数理解析研究所講究録
第1775巻 2012年 66-79

トーラス内の極小曲面の変形空間上の special pseudo Kähler structure とその応用

名城大学・数学科　江尻典雄 (Norio Ejiri)
Department of Mathematics, Meijo University

1. flat torus 内の compact, orientable minimal surface の $index_a$ について.

flat torus 内の compact, orientable minimal surface の面積汎関数の第2変分から定まるヤコビ作用素の $index_a$ について次のことが知られている.

(1) 3次元 flat torus 内の minimal surface で $index_a = 0$(安定) ならば2次元 flat torus(totally geodesic).

(2) 3次元 Euclidean space 内の compact orientable CMC-surface で CMC 安定（体積を保つ変形で第2変分が常に非負であること. v.p.stable とも言う）なら球面となっている [B-C]. 一方 Ross[Ross] は3次元 flat torus に埋め込まれた minimal surface である Schwarz の P-surface を平均曲率一定曲面 (CMC-surface) と考えその CMC 安定を示した. これにより3次元 flat torus 内の compact orientable 安定 CMC-surface の分類の問題が起こる.

さて, この結果から minimal surface として P-surface の $index_a$ は1となる. 理由はもし $index_a$ が2以上なら第2変分が常に負となる体積を保つ変形が構成できるからである. したがってその conjugate minimal surface である Schwarz の D-surface, associated surface である Schoen の Gyroid も CMC 安定であり $index_a = 1$ となる. これらを摂動したものも CMC 安定であり $index_a = 1$ となる. 但しどのくらい摂動してよいかは Ross は示していない.

(3) Montiel-Ros[M-R] の結果を使うと Schwarz の CLP-surface は $index_a = 3$. 摂動したものも $index_a = 3$. 同様にどのくらい摂動してよいかはわからない.

$index_a = 1$ の minimal surface の研究として次の結果は興味深い.

(4) Compactness Theorem [R-R]. The space of $index_a = 1$ embedded minimal surfaces in flat three tori is compact.

(5) Ritoré [Ri] は3次元 flat torus 内の $index_a = 1$ immersed minimal surfaces の種数について4以下であることを示した. Ros [Ros1] は更に3以下であることを証明した. 更に一般に $index_a \geq \frac{2\gamma-3}{3}$ が成立し安定な CMC-surface に対しても種数は3以下であることを示した.

このように3次元 flat torus 内の compact, orientable minimal surface について $index_a$ の計算された具体例は２０年が過ぎようとしていますが上の２つのみと思われます. 3次元 flat torus 内の安定 CMC-surface の分類の問題については, 次の Ros の予想 [Ros2] があります.

Conjecture 1. Given a 3-torus T^3, the moduli space of closed, stable, embedded, constant mean curvature surfaces of genus 3 in T^3 with connected pullback image in $\mathbf{R}^3$ can be naturally represented, if nonempty, by a connected, smooth convex arc in the (volume, area)-plane, which is symmetric with respect to the axis volume=volume(T^3)/2.

Ros の予想の中の囲む体積が flat torus の体積の半分となる安定 CMC-surface について minimal surface かどうかは面白い問題と思われる. 種数3であれば hyperelliptic minimal surface となっており, すべての hyperelliptic embedded minimal surface について囲む体積はちょうど半分である. というのもその minimal surface の flat point での inversion によって minimal surface は不変であり２つの囲む領域は移りあうからである. 例えば P-surface, D-surface の同じ torus 内での non-minimal, CMC-surface としての変形が存在する [Ka]. また Gyroid も non-minimal, CMC-surface としての変形を持つ [B-W]. これらも Ross の結果から少しの変形ならば CMC 安定であることがわかる. さらに同様の結果が得られる. このように種数3で $index_a = 1$ の minimal surface や CMC 安定な minimal surface についての研究は大変興味深い.

2. $index_a$ の複素幾何学的計算アルゴリズム

n 次元 flat torus 内の compact, orientable (branched) minimal surface を考える. これは $\mathbf{R}^n$ の $n-$periodic minimal surface をその lattice で割ったものである. この lattice を少しづつ変形させれば対応する flat torus には最初の minimal surface から少しづつ変形された minimal surface が現れると考える. それらを集めてできたものを変形空間と呼ぶことにする. 実際には周期条件を落とした時の変形空間を考える. この変形空間に special pseudo Kähler structure を与えて変形空間の各点に対応する compact, orientable minimal surface の $index_a$ を求める複素幾何学的計算アルゴリズム (対応する Riemann surface の第１種と第２種の Abelian differentials の period を用いて) を構成する.

3. アルゴリズムの具体的応用について

佐賀大学の庄田氏との共同研究ではこのアルゴリズムによる $index_a$ の数値計算, 更に $index_a = 1$ の場合には Ross の criterion を使った CMC 安定か

どうかの判定を Mathematica で行っている.

(1) P-surface から CLP-surface への変形 (途中で Riemann surface が崩壊して singly periodic Sherk 曲面が現れるここまでが tP family と呼ばれている) に伴う $index_a$ の変化 $3 \longleftarrow 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 2$ P-surface は $index_a = 1$, CLP-surface は $index_a = 3$ となる. 従って上の Ross, Montiel and Ros の結果の再確認ができた. 更に $index_a = 1$, CMC 安定の範囲もわかる.

(2) parameter を持つ Karcher の TT-surface を考える (rPD family と呼ばれている). この時 Schwarz の P-surface と D-surface が現れそれらは変形しながら移りあっていることになる. いつの間にか conjugate minimal surface が現れているのは面白い. 更に Meeks の構成した実 9 次元 family of embedded minimal surfaces of genus 3 in flat tori に TT-surface は含まれる. この Meeks family は変形空間 (複素 9 次元) に導かれた special pseudo Kähler structure の Kähler form について Lagrangian であることが分かる [Ej2].

TT-surface の $index_a$ の変化 $2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 2$. $index_a = 1$, CMC 安定の範囲もわかる. このことより P-suface と D-surface の間の変形を与える TT-surface は数値計算ではすべて CMC 安定となる.

(3) parameter a を持つ Schwarz の H-surface(rH family と呼ばれている [Wey]) の $index_a$ の変化 $3 \longleftarrow 1 \longrightarrow 2$. $a = 1$ では Riemann surface は退化している. $index_a = 1$ を満たす a の範囲で CMC 安定もわかる. H-surface は Meeks family には含まれていない. 更に H-surface の associate surface で embedded な minimal surface はただ 1 つあり Lidinoid [L-L] と呼ばれているが, これも CMC 安定となる. Gyroid と Lidinoid は one parameter family of embedded minimal surface in flat tori に含まれ rG family と呼ばれている [F-H-L]. これらは Meeks family とは異なった実 9 次元 family of embedded minimal surfaces of genus 3 in flat tori に含まれており, Meeks family と同様に Lagrangian である. この 2 つの Lagrangian cone は intersection を degenerate point で持つ. rH family も Meeks family とは異なる Lagrangian cone である実 9 次元 family of embedded minimal surfaces of genus 3 in flat tori に含まれる, しかるに Gyroid を含む Lagrangian cone と一致するかどうかは現在研究中. Ritoré-Ros の compactness theorem から non-trivial Jacobi field を持たない $index_a = 1$ の embedded minimal surface を含むこのような Lagrangian cone は有限個である (up to $Sp(3, \mathbf{Z})$). 上のことより少なくとも 2 つは存在する.

このように種数 3 の場合 $index_a$ の複素幾何学的計算アルゴリズムはかなり役に立つ. 更なる結果については [E-S] にあります. 種数 4 の場合の Schoen

の I-WP 曲面については現在研究中．$index_a$ は 6, 7, 8 の内どれかである．

これらの minimal surface についての興味深い示唆，graphics を岡山大学の藤森氏からお教えいただきました深く感謝いたします．

4. 変形空間からの complex period map の像について．

変形空間の各点は実際は種数 γ の Riemann surface$M$ から $\mathbf{R}^n$ への multi-valued weakly conformal harmonic map S である．この時

$$dS = {}^t(\phi_1, ..., \phi_n),$$

ここで ϕ_k は M 上の harmonic 1 form となっている．M の canonical homology basis を $\{A_1, ..., A_\gamma, B_1, ..., B_\gamma\}$ として 1 つ固定する．我々は変形空間の元は $(S, \{A_i, B_i\})$ として指標が付いていると考える．

$$L = (\int_{A_i} dS, \int_{B_i} dS)$$

とおけば L は $(n, 2\gamma)$ 実行列となる．従って変形空間から $(n, 2\gamma)$ 実行列の空間 $L_{n,2\gamma}$ への real period map が構成できる．L の column vector が lattice $< L >$ を与えている (周期条件と呼ぶ) ときは S は M から n 次元 flat torus $\mathbf{R}^n / < L >$ への branched minimal immersion を与える．次に dS の $(1,0)$ 成分を $dS^{(1,0)}$ とすれば各成分は holomorphic 1 form である．この時

$$(\int_{A_i} dS^{(1,0)}, \int_{B_i} dS^{(1,0)})$$

は $(n, 2\gamma)$ 複素行列となる．これを使って変形空間から $(n, 2\gamma)$ 複素行列のなす空間 $K_{n,2\gamma}$ への complex period map が構成される．$K_{n,2\gamma}$ は偶数次元の複素数空間であり以下のように complex symplectic form ω_1 が作られる．$K_{n,2\gamma} = K_{n,\gamma} \times K_{n,\gamma}$ として $(Z_1, Z_2) \in K_{n,\gamma} \times K_{n,\gamma}$ を用いて

$$\omega_1 = \mathrm{tr}\, {}^t dZ_2 \wedge dZ_1$$

で与える．minimality の条件より次を示すことができる．

Lemma 4.1. complex period map の像は ω_1 に関して complex isotropic cone である．すなわち complex period map による ω_1 の引き戻しが消える．

いつ complex Lagrangian cone になるか，すなわち complex period map の像がちょうど $K_{n,2\gamma}$ の半分次元 $n\gamma$ になることについて考える．

後回しになったが変形空間を次のように考える．${}^t(\omega_1, ..., \omega_n)$ を指標つき Riemann surface$M$ 上の n 個の holomorphic 1−forms とする．指標つき Riemann surface$M$ 全体は Torelli 空間と呼ばれる。従って Torelli 空間上の fibre 空間を考えることになる．これは complex variety である．この時 minimality は

$$\sum \omega_i^2 = 0$$

となり (Weierstrass の表現公式)，したがって変形空間は subvariety となる．この考え方は Pirola[Pi] によるものである．我々はこの subvariety の irreducible component$N$ を考えることにしよう．N から $L_{n,2\gamma}$ への real period map を考える．Pirola は以下のことを示している．

Theorem 4.2 [Pi]. もし N に属する minimal surface が trivial Jacobi field (parallel translation から引き起こされる Jacobi field) 以外の Jacobi field (non-trivial Jacobi field と呼ぶ) を持たないならその点の real period map の微分は bijective である．すなわち minimal surface の近傍は $L_{n,2\gamma}$ の open set のグラフとなる．特に $dim_{\mathbf{C}} N = n\gamma$.

この時 N から $L_{n,2\gamma}$ への projection の singularity を除いた N の各 connected componentN_o を考えることができる．$L_{n,2\gamma}$ の cotangent bundle $T^* L_{n,2\gamma}$ は $K_{n,\gamma} \times K_{n,\gamma}$ であり complex period map と $T^* L_{n,2\gamma}$ から $L_{n,2\gamma}$ への projection の合成が real period map であること，Lemma 4.1 と Theorem 4.2 より次を得る．

Theorem 4.3. もし N に属する minimal surface が non-trivial Jacobi field を持たないなら complex period map は complex Lagrangian cone を与える．

現在のところ $dim_{\mathbf{C}} N \neq n\gamma$ となる例は種数 3 以上の non-hyperelliptic Riemann surface から実 4 次元 torus の holomorphic map 全体しか知られていない．多分この特別な例以外では $dim_{\mathbf{C}} N = n\gamma$ は成立すると思われる．

この complex period map の像の各点の接空間に special pseudo Kähler metric を構成し $index_a$ を求める複素幾何学的計算アルゴリズムを構成する．

5. 変形空間上の special pseudo Kähler structure について．

complex symplectic form ω_1 から $K_{n,\gamma} \times K_{n,\gamma}$ 上に signature $(n\gamma, n\gamma)$ の Hermitian form η_2 を

$$\eta_2(X, Y) = -\sqrt{-1}\omega_1(X, \overline{Y})$$

で定義する．この時 complex Lagrangian submanifold に導かれた η_2 が non-degenerate であるとき Lagrangian pseudo Kähler submanifold [Co] と呼ぶ．Lagrangian pseudo Kähler submanifold となる条件は以下で与えられる．

Lemma 5.1[Co]. V を a complex Lagrangian subspace とする．V が non-degenerate であるためには the projection of $V \subset K_{n,\gamma} \times K_{n,\gamma}$ into $L_{n,2\gamma}$ が surjective であることである．

N に属するある minimal surface が non-trivial Jacobi field を持たないと仮定する．この時 Theorem 4.2, Theorem 4.3, Lemma 4.1 から N_o は Lagrangian pseudo Kähler cone (without origin) を与える．それは局所的に $T^*L_{n,2\gamma}$ における $L_{n,2\gamma}$ 上のグラフとなる．これらは N_o 上の special pseudo Kähler structure を与える．実際には $L_{n,2\gamma}$ から N_o に torsion zero の flat connection ∇ が導かれ pseudo Kähler form ω について $\nabla\omega = 0$ すなわち $L_{n,2\gamma}$ の flat Darboux coordinate が ω と対応している．更に $(\nabla_X J)(Y) = (\nabla_Y J)(X)$ が成立する．ここで J は complex structure である．これらを一般化したものが Freed[Fr] による special pseudo Kähler structure である．

6. 別な approach.

上のように N_o に直接に special pseudo Kähler structure を導くことができるが，このままでは $index_a$ との関わりが得られない．従って N_o に special pseudo Kähler structure を導く別な approach を考える．Calabi-Yau manifold の複素構造の変形空間 ([B-G]) は special pseudo Kähler structure を持つことが示されたが Hitchin [Hi] はその複素構造の変形空間を変分問題の解空間としてとらえ special pseudo Kähler structure を導いた．同様に minimal surface は energy functional の変分問題の解であることから，この解空間から始めて special pseudo Kähler structure を導く．

$L \in L_{n,2\gamma}$ に対して種数 γ のリーマン面 M から $\mathbf{R}^n$ への multivalued harmonic map $(S, \{A_i, B_i\})$ を考える．weakly conformal は仮定しない．

$$dS =^t (\phi_1, ..., \phi_n),$$

ϕ_k は M 上の harmonic 1−form,

$$L = (\int_{A_i} dS, \int_{B_i} dS)$$

を満たしているとする．この条件より S は平行移動をのぞいて一意的である．実際 ψ_i は $\int_{A_i} \psi_j = \delta_{ij}$ を満たす holomorphic1−form とし $\tau = (\int_{B_i} \psi_j)$ を Riemann matrix とすれば

$$dS = (L_1, L_2)T_\tau^{-1}\,{}^t(\mathrm{Re}\psi_1, ..., \mathrm{Re}\psi_\gamma, \mathrm{Im}\psi_1, ..., \mathrm{Im}\psi_\gamma)$$

である，ここで

$$T_\tau = \begin{pmatrix} E_\gamma & \mathrm{Re}\tau \\ 0 & \mathrm{Im}\tau \end{pmatrix}.$$

Lemma 6.1. S の energy $E(\tau, L)$ は以下で与えられる．

$$E(\tau, L) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}P(\tau)^t LL,$$

$$P(\tau) = \begin{pmatrix} (\mathrm{Im}\tau) + (\mathrm{Re}\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1}(\mathrm{Re}\tau) & -(\mathrm{Re}\tau)(\mathrm{Im}\tau)^{-1} \\ -(\mathrm{Im}\tau)^{-1}(\mathrm{Re}\tau) & (\mathrm{Im}\tau)^{-1} \end{pmatrix} \in Sp(\gamma, \mathbf{R}).$$

ここで τ は M の $\{A_i, B_i\}$ に関する Riemann matrix である．

我々は指標 $\{A_i, B_j\}$ を持つ Riemann surface すべてに対して energy を考えるので Torelli space(Teichmüller space ではない）上の関数を考えることになる．Lemma 6.1 より γ 次 Siegel upper half spaceH_γ の Riemann matrices の空間 RM 上の関数 $E(\tau, L)$ に reduce することが分かる．

Theorem 6.2. $E(\tau, L)$ の critical point であるための必要十分条件は対応する multivalued harmonic map が weakly conformal. すなわち

$$dS^{(1,0)} = \frac{1}{2}(L_1 + i[L_1\mathrm{Re}\tau - L_2](\mathrm{Im})^{-1})^t(\psi_1, ..., \psi_\gamma)$$

が ${}^t dS^{(1,0)} dS^{(1,0)} = 0$ を満たすことである．

実際には RM は hyperelliptic locus RM_{hyper} を特異点とする $3\gamma - 3$ 次元の analytic set であり $RM_{non-hyper} = RM \setminus RM_{hyper}$ とする．RM_{hyper} は $2\gamma - 1$ 次元．そこで $E(\tau, L)$ において $RM_{non-hyper}$ への制限 $E_{RM_{non-hyper}}$ と RM_{hyper} への制限 $E_{RM_{hyper}}$ を考える．それぞれの critical point は (multivalued)non-hyperelliptic branched minimal surface と (multivalued)hyperelliptic branched minimal surface に対応する．

このように $E_{RM_{non-hyper}}$ と $E_{RM_{hyper}}$ は parameter 空間 $L_{n,2\gamma}$ を持つ関数と考えられる．Theorem 6.2 からその critical points 全体 $C(E_{RM_{non-hyper}}) \subset RM_{non-hyper} \times L_{n,2\gamma}$ あるいは $C(E_{RM_{hyper}}) \subset RM_{hyper} \times L_{n,2\gamma}$ こそが我々の考える変形空間となる．これを catastrophe set と呼ぶ．L を変形した時にどのように critical point がどのように変化するかを調べよう．ある critical point の

周りで Morse family であるならその近傍は manifold で $T^*L_{n,2\gamma}$ の Lagrangian submanifold を与える．これがなぜ Lagrangian submanifold が現れるかの理由である．変形空間の複素構造は以下のようにして与えられる．$H_\gamma \times L_{n,2\gamma}$ から $H_\gamma \times K_{n,\gamma}$ への写像 Ψ を考える．

$$\Psi(\tau, (L_1, L_2)) = (\tau, \frac{1}{2}(L_1 + i[L_1(\mathrm{Re}\tau) - L_2](\mathrm{Im}\tau)^{-1})),$$

where $\tau \in H_\gamma$, $L = (L_1, L_2)$, $L_1,\ L_2 \in L_{n,\gamma}$.

Lemma 6.3. Ψ is a diffeomorphism.

Ψ による catastrophe set の像は次で与えられ $H_\gamma \times K_{n,\gamma}$ の analytic set となる．

Lemma 6.4.

$$\{(\tau, K) \in H_\gamma \times K_{n,\gamma} | \mathrm{tr}\frac{\partial \tau}{\partial z^\ell}\, {}^tKK = 0,\ \ell = 1, ...,\},$$

ここで τ は $RM_{non-hyper}$, RM_{hyper} から H_γ への inclusion map と考え, z^ℓ, $\ell = 1, ...,$ はそれぞれ $RM_{non-hyper}$, RM_{hyper} の複素座標とする．

このように Ψ により $H_\gamma \times L_{n,2\gamma}$ に複素構造を導くと $RM_{non-hyper} \times L_{n,2\gamma}$ と $RM_{hyper} \times L_{n,2\gamma}$ に複素構造が入り $C(E_{RM_{non-hyper}})$ と $C(E_{RM_{hyper}})$ は analytic set と見なされる．今後その irreducible component$N$ を考えることができる．N は特異点を持つ可能性があることに注意する．N からの complex period map を求めると

Lemma 6.5.

$$(\int_{A_i} dS^{(1,0)}, \int_{B_i} dS^{(1,0)}) = (K, K\tau)$$

ここで $K = \frac{1}{2}(L_1 + i[L_1(\mathrm{Re}\tau) - L_2](\mathrm{Im}\tau)^{-1})$

Φ を $H_\gamma \times K_{n,\gamma}$ から $T^*L_{n,2\gamma} = K_{n,2\gamma} = K_{n,\gamma} \times K_{n,\gamma}$ への写像として

$$\Phi(\tau, K) = (K, K\tau)$$

で定める．従って complex period map は合成写像 $\Phi \circ \Psi$ で与えられる．

Lemma 6.6. $\Phi^*\omega_1 = \mathrm{tr}(d\tau \wedge {}^tKdK)$.

Lemma 6.6 が Lemma 4.1 を導く．catastrophe set 上では $\mathrm{tr} d\tau {}^t KK = 0$ より $\mathrm{tr}(d\tau \wedge {}^t KdK) = 0$ が成立するからである．変形空間には変分問題の解空間としてとらえた場合の Lagrangian submanifold の構造が導かれ，Weierstrass の表現公式から複素構造が導かれてそれらがうまく融合して complex Lagrangian の構造が導かれる．

7. $E_{RM_{non-hyper}}$ と $E_{RM_{hyper}}$ の index について．

$E_{RM_{non-hyper}}$ と $E_{RM_{hyper}}$ の critical point での Hessian の nullity を $nullity_{E_{RM_{non-hyper}}}$, $nullity_{E_{RM_{hyper}}}$ で表し index を $index_{E_{RM_{non-hyper}}}$, $index_{E_{RM_{hyper}}}$ で表す．nullity が 0 の critical point を non-degenerate critical point と呼ぶ．この時 N は $L_{n,2\gamma}$ のある近傍上の $T^*L_{n,2\gamma}$ 内の Lagrangian graph となる．従って, この近傍の complex period map の像は complex Lagrangian submanifold になりこの Lagrangian graph には special pseudo Kähler structure が導かれる．そこで N の non-degenerate critical points の集合を考えよう．これらは N の open set である．connected componentN_o を考えれば同様に special pseudo Kähler structure が導かれる．

N は少なくとも 1 つ non-degenerate critical point を持つとする．この時 N の特異点全体の集合 (analytic set) を除く点で degenerate point 全体は real analytic set であることに注意しよう．N が non-degenerate critical point を持たない例は現在までさきほどの例 1 つのみである．

対応する minimal surface の Jacobi operator の nullity($nullity_a$ で表す), index($index_a$ で表す) との関係は既に次で示されている．

Theorem 7.1 [Ej1]. N_o に対応する minimal surface を考える．
(1) non-hyperelliptic minimal surface の場合．

$$index_a = inex_{E_{RM_{non-hyper}}}, \quad nullity_a = n$$

minimal surface は immersed で trivial Jacobi field しか持たない
(2) hyperelliptic minimal surface の場合．

$$index_a = inex_{E_{RM_{hyper}}} + \alpha,$$
$$nullity_a = n + 2\gamma - 4 - 2\alpha, \quad 0 \le \alpha \le \gamma - 2$$

$\alpha = \gamma - 2$ ならば immersed で trivial Jacobi field しか持たない．$\alpha < \gamma - 2$ の場合には branched minimal surface が immersed ならば non-trivial Jacobi field を持つ．$\alpha = 0$ ならば holomorphic curve と見なされる．$\alpha < \gamma - 2$ である N_o の部分集合は analytic set となる．この analytic set は N_o 全体となるこ

ともある (holomorphic curves が N_o をなす時). Theorem 4.2 は Theorem 7.1 からも導ける.

8. アルゴリズムの作成.

N_o に対応する minimal surface を考える. 我々はその real period $L_{n,2\gamma}$ の近傍上の complex Lagrangian graph in $T^*L_{n,2\gamma}$ を得る.

Lemma 8.1. complex Lagrangian graph は次で与えられる.

$$L \longrightarrow (LP(\tau(L)), L).$$

これを使って次を得る.

Proposition 8.2.

$$\mathrm{Hess} E_{RM_{non-hyper}}(\frac{\partial}{\partial \tau^a}, \frac{\partial}{\partial \tau^b})\frac{\partial \tau^a}{\partial L_k}\frac{\partial \tau^b}{\partial L_\ell} = P(\tau(L))_{k\ell} - \mathrm{Hess}\, a(\frac{\partial}{\partial L_k}, \frac{\partial}{\partial L_\ell})$$

ここで $a(L) = \frac{1}{2}\mathrm{tr} P(\tau(L))^t LL$ は pseudo Kähler potential である. $E_{RM_{hyper}}$ についても同様である.

ここで N_o の構造について考える. $N_o \longrightarrow RM_{non-hyper}$, RM_{hyper} を考えると微分の rank がもっとも高い点の近傍では submersive となっている. その近傍は $RM_{non-hyper}$, RM_{hyper} の complex submanifold 上の fibre bundle となっている. 我々は N_o の点が surjective condition を満たすとはその点で $N_o \longrightarrow RM_{non-hyper}$, RM_{hyper} の微分が surjective であると定義する. この complex submanifold はその点の周りの minimal surface が取りえる複素構造全体であり surjective でない場合は複素構造が制限されていることを意味している. 例えば 3 次元 flat torus の種数 4 の (non-hyperelliptic) minimal surface の変形空間での複素構造は 8 次元である. これらは trigonal minimal surface と呼ばれる [Sh]. 一方すべての複素構造の次元は $9 = 3 \times 4 - 3$ である. 従って I-WP surface の変形空間は surjective condition を満たしていない. しかし I-WP surface も 4 次元 flat torus の変形空間 (4 次元 flat torus が 3 次元 flat torus に退化したと考えている) の non-degenerate critical point である. その場合の N_o を考えると generic point は surjective condition を満たすことがわかる. よって下の Corollary 8.3 が使えてその $index_a$ が求める I-WP の $index_a$ となる.

Corollary 8.3. surjective condition を満たす点に対応する minimal surface の $indexE_{RM_{non-hyper}}$, $indexE_{RM_{hyper}}$ は適当な $L_{n,2\gamma}$ の基底に関する次の行列の負の固有値の数である.

$$P(\tau(L))_{k\ell} - \text{Hess}\, a(\frac{\partial}{\partial L_k}, \frac{\partial}{\partial L_\ell})$$

上の行列は fibre の次元だけ 0 固有値が現れる.

$P(\tau(L))_{k\ell}$ は τ が定める complex Lagrangian subspace

$$\{(K, K\tau) | K \in K_{n,\gamma}\}$$

の実基底に関する Gram 行列であり $\text{Hess}\, a(\frac{\partial}{\partial L_k}, \frac{\partial}{\partial L_\ell})$ は complex period map の像の N_o の点の tangent space の同じ実基底に関する Gram 行列である. 従って tangent space の複素基底から作った実基底で $\{(K, K\tau)|K \in K_{n,\gamma}\}$ の Gram 行列を求めて Corollary 8.3 の行列を求め負の固有値を求めれば $index_a$ が計算できることになる. 次の定理が成り立つ.

Theorem 8.4. complex period map の像の non-degenerate critical point での tangent space は対応する minimal surface の $index_a$ を決定し, Algorithm を与える.

9. 種数 3 の場合の $index_a$ の具体的計算.

$\mathbf{C}$ 上の 8 個の異なった点 $\{a_1, ..., a_8\}$ を取り平面曲線

$$M : y^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_8)$$

を作る. それは hyperelliptic である. z を the meromorphic function on M とし η を $(\frac{1}{y})dz$ とする. その時

$$f(z) = \int^z {}^t\omega : M \longrightarrow J(M)$$

は Albanese map である. ここで $\omega = [((1-z^2), (1+z^2)i, 2z)\eta]$, $J(M)$ は M の Jacobi variety . $C(E_{RM_{nyper}})$ の irreducible component はただ 1 つそれを H で示す. local expression of the map of H into $T^*L_{3,6} = K_{3,3} \times K_{3,3}$ として, the complex Lagrangian (degenerate) immersion F_H of $SO(3, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^* \times$ the space of different five points (with fixed three points) of $\mathbf{C}$ into ${}^t(H^1(M, \mathbf{C}) \times H^1(M, \mathbf{C}) \times H^1(M, \mathbf{C}))$ が次で定められる.

$$\alpha a^t\omega, \quad \alpha \in \mathbf{C}^*, a \in SO(3, \mathbf{C}),$$

つまり

$$\left(\int_{A_k} \alpha a^t\omega, \int_{B_k} \alpha a^t\omega\right),$$

ここで $\{A_k, B_k\}$ は a canonical homology basis. 別の canonical homology basis を選べば, 別の $Sp(3, \mathbf{Z})$-equivariant な local expression が得られる. Proposition 12.6 [Ej2] により, (degenerate) special pseudo Kähler structure on $SO(3,\mathbf{C}) \times \mathbf{C}^* \times$ the space of different five points (with fixed three points) on $\mathbf{C}$ が得られる. これは surjective condition が満たされていることを示す. F_H は embedding である.

もし H の点の tangent space が計算できその complex Lagrangian subspace が non-degenerate であるとわかれば, 対応する minimal surface の η_2 の signature と $index_a$ が計算できる. 最初に, $a_1, \cdots, a_8$ から 5 points を選ぶ, $a_1, \cdots, a_5$ として良い, 他は固定する. この 5 つの parameter が genus 3 の hyperelliptic Riemann surface の変形を与える. 実際 $2 \times 3 - 1 = 5$.

$$T_i = \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\int_{A_k} {}^t\omega, \int_{B_k} {}^t\omega\right), i = 1, \cdots, 5, \quad T_6 = \left(\int_{A_k} {}^t\omega, \int_{B_k} {}^t\omega\right)$$

$$T_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_6, \quad T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_6, \quad T_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} T_6.$$

$T_6 = (C_1, C_2)$ から Riemann matrix $\tau = C_1^{-1}C_2$ を得る. もし T_i for $1 \leq i \leq 9$ が linearly independent ならば, $\{T_i\}$ はその tangent space の basis となり, complex Lagrangian であることを示している. η_2 が degenerate なら, その null space は $nullity_a$ を与える. もし η_2 が non-degenerate なら, $index_a$ の Algorithm が使える. T_i, $1 \leq i \leq 5$ は第 1 種と第 2 種の Abelian differentials の period から求められる.

References

[A-P] C. Arezzo and G. P. Pirola, On the existence of periodic minimal surfaces,

[B-C] J. L. Barbosa and M. do Carmo, Stability of Hypersurfaces with constant mean curvature, Math. Z. 185(1984), 339-353.

[B-G] R. L. Bryant an, P. A. Griffiths, Some observations on the infinitesimal period relations for regular threefolds with trivial canonical bundle, in Arithmetic and geometry, Papers dedicated to I.R. Shafarevich, Progress in Mathematics 36, Birkhäuser, 1983.

[B-W] K. Große-Brauckmann and M. Wohlgemuth, The gyroid is embedded and has constant mean curvature companions, Cal. Var. 4(1996), 499-523.

[Co] V. Cortés, On hyperKähler manifolds associated to Lagrangian Kähler submanifold of $T^*\mathbf{C}^n$, Trans. A. M. S. 350(1998), 3193-3205.

[Ej1] N. Ejiri, A Differential-Geometric Schottky Problem, and Minimal Surfaces in Tori, Contemporary Mathematics 308 (2002), 101-144.

[Ej2] N. Ejiri, A generating function of a complex Lagrangian cone in $\mathbf{H}^n$, preprint.

[E-S] N. Ejiri and T. Shoda, in preparation.

[Fr] D. S. Freed, Special Kähler manifolds, Comm. Math. Phys. 203(1999), 31-52.

[F-H-L] A. Fogden, M. Haeberlein and S. Lidin, Generalization of the gyroid surface, J. Phys. I France 3(1993), 2371-2385.

[Hi] N. Hitchin, The geometry of three-forms in six dimensions, J. Diff. Geom. 55(2000), 547-576.

[Ka] H. Karcher, The triply periodic minimal surfaces of Alan Schoen and their constant mean curvature companions, Manuscripta Math. 64(1989), 291-357.

[L-L] S. Lidin and S. Larsson, Bonnet transformation of infinite periodic minimal surfaces with hexagonal symmetry, J. Chem. Soc. Faraday Trans. 86(5) (1990), 769-775.

[Me] W. H. Meeeks III, The theory of triple periodic minimal surfaces, Indiana Univ. Math. J. 39(1990), 877-936.

[M-R] S. Montiel and A. Ros, Schrödinger operator associated to a holomorphic map, Global Diff. and Global Analysis, Lecture note in Math. 1481(1991), 147-174.

[Pi] G. P. Pirola, The infinitesimal variation of the spin abelian differentials and periodic minimal surfaces, Communications in Analysis and Geometry 6(1998), 393-426.

[Ri] M. Ritoré, Index one minimal surfaces in flat three space forms, Indiana Univ. Math. J. 48(1997), 1137-1153.

[R-R] M. Ritoré and A. Ros, The space of index one minimal surfaces and stable constant mean curvature surfaces embedded in flat three manifolds, Trans. A. M. S. 348(1996), 391-410.

[Ross] M. Ross, Schwarz' P and D surfaces are stable, Diff. Geom App. 2(1992), 179-195.

[Ros1] A. Ros, One-sided complete stable minimal surfaces, J. Diff. Geom 74(2006), 69-92.

[Ros2] A. Ros, Stable periodic constant mean curvature surfaces and mesoscopic phase separation, Interfaces and Free Boundaries 9(3) (2007), 355-365.

[Sho] T. Shoda, New components of the Moduli space of minimal surfaces in 4-dimensional flat tori, Journal of the London Mathematical Society (2) 70 (2004), no. 3, 797–816.

[Wey] A. Weyhaupt, Deformations of the Gyroid and Lidinoid minimal surfaces, Pacific J. Math. 235(2008), 137-171.