佐々木多様体の中へのルジャンドル埋め込み $\iota : L^n \to M^{2n+1}$ が L-極小であるための必要十分条件は,

$$\delta\alpha_H = 0$$

が成り立つことである. ただしここで H は $\iota(L) \subset M$ の平均曲率ベクトル, $\alpha_H = -\frac{1}{2}\iota^*(H\rfloor d\eta)$, δ は $\Omega^1(L)$ 上の余微分作用素である.

注意 2.10. $\alpha_H = \iota^*(g(\cdot, \phi H))$ であるから, 1 形式 α_H はベクトル場 ϕH と対応する. 従って, L-極小であるための条件 $\delta\alpha_H = 0$ は, $\mathrm{div}\phi H = 0$ と同値である.

L-極小はめ込みの例は, 適宜後述していくが, それほど多くの例が知られているわけではない. 従って, そのような具体例の構成も一つの重要な関心事である. 例えば, 標準的な佐々木多様体の構造を持つ奇数次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ の中へのルジャンドルはめ込みが L-極小になるための一つの十分条件は次で与えられる.

定理 2.11 ([8]). $\iota : L^n \to \mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ を $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ の中へのルジャンドルはめ込みとする. さらに, $\iota(L)$ が cylinder

$$\begin{aligned} N^{2n}(r): &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{2n+1} | g(\vec{x}-\vec{x}_0, \vec{x}-\vec{x}_0) - \eta(\vec{x}-\vec{x}_0)^2 = r^2\} \\ &= \left\{(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} | \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)^2 + (y^i - y_0^i)^2 = 4r^2\right\}, \end{aligned}$$

(ここで, $\vec{x}_0 := (x_0^1, \cdots, x_0^n, y_0^1, \cdots, y_0^n, z_0)$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の中の定ベクトル, r は定数) に含まれ, かつ $N^{2n}(r)$ の中で極小であると仮定する. そのとき, ι は $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ の中への (極小でない)L-極小はめ込みである.

3 H-極小ラグランジュ部分多様体とL-極小ルジャンドル部分多様体

この節では, H-極小ラグランジュ部分多様体と L-極小ルジャンドル部分多様体の関係について述べる.

まず, Kähler 多様体の中の H-極小ラグランジュ部分多様体の概念を簡単に復習しておく.

$(\overline{M}^{2n}, \omega, J)$ を Kähler 多様体とし, $\overline{\iota} : \overline{L}^n \to \overline{M}^{2n}$ を**ラグランジュはめ込み**, すなわち $\overline{\iota}^*\omega = 0$ を満たすものとする. $\overline{\iota}$ の変形 $\overline{\iota}_t : (-\epsilon, \epsilon) \times \overline{L}^n \to \overline{M}^{2n}$ が**ハミルトン変形**であるとは, $\overline{L^n}$ 上の 1 形式 $\overline{\iota}_t^*(V_t \rfloor \omega)$ が, 完全形式になるときを言う. ただし, ここで V_t は変分ベクトル場である.

$\overline{\iota}$ は, すべてのハミルトン変形に対して, 体積の第一変分が消えるとき, **ハミルトン極小 (H-極小)** であると呼ばれる. $\overline{\iota}$ が H-極小であるための必要十分条件は,

$$\delta \overline{\alpha}_{\overline{H}} = 0 \tag{6}$$

の成り立つことである ([10]). ただし, ここで $\overline{H}$ は $\overline{\iota}$ の平均曲率ベクトル, $\overline{\alpha}_{\overline{H}} = \overline{\iota}^*(\overline{H} \rfloor \omega)$ である.

(6) と定理 2.9 から分かるように, H-極小ラグランジュ部分多様体と L-極小ルジャンドル部分多様体に関するそれぞれの Euler-Lagrange 方程式は, 同じ形をしている. この事実により, この二つの概念が密接に関係することが示される.

3.1 ルジャンドル多様体の上のラグランジュ錐

標準的な佐々木多様体の構造を持つ単位球面 $S^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ を考える. その中のルジャンドル部分多様体 L^n に対して, その錐

$$C(L) := \{tx \in \mathbb{C}^{n+1} | t \in [0, \infty), x \in L^n\}$$

を考えると, これは $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の (原点を特異点とする) ラグランジュ部分多様体になる (逆に錐がラグランジュ部分多様体であれば, その link はルジャンドル部分多様体になる). この状況のもとで, 次が成り立つ:

定理 3.1 ([5], [7]). 単位球面 $S^{2n+1}(1)$ の中のルジャンドル部分多様体 L^n が L-極小であるための必要十分条件は, その錐 $C(L)$ が $\mathbb{C}^{n+1}$ の中で H-極小ラグランジュ部分多様体になることである.

3.2 Canonical fibration

佐々木多様体と Kähler 多様体の間の滑らかな写像 $\pi : M^{2n+1} \to \overline{M}^{2n}$ が, **Canonical fibration** であるとは, 次を満たすことを言う ([12]):

(i) 任意の $p \in M^{2n+1}$ に対して, $\mathrm{Ker}\pi_*(p) = \mathbb{R}\xi_p$.

(ii) $\pi_* \circ \phi = J \circ \pi_*$.

(iii) π はリーマン沈め込み.

Canonical fibration の典型的な例は, Hopf 束 $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ である.

定理 3.2 ([5], [7])**.** $\pi : M^{2n+1} \to \overline{M}^{2n}$ を Canonical fibration とし, $\iota : L^n \to M^{2n+1}$ をルジャンドルはめ込みとする. このとき $\pi \circ \iota : L^n \to \overline{M}^{2n}$ は, ラグランジュはめ込みとなる. さらに, ι が L-極小であることの必要十分条件は, $\pi \circ \iota$ が H-極小であることである.

定理 3.2 の一つの応用例として, 球面 S^{2n+1} 内の L-極小ルジャンドルはめ込み, $\mathbb{C}P^n$ の中への H-極小ラグランジュはめ込みの具体的構成がある. すなわち, 以上の関係と Hopf 束を使って, 具体例を構成するのである.

例 3.3 ([7])**.** 単位球面 $S^{2n+1}(1)$ の中の $n+1$ 次元トーラス

$$\widetilde{T}^{n+1} := S^1\left(\sqrt{\frac{p_1}{\sum_{i=1}^{n+1} p_i}}\right) \times \cdots \times S^1\left(\sqrt{\frac{p_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} p_i}}\right) \subset S^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

を考える. ただし, ここで $p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}$ は正の整数とし,

$$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_{n+1}, \ \gcd(p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}) = 1,$$

を満たすものとする. また, $\mathbb{C}^{n+1}$ の座標を用いて $\widetilde{T}^{n+1}$ を,

$$z_1 = r_1 e^{\sqrt{-1}\frac{\theta_1}{r_1}}, \cdots, z_{n+1} = r_{n+1} e^{\sqrt{-1}\frac{\theta_{n+1}}{r_{n+1}}}$$

と表す. ここで,

$$r_j = \sqrt{\frac{p_j}{\sum_{i=1}^{n+1} p_i}}, \ 0 \leq \theta_j \leq 2\pi r_j, \ \text{for } j = 1, \cdots, n+1$$

である. このとき, $\widetilde{T}^{n+1}$ の中で $S^{2n+1}(1)$ の標準的な Reeb ベクトル場 ξ と直交するような n 次元トーラスで $(r_1, \cdots, r_{n+1})$ を通るものは, 次のように表せる.

$$T^n_{(p_1, \cdots, p_{n+1})} := \left\{ (z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \widetilde{T}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{p_i}\theta_i = \frac{2\pi m}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} p_i}} \ (m \in \mathbb{Z}) \right\}.$$

作り方から明らかなように, これはルジャンドル部分多様体になる. 一方で, これを Hopf 束 $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ を用いて $\mathbb{C}P^n$ の中へ射影すると, ラグランジュはめ込みが得られるが, これはもともとの標準的トーラス $\widetilde{T}^{n+1}$ の射影と同じである. $\pi(\widetilde{T}^{n+1})$ は $\mathbb{C}P^n$ の中で H-極小になることが知られている (例えば, $(p_1, \cdots, p_{n+1}) = (1, \cdots, 1)$ ならば, $\pi(\widetilde{T}^{n+1})$ は Clifford トーラスである). 従って, 定理 3.2 により, ルジャンドルトーラス $T^n_{(p_1, \cdots, p_{n+1})}$ は $S^{2n+1}(1)$ の中の L-極小ルジャンドル部分多様体である. さらに, 定理 3.1 より, その錐を考えることで, $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の H-極小ラグランジュ錐が得られる.

4 単位球面 $S^{2n+1}(1)$ 内への L-極小はめ込みの構成

この節では, 単位球面 $S^{2n+1}(1)$ の中への L-極小はめ込みの具体的構成について, Castro-Li-Urbano の方法 ([5]) を紹介する.

単位球面 $S^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 上の複素 n-形式 Ω を,

$$\Omega_z(v_1, \cdots, v_n) := \det_{\mathbb{C}}\{z, v_1, \cdots, v_n\}$$

で定める. ただし, ここで, $z \in S^{2n+1}$, $v_1, \cdots, v_n \in T_z S^{2n+1}$ はすべて, 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の中のベクトルと見なしている. このとき, この複素 n-形式は次の性質を満たす.

補題 4.1. $\iota : L^n \to S^{2n+1}(1)$ をルジャンドルはめ込みとする. そのとき,

$$\nabla(\iota^*\Omega) = i\alpha_H \otimes \iota^*\Omega$$

が成り立つ.

この事実をふまえて, 次の**ルジャンドル角 (Legendre angle)** を定義する.

定義 4.2. L^n を向き付け可能とする. ルジャンドルはめ込み $\iota : L^n \to S^{2n+1}(1)$ に対して, そのルジャンドル角を,

$$\begin{aligned} &\beta : L^n \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \\ &e^{i\beta(p)} := (\iota^*\Omega)_p(e_1, \cdots, e_n) = \det_{\mathbb{C}}\{\iota(p), \iota_* e_1, \cdots, \iota_* e_n\} \end{aligned}$$

と定める. ただし, ここで, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は T_pL の正規直交基底である.

この定義は, 各接空間の正規直交基底の取り方によらない. このとき, 補題 4.1 から, すぐに次が従う.

系 4.3. ルジャンドルはめ込み $\iota : L^n \to S^{2n+1}(1)$ とそのルジャンドル角 β に対して, 次が成り立つ.

$$\phi\nabla\beta = H.$$

さらに, 系 4.3 と定理 2.9 から次が従う.

定理 4.4. ルジャンドルはめ込み $\iota : L^n \to S^{2n+1}(1)$ が L-極小であるための必要十分条件は, そのルジャンドル角 β が調和写像 (すなわち, $\Delta\beta = 0$) になることである. また, ι が極小になるための必要十分条件は, β が定値写像になることである.

この事実を使って, L-極小ルジャンドルはめ込みの構成を考えよう.

二つの Kähler 多様体の中への H-極小ラグランジュはめ込み $L_i^{n_i} \to M_i^{2n_i}$ $(i = 1, 2)$ を考えると, それらの直積 $L_1^{n_1} \times L_2^{n_2} \to M_1^{2n_1} \times M_2^{2n_2}$ は再び, H-極小ラグランジュはめ込みとなる. L-極小ルジャンドル部分多様体に対しては, 次を得る.

定理 4.5 ([5]). $n = n_1 + n_2 + 1$ とし, 単位球面の中への二つのルジャンドルはめ込み

$$\iota_i : L_i^{n_i} \to S^{2n_i+1}(1),\ i = 1, 2$$

を考える. また,

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to S^3(1) \subset \mathbb{C}^2$$

をルジャンドル曲線とする. このとき,

$$\Phi : I \times L_1 \times L_2 \to S^{2n+1}(1)$$
$$\Phi(t, p, q) := (\gamma_1(t)\iota_1(p), \gamma_2(t)\iota_2(q))$$

は $S^{2n+1}(1)$ の中へのルジャンドルはめ込みとなる. さらに各 ι_i が L-極小であると仮定すれば, Φ が L-極小となるための必要十分条件は, ある正の定数 λ, μ が存在して, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が次の ODE の解となることである:

$$(\dot{\gamma}_1\overline{\gamma}_1)(t) = -(\dot{\gamma}_2\overline{\gamma}_2)(t) = -e^{i(\lambda+\mu t)}\overline{\gamma}_1(t)^{n_1+1}\overline{\gamma}_2(t)^{n_2+1}. \tag{7}$$

(7) の ODE は, 定理 4.4 のルジャンドル角の条件 $\Delta\beta = 0$ から導かれる. 特に, 各 ι_i が極小である場合, Φ が極小であるための必要十分条件は, $\mu = 0$ とした (7) の ODE の解に γ がなることである.

(7) の ODE は, 実は陽に解けて, 解は次で与えられる.

$$\gamma_\delta(t) = (c_\delta \exp(is_\delta^{n_1+1}c_\delta^{n_2-1}t), s_\delta \exp(-is_\delta^{n_1-1}c_\delta^{n_2+1}t)).$$

ここで, $c_\delta = \cos\delta$, $s_\delta = \sin\delta$, $\delta \in (0, \pi/2)$ である. $\mu = 0$ であるための必要十分条件は $\delta = \arctan\sqrt{(n_2+1)/(n_1+1)}$ となることである.

定理 4.5 により, 低い次元の球面内の L-極小ルジャンドルはめ込みを直積していくことで, 高い次元の L-極小ルジャンドルはめ込みをいくらでも構成できる. さらに, Hopf 束を用いて, $\mathbb{C}P^n$ の中へ射影することで, 定理 3.2 から H-極小ラグランジュはめ込みの例を得ることもできる.

5 第二変分公式と安定性

Y.G.Oh は [10] において, Kähler 多様体の中の H-極小ラグランジュ部分多様体に対し, そのハミルトン変形のもとでの安定性を問題にした. Oh は, ハミルトン変形のもとでの第二変分公式を導出し, いくつかの具体例に対して, その安定性を論じた.

この節では, L-極小ルジャンドル部分多様体に対して, その安定性を考えよう.

5.1 第二変分公式

定義 5.1 ([8], [11]). 佐々木多様体の中への L-極小ルジャンドルはめ込み $\iota : L^n \to M^{2n+1}$ が**ルジャンドル安定 (L-安定)** であるとは, すべてのルジャンドル変形 $\{\iota_t\}$ に対して,

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(\iota_t(L)) \geq 0$$

の成り立つことを言う.

ここで, L-極小ルジャンドルはめ込みのルジャンドル変形のもとでの体積変分に関する第二変分公式は次で与えられる:

定理 5.2 ([8]). $\iota : L^n \to M^{2n+1}$ を佐々木多様体 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ の中への L-極小ルジャンドルはめ込みとする. また, $\{\iota_t\}_{-\epsilon \le t \le \epsilon}$, $\iota_0 = \iota$ を L^n のルジャンドル変形とし, その $t = 0$ における変分ベクトル場を $V = f\xi + V_{\mathcal{H}}$ と書く. ただし, L が境界を持つ場合は, 変形は境界を固定するものだけを考える. そのとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}(8)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(\iota_t(L)) &= \int_L \{g(\Delta\alpha_V, \alpha_V) - 2|V_{\mathcal{H}}|^2 - \overline{\mathrm{Ric}}(V_{\mathcal{H}}) \\ &\quad -2g(B(\phi V_{\mathcal{H}}, \phi V_{\mathcal{H}}), H) + g(V_{\mathcal{H}}, H)^2\} dv_L,\end{aligned}$$

ここで, Δ は $\Omega^1(L)$ に作用する Laplace-Beltrami 作用素, $\alpha_V = -\frac{1}{2}\iota_0^*(V \rfloor d\eta)$, $\overline{\mathrm{Ric}}$ は M^{2n+1} の Ricci テンソル, B は ι の第二基本形式, H は ι の平均曲率ベクトルである.

5.2 極小ルジャンドル部分多様体の L-安定性

この節では, 特に η-Einstein 佐々木多様体の中の極小ルジャンドル部分多様体 (すなわち, $H \equiv 0$) の L-安定性について述べる.

M^{2n+1} が η-Einstein 佐々木多様体 (すなわち, ある定数 A があって, $\overline{\mathrm{Ric}} = Ag + (2n - A)\eta \otimes \eta$ を満たす), L^n を極小ルジャンドル部分多様体とする. そのとき, 定理 5.2 の第二変分公式 (8) は, 次のように簡単に書ける:

$$\begin{aligned}(9)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}(\iota_t(L)) &= \int_L \{g(\Delta\alpha_V, \alpha_V) - (A+2)|V_{\mathcal{H}}|^2\} dv_L \\ (10)\qquad &= \frac{1}{4}\int_L \{|\Delta f|^2 - (A+2) f\Delta f\} dv_L.\end{aligned}$$

(9) からすぐに, 次の定理が従う.

定理 5.3 ([11]). $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ を η-Einstein 佐々木多様体とする. もし, $A \le -2$ であるなら, M^{2n+1} の中のすべての極小ルジャンドル部分多様体は, L-安定である.

例えば, Euclide 空間 $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ は $A = -2$ の η-Einstein 佐々木多様体である.

一方, $A > -2$ の場合は, 必ずしも極小部分多様体が L-安定であるとは限らないが, (10) から次が従う.

定理 5.4 ([11]). $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ を η-Einstein 佐々木多様体とし, $A > -2$ を満たすとする. このとき, M^{2n+1} の中のコンパクト極小ルジャンドル部分多様体 L^n が L-安定であるための必要十分条件は,

$$\lambda_1 \ge A + 2$$

を満たすことである. ただし, ここで, λ_1 は $C^\infty(L)$ に作用する Laplace-Beltrami 作用素の第一固有値である.

例えば, 単位球面 $S^{2n+1}(1)$ は $A=2n>-2$ の η-Einstein 佐々木多様体である. ところが, 単位球面内の n 次元コンパクト極小部分多様体は, $\lambda_1 \leq n$ を満たすことが知られている. 従って, 定理 5.4 から単位球面の場合では次の系を得る.

系 5.5 ([11]). 単位球面 $S^{2n+1}(1)$ の中のすべてのコンパクトな極小ルジャンドル部分多様体は, L-不安定である.

5.3 L-極小曲線の L-安定性

この節では, 3 次元佐々木多様体の中の (極小でない)L-極小曲線とその安定性について論じる.

3 次元佐々木多様体の場合, ルジャンドル曲線の L-極小性は, $|H|=h$ が一定であることと同値である. また, この場合 $|H|=h$ は, 通常の意味での曲線の曲率となるため, L-極小ルジャンドル曲線は, 一定の曲率を持つルジャンドル曲線と言うことになる. さらに, 3 次元佐々木多様体の中のルジャンドル曲線はその捩率も一定 (≡1) であることが知られている ([2]).

3 次元佐々木多様体は, 次の意味で弱い η-Einstein である. すなわち, 3 次元佐々木多様体 (M^3,ϕ,ξ,η,g) は, その Ricci テンソルが,

$$\overline{\mathrm{Ric}}=ag+(2-a)\eta\otimes\eta,\ a\in C^\infty(M)$$

が成り立つ. 従って特に, η-Einstein であることは, a が定数であることと同値である. ところが, 一方で, 3 次元佐々木多様体の ϕ-断面曲率は,

$$K(e_p,\phi e_p)=a(p)-1,\ p\in M$$

で与えられる. ただし, ここで e_p は ξ_p と直交する単位接ベクトルである. 従って, 3 次元佐々木多様体が η-Einstein であることと, 佐々木空間形であることは同値である (一般の次元では, 必ずしもそうではない).

3 次元佐々木空間形の中の L-極小ルジャンドル曲線の L-安定性に関しては, 第二変分公式から次の系を得る.

系 5.6 ([8]). $M^3(c)$ を 3 次元佐々木空間形, γ をその中のコンパクトな L-極小ルジャンドル曲線とする. このとき, γ が L-安定であるための必要十分条件は,

$$\lambda_1\geq c+3+h^2$$

の成り立つことである. ここで, λ_1 は $C^\infty(\gamma)$ に作用する Laplace-Beltrami 作用素の第一固有値である.

注意 5.7. γ に境界がある場合は, γ 上の関数を境界上で 0 になるものに制限する必要がある. この制限は, 考えるルジャンドル変形が境界を固定するという仮定により, 本質的である.

例 5.8. *1.* ([8]) 標準的な佐々木多様体の構造を持つ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ を考える. $\mathbb{R}^3$ は ϕ-断面曲率が -3 の佐々木空間形である. 佐々木空間形 $\mathbb{R}^3(-3)$ の中の極小ルジャンドル曲線は, 定

理 5.3 から L-安定であるが, このことは, 系 5.6 からも分かる. 一方, 極小でない L-極小ルジャンドル曲線は次で与えられる:

$$\gamma(s) = x_0 + \Big(\frac{2}{h}\cos hs, \frac{2}{h}\sin hs, -\frac{2}{h}s + \frac{1}{h^2}\sin 2hs + \frac{2y_0}{h}\cos hs\Big), \quad s \in [0, l], \tag{11}$$

ここで, s は弧長パラメータ, $h = |H|$ (従ってまた, 曲線の曲率) は定数で, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ は定ベクトルである (この曲線は, 実際はコンパクトでないが, 長さ l で切って境界付きコンパクトな曲線としている). 一般に 3 次元佐々木多様体の中のルジャンドル曲線は一定の捩率を持つから, この曲線は helix である. さらに, この曲線は, cylinder

$$N^2\Big(\frac{1}{h}\Big) := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{4}{h^2}\Big\},$$

に含まれ, cylinder の中で極小になっていることが分かる (定理 2.11 を参照). 系 5.6 により, (11) の曲線が L-安定であるための必要十分条件は, 曲線の曲率が $0 < h \leq \pi/l$ となることである.

2. ([8]) 標準的な佐々木多様体の構造を持つ 3 次元単位球面 $S^3(1)$ は, ϕ-断面曲率が 1 の佐々木空間形である. $S^3(1)$ の中の閉じた L-極小ルジャンドル曲線は, 次で与えられる ([7], [13]).

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{p+q}}\Big(\sqrt{q}e^{\sqrt{-1}\sqrt{\frac{p}{q}}s}, \sqrt{-1}\sqrt{p}e^{-\sqrt{-1}\sqrt{\frac{q}{p}}s}\Big), \quad s \in [0, 2\pi\sqrt{pq}], \tag{12}$$

ここで, (p, q) は互いに素な正の整数の組である. これらは, (p, q) 型のトーラス結び目になっている. また, $(p, q) = (1, 1)$ の時に限り極小になる. 簡単な計算により, $|H| = |q - p|/\sqrt{pq}$, $\lambda_1 = 1/pq$ であることが分かるが, これと系 5.6 により, (12) の曲線は, L-不安定であることが分かる. すなわち, 3 次元単位球面内のすべての閉じた L-極小ルジャンドル曲線は L-不安定である.

系 5.5 と例 5.8 の *2* より, 任意の奇数次元単位球面内のコンパクト L-極小ルジャンドル部分多様体は L-不安定であることが予想されるが, 証明には至っていない. 実際, 一般に (極小でない)L-極小ルジャンドル部分多様体に対し, その第二変分公式を計算することは困難である. しかし, 例 3.3 で挙げた例のうち, 5 次元球面内の比較的簡単なパラメータを持つルジャンドルトーラスについては, 直接計算により, 次の結果を得た.

命題 5.9 ([8]). 5 次元単位球面 $S^5(1)$ の中の L-極小ルジャンドルトーラス $T^2_{(1,1,u)}$ (u は正の整数) は, すべて L-不安定である.

References

[1] A. Amarzaya and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of certain minimal Lagrangian submanifolds in complex space spaces*, Tohoku Math. J, 55(2003), 583-610

[2] C. Baikoussis and D. E. Blair, *On Legendre curves in contact 3-manifolds*, Geomeriae Dedicate. 49(1994), 135-142.

[3] D. E. Blair, *Riemannian geometry of Contact and Symplectic manifolds*, Progress in Math. , vol. 203, Birkhäuser, Basel, 2002.

[4] C. P. Boyer and K. Galicki, *Sasakian Geometry*, Oxford Univ Pr., 2008.

[5] I. Castro, H. Z. Li and F. Urbano, *Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in complex space forms*, Pacific J. Math, 227(2006), No.1, 43-63

[6] I. Castro and F. Urbano, *Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in* $\mathbb{C}^2$, Compositio Math, 111(1998), 1-14

[7] H. Iriyeh, *Hamiltonian Minimal Lagrangian Cone in* $\mathbb{C}^m$, Tokyo J. Math, Vol. 28, No. 1(2005), 91-107

[8] T. Kajigaya, *Second variation formula and the stability of Legendrian minimal submanifolds in Sasakian manifolds*, in preparation.

[9] Y. G. Oh, *Second variation and stability of minimal Lagrangian submanifolds*, Invent. Math, 101(1990), 501-519

[10] Y. G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Zeit, 212(1993), 175-192

[11] H. Ono, *Second variation and Legendrian stabilities of minimal Legendrian submanifolds in Sasakian manifolds*, Differential Geometry and its Applications, 22(2005), 327-340

[12] H. Reckziegel, *A correspondence between horizontal submanifolds of Sasakian manifolds and totally real submanifolds of Kähler manifolds*, Topics in differential geometry, Vol.I,II(Debrecen, 1984), North-Holland,(1988),1063-1081.

[13] R. Schoen and J. Wolfson, *Minimizing area among Lagrangian surfaces: The mapping problem*, J. Differential geometry , 58(2001) 1-86