

## オイラー方程式の新しい解表現, および 最初のカオス理論のポアンカレ (1890) の再認識と 上田アトラクタの発見 (1961)

元東京大学教授 神部 勉 (Tsutomu Kambe)  
Former Professor, University of Tokyo

### 0 はじめに

今年の研究会は、「カルマン渦列と非定常渦運動 100 年」がサブテーマとなっているので、はじめに、カルマン渦列の発生によって高層建造物がどのような影響を受けるか、その対策の実例から話を始める。

アラブ首長国連邦 (UAE) のドバイにあるブルジ・カリファ塔 (図 A, 図の最後) は高さ 828 m で、現在世界最高である。これは 2010 年 1 月に完成したが、建設に 5 年以上を要した [21]。その報告が 2010 年 9 月の Physics Today に掲載され、翻訳がパリティに 2011 年 8 月に掲載された。

高層の建造物では、高層の大気の流れによるカルマン渦列発生周期と、構造物の固有振動の周期との共鳴が、破壊的效果を生む。その効果を軽減するために、この建造物では、地面から高さと共に水平断面が変化すると同時に、大から小へ変化し、いわばたて長のひな壇型の設計を採用している。それはストローハル数を変えて、構造物の高さ全体にわたって、渦が組織的に放出されないように、「風をとまどわせる」設計になっているのである。風洞実験も行われている。

さて本論であるが、前半の Part I では、最近見出した”オイラー方程式の新しい解表現” [1] の要点を報告する。次の Part II は、今年 2011 年 11 月に開催される ”IUTAM Symposium on 50 years of Chaos”に関連して、ポアンカレ (1890) の理論 [10] をレビューして、それが最初のカオス理論であったということを再認識する。最後の Part III は、上田アトラクタの発見 (1961) について述べる [15, 16, 18]。

### Part I: オイラー方程式の新しい解表現

#### 1 変分理論の背景

流体の流れ場のラグランジュ関数が与えられたとして、作用原理に則ったオイラー変分によって、場の方程式を導出する。オイラー変分では、すべての場について独立な変分がとられる。古典的なオイラー変分 [2-5] では、Clebsch の解が得られる [6, 7, 8]。しかしながら、この解では、渦度場が特殊な形をしていて、helicity はゼロとなります。さらに、流体エントロピーが一様な場合は、流れ場は渦なしとなる。

注目すべきことに、オイラーが流体の運動方程式を提出した 1757 年の最初の paper [9] ですでに、彼の方程式が回転性 (rotational) の流れ場を解として有することを示している。実は、それがオイラーの目的の一つでもあった。

上の問題を解決する目的で、Kambe [7, 8] は次の形の新しいラグランジュ関数、

$$L_A = - \int (\mathcal{L}_t^*[\mathbf{A}])_i \Omega^i d^3\mathbf{x}, \quad (1)$$

を導入した。後で定義するように、 $\Omega = (\Omega^i)$  は凍結場の方程式を満足するベクトル場で、 $\mathcal{L}_t^*[\mathbf{A}]$  は cotangent vector  $\mathbf{A}$  に対する Lie 微分<sup>1</sup>である。この項が渦度成分を生成し、変分解がオイラーの運動方程式を満足することを示すのが、本稿 Part I の目的であるが、詳しくは [1] で説明されている。

流体力学の変分原理では、中核となるラグランジュ関数  $L_{\text{main}}$ ,

$$L_{\text{main}} = \int \Lambda_{\text{main}} d^3\mathbf{x}, \quad \Lambda_{\text{main}} = \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \rho \epsilon(\rho, s), \quad (2)$$

に加えて、オイラー変分の場合は、時間  $t$  に関する全微分  $(d/dt) \int$  の形のラグランジュ関数を付加できる。というのは、作用関数はそれらの時間積分で定義されるから、新たに付加した項は積分で消えて、 $\Lambda_{\text{main}}$  から導かれる Euler-Lagrange 方程式 (Appendix A) には影響を与えないからである。式 (1) の  $L_A$  も、ベクトル  $\Omega = (\Omega^i)$  が凍結場の方程式を満足する性質のために、 $(d/dt) \int$  の形に書ける。改良された変分原理 [1, 7, 8] では、 $L_A$  を含むそのような形の 3 つのラグランジュ関数が付加される。Part I は、新しい  $L_A$  項がもたらす効果を考察する。特に、そこで得られた変分解は、オイラーの運動方程式を確かに満足することを新たに証明する。従来の Clebsch の Parametric solution (App. B) との関係も最後に考察する。

## 2 変分原理

オイラー方程式の新しい解の表現は、次の作用積分と、以下の作用原理とから導かれる：

$$\text{作用積分:} \quad J = \int \Lambda(\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}, \Omega) d^4x, \quad d^4x = dt d^3\mathbf{x}, \quad (3)$$

ここで、ラグランジュ密度  $\Lambda$  は次で与えられる：

$$\Lambda(\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}, \Omega) = \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \rho \epsilon(\rho, s) - \rho D_t \phi - \rho s D_t \psi - (\mathcal{L}_t^*[\mathbf{A}])_i \Omega^i, \quad (4)$$

ただし、 $\rho$  は質量密度、 $s$  は比エントロピー (単位質量当り) である。また、 $\phi(\mathbf{x}, t)$  および  $\psi(\mathbf{x}, t)$  はスカラーポテンシャルである。流れの場は次の作用原理で決定される。

作用原理: 場の変数  $\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}$  および  $\Omega$  の任意の変分に対し、

$$\delta J = \int_{V \otimes I_t} \delta \Lambda(\mathbf{v}, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}, \Omega) d^4x = 0,$$

従属変数の場を変分させて、 $v_i + \delta v_i, \rho + \delta \rho, s + \delta s, \phi + \delta \phi, \psi + \delta \psi, \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}$  および  $\Omega + \delta \Omega$  と表して、 $\Lambda[v_i, \rho, s, \phi, \psi, \mathbf{A}, \Omega]$  に代入すると、 $\Lambda$  の変分  $\delta \Lambda$  は次のように表せる：

$$\begin{aligned} \delta \Lambda = & \delta v_i \left[ \rho (v_i - \partial_i \phi - s \partial_i \psi) - \Omega_k \partial_i A_k + \Omega_k \partial_k A_i \right] - \partial_k (\Omega_k A_i \delta v_i) \\ & + \delta \rho \left( \frac{1}{2} v^2 - h - D_t \phi - s D_t \psi \right) - \delta s \rho (D_t \psi + T) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>本稿では次の微分演算子  $D_t, \mathcal{L}_t[\mathbf{A}]$  および  $\mathcal{L}_t^*$  が使われるが、それらは次のように定義される：

$$\begin{aligned} D_t & \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla, & \nabla & = (\partial/\partial x^i) = (\partial_i), \\ (\mathcal{L}_t^*[\mathbf{A}])_i & \equiv \partial_t A_i + v^k \partial_k A_i + A_k \partial_i v^k, \\ (\mathcal{L}_t[\Omega])^i & \equiv \partial_t \Omega^i + v^k \partial_k \Omega^i - \Omega^k \partial_k v^i, & \partial_k \Omega^k & = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta\phi \left( \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) - \partial_t (\rho \delta\phi) - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \delta\phi) \\
& + \delta\psi \left( \partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) \right) - \partial_t (\rho s \delta\psi) - \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v} \delta\psi) \\
& - \left\langle \mathcal{L}_t^*[\mathbf{A}], \delta\Omega \right\rangle + \left\langle \delta\mathbf{A}, \left( \mathcal{L}_t[\Omega] + \Omega \partial_k v^k \right) \right\rangle, \\
& \text{ここで } (\partial\epsilon/\partial\rho)_s = p/\rho^2, \quad (\partial\epsilon/\partial s)_\rho = T, \quad h = \epsilon + p/\rho.
\end{aligned}$$

独立の変分  $\delta v_i, \delta\rho, \delta s, \text{ etc.}$  に対して、変分原理  $\delta J = \int \delta \Lambda \, d^4x = 0$  を適用すると、各変分の係数がゼロとなるべきことから、次の結果が得られる：

$$\delta v_i : \rho(v_i - \partial_i \phi - s \partial_i \psi) - \Omega_k \partial_i A_k + \Omega_k \partial_k A_i = 0, \quad (5)$$

$$\delta\rho : \frac{1}{2} v^2 - h - D_t \phi - s D_t \psi = 0, \quad (6)$$

$$\delta s : D_t \psi + T = 0, \quad (7)$$

$$\delta\phi : \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (8)$$

$$\delta\psi : \partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0, \quad (9)$$

$$\delta\Omega : \mathcal{L}_t^*[\mathbf{A}] = 0. \quad (10)$$

$$\delta\mathbf{A} : \mathcal{L}_t[\Omega] + \Omega \partial_k v^k = \partial_t \Omega + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) = 0, \quad (11)$$

$$\partial_k \Omega^k = 0. \quad (12)$$

ここで、 $h$  は比エンタルピー (単位質量当り) である。式 (5) は速度  $\mathbf{v}$  の新しい表現を与える：

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + s \nabla \psi + \frac{1}{\rho} \mathbf{w}, \quad (13)$$

$$\text{ここで } \mathbf{w} = (w_i) = \Omega^k \nabla A_k - (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{A} = \Omega \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (14)$$

$$w_i = \Omega^k C_{ik}, \quad C_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i. \quad (15)$$

変分  $\delta\phi$  および  $\delta\psi$  の係数ゼロの条件から、次式を得る：

$$\delta\phi : \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (16)$$

$$\delta\psi : \partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0.$$

式 (16) は連続の式であるが、これを使うと 2 番目の式は次の断熱方程式に帰着する：

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = D_t s = 0. \quad (17)$$

渦度は  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  で定義されるが、いまの場合、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla s \times \nabla \psi + \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{w} \right), \quad (18)$$

となる。第 1 項は  $s = \text{const}$  の場合には消える。現在の定式化は、一様エントロピーの流体でも、第 2 項の回転性の成分を含む結果が得られるので、改良になっている。

### 3 変分解はオイラーの運動方程式を満たしている

変分原理で導かれた式 (5), (6) および (7) が、オイラーの運動方程式を満たすことは、以下のようにして証明される。(5) を書き換えた式 (13) の  $\mathbf{v}$  に時間微分演算子  $D_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  を作用させると、

$$D_t[\mathbf{v}] = D_t \nabla \phi + D_t (s \nabla \psi) - \frac{1}{\rho^2} (D_t \rho) \mathbf{w} + \frac{1}{\rho} D_t \mathbf{w}, \quad (19)$$

まず、最初の三項の  $D_t \rho$ ,  $D_t(\nabla \phi)$ ,  $D_t(s \nabla \psi)$  を計算すると、

$$D_t \rho = -\rho (\partial_k v^k), \quad [\text{式 (16) より}] \quad (20)$$

$$D_t(\nabla \phi) = \nabla(D_t \phi) - \partial_k \phi \nabla v^k, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D_t(s \nabla \psi) &= s D_t(\nabla \psi) = s \nabla(D_t \psi) - s \partial_k \psi \nabla v^k \\ &= -s \nabla T - s \partial_k \psi \nabla v^k. \end{aligned} \quad (22)$$

最後の式で、(17) および (7) が使われた。次に、式 (15) の  $w_i$  に  $D_t$  を作用すると、

$$D_t w^i = D_t(\Omega^k C_{ik}) = D_t(\Omega^k) C_{ik} + \Omega^k D_t(C_{ik}). \quad (23)$$

$$D_t(\Omega^k) = \Omega^l \partial_l v^k - \Omega^k \partial_l v^l, \quad [(11), (12) \text{ より}]$$

$$D_t C_{ik} = D_t(\partial_i A_k) - D_t(\partial_k A_i) = \partial_i(D_t A_k) - \partial_k(D_t A_i) - (\partial_i v^l) \partial_l A_k + (\partial_k v^l) \partial_l A_i.$$

これらを式 (23) に代入すると、

$$\begin{aligned} D_t w_i &= \Omega^l \partial_l v^k (\partial_i A_k - \partial_k A_i) - \Omega^k \partial_l v^l (\partial_i A_k - \partial_k A_i) + \Omega^k (\partial_i(D_t A_k) \\ &\quad - \partial_k(D_t A_i) - (\partial_i v^l) \partial_l A_k + (\partial_k v^l) \partial_l A_i). \end{aligned}$$

右辺は、いくつかの項が相殺で消去され、最終的に

$$D_t \mathbf{w} = -w_k \nabla v^k - (\partial_l v^l) w_i, \quad w_k = \Omega^l C_{kl}. \quad (24)$$

となる。以上で得た式 (20), (21), (22) および (24) を、式 (19) に代入すると、次を得る：

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{v} &= \nabla(D_t \phi) - (\partial_k \phi + s \partial_k \psi + \frac{1}{\rho} w_k) \nabla v^k - s \nabla T \\ &= \nabla(D_t \phi) - v_k \nabla v^k - s \nabla T = \nabla(D_t \phi - \frac{1}{2} v^2 - sT) + T \nabla s. \end{aligned}$$

式 (6) および (7) を使うと、これはオイラーの運動方程式に帰着する：

$$D_t \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \text{ただし} \quad dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp. \quad (25)$$

このようにして、式 (5), (6) および (7) で表せる場合は、オイラーの運動方程式を満足することが示された。

#### 4 $L_A$ と従来の方式との比較

オイラー変分は従来から考察されていて [2-5]、Clebsch 型の解が得られることが知られている。例えば、Lin [3] によって与えられたラグランジュ関数は

$$L_L = \int \sum_{k=1}^3 B_k \cdot D_t a_k d^3 \mathbf{x}, \quad (26)$$

である。ここで、 $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) はラグランジュ座標変数で、次を満たす：

$$D_t a_k = \partial_t a_k + (\mathbf{v} \cdot \nabla) a_k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (27)$$

いわゆるラグランジュ乗数のスカラーポテンシャル  $B_k$  は、変分原理から次が要請される：

$$D_t B_k = \partial_t B_k + (\mathbf{v} \cdot \nabla) B_k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (28)$$

これらと、現在のラグランジュ関数  $L_A$  とを比較してみよう：

$$L_A = - \int_V (\mathcal{L}_t^*[\mathbf{A}])_i \Omega^i d^3 \mathbf{x}.$$

変分原理から、 $A_i$  および  $\Omega^i$  に対して (10) および (11) が得られる。それらを再記すると、

$$\partial_t A_i + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_i = -A_k \partial_i v^k, \quad (29)$$

$$\partial_t \Omega^i + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega^i = \Omega^k \partial_k v^i - \Omega^i \partial_k v^k. \quad (30)$$

ただし、条件  $\partial_k \Omega^k = 0$  および  $\partial_k A_k = 0$  が課せられる。速度は次で与えられる：

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + s \nabla \psi + \frac{1}{\rho} \mathbf{w}.$$

ただし、 $\mathbf{w} = \boldsymbol{\Omega} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ . さらに渦度  $\boldsymbol{\omega}$  は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla s \times \nabla \psi + \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{w} \right). \quad (31)$$

他方、Lin の Lagrangian  $L_L$  から得られる速度および渦度は、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_L &= \nabla \phi + s \nabla \psi + \sum_{k=1}^3 B_k \nabla a_k, \\ \boldsymbol{\omega}_L &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla s \times \nabla \psi + \sum_{k=1}^3 \nabla B_k \times \nabla a_k. \end{aligned} \quad (32)$$

この場合オイラーの運動方程式を満たし (Appendix B)、Clebsch parametric solution と呼ばれている。渦度を表す両式 (31) および (32) は、 $\nabla s = 0$  の場合でも、ゼロとはならない。

しかしながら、両者の場の方程式 [(27), (28)] および [(29), (30)] の間には、本質的な相異がある。いずれの組でも、左辺は同じラグランジュ微分  $\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$  がかかっている点は共通であるが、右辺は異なる。前者の組では、右辺はゼロなのに対し、後者には有意の項があつて、流れによる引き伸ばし効果、および体積変化が組み込まれている。すなわち、ポテンシャル  $a_k, B_k$  の方は、単に流れに運ばれる効果のみで、値は変化しない。渦度のダイナミクスでは、流れによる引き伸ばし効果、および体積変化が重要である。それ故、本論文が提出する後者の式の方が、渦度のダイナミクスを記述するのにより適していると考えられる。

## Part I のまとめ

完全流体の変分原理の改良が提案され、変分で導出された場がオイラーの運動方程式を満足することが証明された。ここで導入した新しいラグランジュ関数から得られる速度場は、渦度成分を有しており、その表現は、流れによる引き伸ばし効果、および体積変化を組み込んだポテンシャルで表されている。ここにオイラー方程式の新しい解表現が提出された。最後に、新たに得た解の表現と従来の Clebsch 型の解の表現との相異を論じた。

## Part II: 最初のカオス理論 (Poincaré 1890)

### 1 背景

1890年11月、Sweden - Norway 国王オスカー二世の60歳誕生日を記念する国際コンテストの受賞論文と思われる Henri Poincaré の Three body problem の論文 [10] がジャーナル Acta Mathematica に掲載された。しかしながら、よく知られたこの論文 (1890) は、実際に Oscar 賞を受賞した当の paper (1889) [11] とは、かなり異なっていることが最近明らかになった。1890-paper の Introduction で、論文が改訂されたことは述べられているが、その詳細は示されていない。しかし、1985年に Richard McGehee (Univ. Minnesota) が偶然に最初に印刷された Poincaré paper を発見したことによって [13]、Poincaré の修正の正確な再構成が可能になった。実際、初めに書かれた 1889-paper の修正によって、1890-paper のカオスの最初の数学理論が導かれた。

1885-86年の Acta Mathematica Vol.7 に掲載された King Oscar 賞の公募内容は次のようなものであった [13]。『任意の数の多数の質点の系が与えられて、ニュートンの法則に従って互いに引力を作用しあっているとす。いかなる2点も衝突することはないという条件下で、各点の座標の級数形の表現を見出せ。ただし、級数の変数は時間の既知の関数であり、そのすべての値で、級数は一様に収束するものとする。 . . . . . 』

この課題は多体問題であったが、Poincaré が挑戦したのは、制限三体問題で、しかも三体が同じ一平面内にある場合であった。それでも解は十分に複雑であったことは、我々が現在知るところである。平面制限三体問題で、Poincaré がどのようにカオス理論に到達したか、Barrow-Green (1997) [12], および Diacu & Holmes (1996) [13] の文献に基づいて、以下で概略を振り返ってみる。

### 2 平面制限三体問題

典型的な三体問題の例は、次のような場合である (図1) :

$S$  : Sun       $J$  : Jupiter       $P$  : Planetoid (小惑星)

$P$  を省略すると、 $S$  と  $J$  の系は二体問題となる。特に、円運動をおこなう場合を、以下の解析のための無摂動状態とする。その理由は明らかで、そのとき周囲の重力ポテンシャル  $F$  は定常回転となる。さらに、三体は同じ平面内で運動するものとする。定常回転のポテンシャル  $F$  の中で、 $F$  への影響が無視できる、微小質量の第三の天体  $P$  が運動する問題は2自由度系である。Poincaré が考察したのは、そのような平面制限三体問題の力学系 (図1) であった。

これはハミルトン力学系で、その変数  $q_1, q_2, p_1, p_2$  は次で定義される :

$$q_1 = \overline{OP}, \quad q_2 = \angle POJ, \quad p_1 = \frac{d}{dt} \overline{OP}, \quad p_2 = \overline{OP}^2 \frac{d}{dt} (\angle POJ). \quad (33)$$

運動方程式は [14]、

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2), \quad (34)$$

$$\text{Hamiltonian:} \quad H = \frac{1}{2} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - np_2 - F.$$

大きい2つの天体  $S$  と  $J$  の質量を  $1 - \mu$  および  $\mu$  とすると、Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - np_2 - \frac{1 - \mu}{SP} - \frac{\mu}{JP}. \quad (35)$$

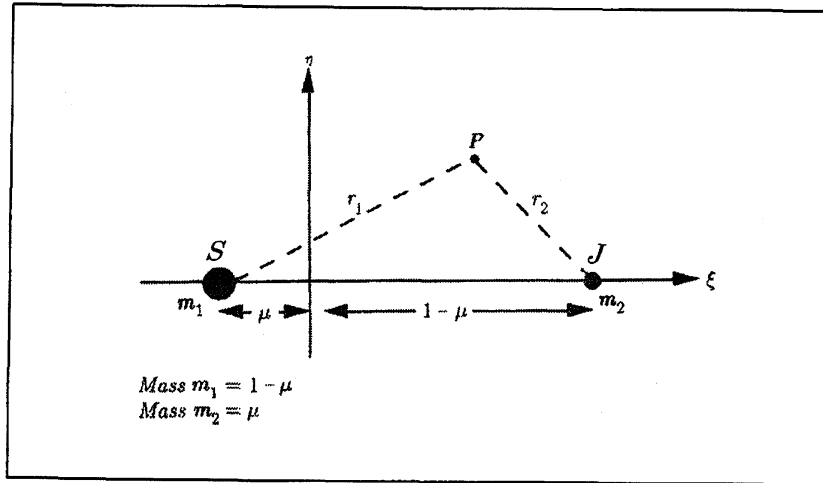


図 1. 平面制限三体問題 [12]

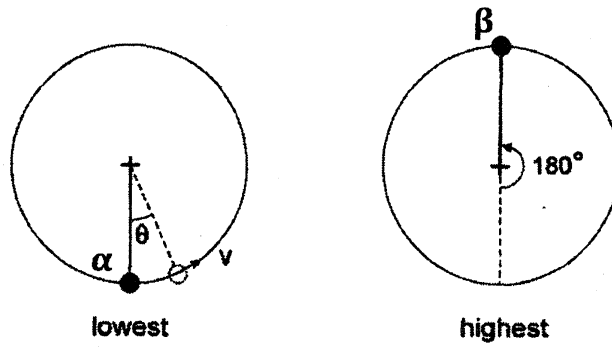
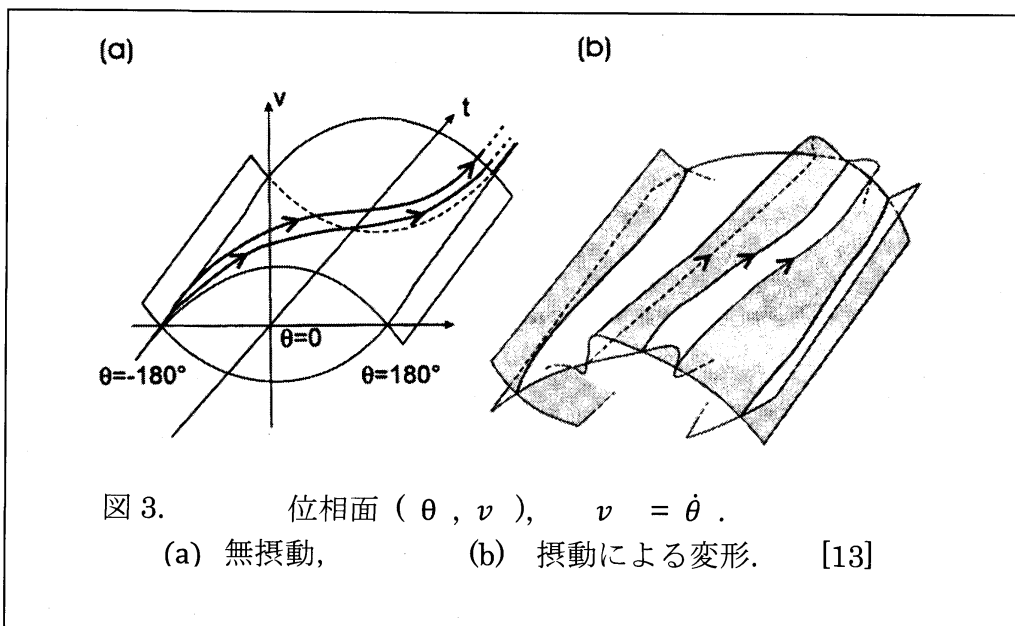


図 2. 単振子の運動と固定点 ( $\alpha$ : 真下、 $\beta$ : 真上). [13]



$S$  および  $J$  が一緒に定常回転する座標系では、 $\overline{SP}$ ,  $\overline{JP}$ , および Hamiltonian  $H$  は時間  $t$  を陽に含まないの、 $H = \text{const}$  となり、これは運動の積分である。

運動方程式 (34) は、2 自由度 4 次の力学系であるが、

$$H = \text{const}, \quad \text{および} \quad \text{時間 } t \text{ の消去,}$$

によって、それは 2 次の力学系 (1 自由度) に帰着する [14]。たとえば、角度  $q_2 = \angle POJ$  の関数として、 $q_1$  および  $p_1$  は次のように表せる： $q_1(q_2)$ ,  $p_1(q_2)$ 。

図 1 から推定されるように、小惑星  $P$  は一周の間に、 $S$  および  $J$  から 2 度の重力ポテンシャルの局所極大の変動を受ける。この力学系のモデルとして、単振子の運動が考えられる。単振子も 1 自由度の周期力学系である。しかも、振子の支点の垂直微小振動の摂動は、小惑星の受ける重力摂動と類似性がある。ポアンカレは、そのような周期摂動を受ける単振子の運動をモデルとして考察した。

### 3 安定・不安定多様体

質量が無視できる剛体棒の単振子の運動では、振子の最低点  $\alpha$  ( $\theta = 0^\circ$ )、最高点  $\beta$  ( $\theta = 180^\circ$ ) が運動の固定点である (図 2)。これに新たに支点の上下振動の摂動が加わるものとする。振子の支点に固定した座標系では、時間  $t$  を陽に含む力学系となる。系の状態を記述する変数は、位置角度  $\theta$ , 速度  $v = \dot{\theta}$ , 時間  $t$  の 3 変数で、 $(\theta, v, t)$  によって、位相空間が表わされる (図 3)。周期的加振が微小ならば、上下の固定点  $\alpha, \beta$ , および  $\alpha$  まわりの微小振幅振動は、生き残る。なぜ支点が振動する系を考えるかは、次節に述べる。

上の不安定固定点  $\beta$  に注目し、まず摂動がない場合 (支点振動がオフ) から話を始める。重りを変位させ、もし初期速度を精度よく与えたとすると、それは一回わりして反対側から固定点  $\beta$  に漸近するであろうが、点  $\beta$  に達するには無限の時間を要する。その運動を位相面で見ると (図 3 (a)), 軌道は固定点  $\theta = 180^\circ$  に漸近する安定多様体の曲線となる。固定点  $\theta = -180^\circ$  から無限にゆっくり出る軌道は不安定多様体と呼ばれる。 $\theta = -180^\circ$  と  $\theta = +180^\circ$  とは物理空間では同一の点であり、鞍点固定点である。

支点振動がオフのときは、振子のエネルギーは保存して、一定値をとるので、安定多様体および不安定多様体は滑らかにつながって、物理空間では固定点  $\beta$  から出て、そこに戻る。時間軸を加えると、位相面では一枚の滑らかな曲面を構成する (図 3 (a))。

支点振動をオンにすると、これらの安定・不安定多様体は、それぞれ変形して別々に存在する。図 3 (b) はこれがどのように起こるかを示している。振子のエネルギーはもはや一定ではなく変動しているので、軌道曲面も歪んでシワがよった形になる。不安定多様体は軌道の過去の歴史を表している。軌道の未来は、それが固定点  $\beta$  にどのように近づくかによる。それを理解するためには、2 つの多様体がシワシワとなり、さらに分離している状況を正確に把握しなければならない。肝心な点は、両者が交差するのは、エネルギーの入出力がちょうどバランスする場合である、という性質である。

外からの摂動が周期  $T$  の振動とすると、位相面  $(\theta, v)$  上でいわゆるポアンカレ写像  $P$  を考えることができる。ポアンカレ写像では、周期運動は固定点  $p$  となり、それに結合した安定多様体  $S$  および不安定多様体  $U$  は、ポアンカレ写像の不変曲線となる。周期的摂動がオンになると、不変曲線  $S$  と  $U$  はシワシワとなり、両者は分離する。そのときには、ポアンカレ断面上で  $S$  と  $U$  は単一の曲線とはならず、2 つの別々の曲線となる (図 4 (a))。両者が交差するのは、外からのエネルギー入出力がちょうどバランスする場合である、

### 4 制限三体問題とポアンカレの洞察

制限三体問題は、式 (34) で記述される 4 次の力学系であるが、Hamiltonian  $H$  が定数なので、運動は 3 次元の位相空間の軌道として表せる。第 3 の天体  $P$  の平面軌道上の位置



は、瞬間的近日点角  $g$  とそこからの  $P$  の位置角度  $l$  で与えられるが、いずれも時間の関数である。両者の線形結合で、変数  $y_1$  と  $y_2$  が定義する。第3の変数  $\xi$  は、瞬間的軌道長軸と離心率の組み合わせで定義され、位相空間  $(y_1, y_2, \xi)$  が構成される。軌道変数は  $y_1$  と  $y_2$  については、周期  $2\pi$  の周期関数である。断面は  $y_1 = 0$  にとって、その断面の極座標  $(\xi, y_2)$  によって ( $\xi$ : 動径、 $y_2$ : 角度) ポアンカレ写像が表現される。

すぐ下で述べるように、その写像には鞍点固定点があり、付随する不変曲線  $S$  と  $U$  があって、それらは横断的に交差する (intersect transversally)。それが修正論文 (1890)[10] の新たな結論であった。最初の論文 [11] では、不変曲線  $S$  と  $U$  とは滑らかに接続するとしていた。新たに発生した交点は、ホモクリニック交差 (homoclinic intersection) と呼ばれる。というのは、交点では外からのエネルギー入出力がちょうどバランスするからである、

解の概略は次のようなものである。定常回転する2つの主天体の質量は、式 (35) で  $\mu$  と  $1 - \mu$  とされ、 $\mu \ll 1$  と仮定して、解が  $\mu$  のべき級数の形で求められた。初項は  $\mu = 0$  として得られ、ポアンカレ断面は  $\xi = \text{const}$  の同心円となる。3次元位相空間での軌道は、トラス面上に拘束されて、面上をらせん的に回る軌道となる。[12]

次の展開の第1近似で、鞍点固定点と、不変曲線  $S$  と  $U$  が現れる。Poincaré [10] による作図例では図5のようなもので、鞍点固定点が2つ見られる。さらに高次項まで解を求めると、得られた級数解は漸近展開の形であって、収束しないことが判明したのである。

$\mu \neq 0$  とすると、小惑星  $P$  は、主たる  $S, J$  二天体の重力の影響を受けて運動する (図1)。  $P$  が自軌道を一周するとき、2度にわたって重力の大きな変動を経験する。この力学系の簡単なモデルとして、ポアンカレは支点が上下振動する単振子の力学系をとりあげ、数学的に詳しく解析して、収束する級数が得られないことを示した [12]。

最初の paper [11] では、摂動解は収束するとし、その場合は不変曲線  $S$  と  $U$  は滑らかに接続して単一の曲線となり、小惑星の軌道は安定と結論した。それが受賞論文 (1889) の内容であった。実際は、ある Referee の指摘に従って再検討した結果、上の事実が明らかになったのである [12]。  $S$  と  $U$  とは横断的に交差するという結論に変わった。

ホモクリニック交点を  $q_0$  として (図4 (a))、それに写像  $P$  を作用させると、点列の軌道が生成される。正の時系列軌道は、 $P(q_0) = q_1, P(q_1) = q_2, \dots$ ; 逆の時系列軌道は、 $P^{-1}(q_0) = q_{-1}, P^{-1}(q_{-1}) = q_{-2}, \dots$  と表せる。これらは、写像  $P$  による点  $q_0$  の像で、 $q_n$  は  $(\theta_n, v_n)$  で表わされる。点列  $q_n$  は、 $S$  上で、 $n$  が無限に大きくなると、固定点  $p$  に漸近する。ホモクリニック交点  $q_0$  は、 $S$  と  $U$  の両曲線に属する。横断的なホモクリニック交点が

一つあれば、無限に多くの横断的なホモクリニック交点を生ずる。

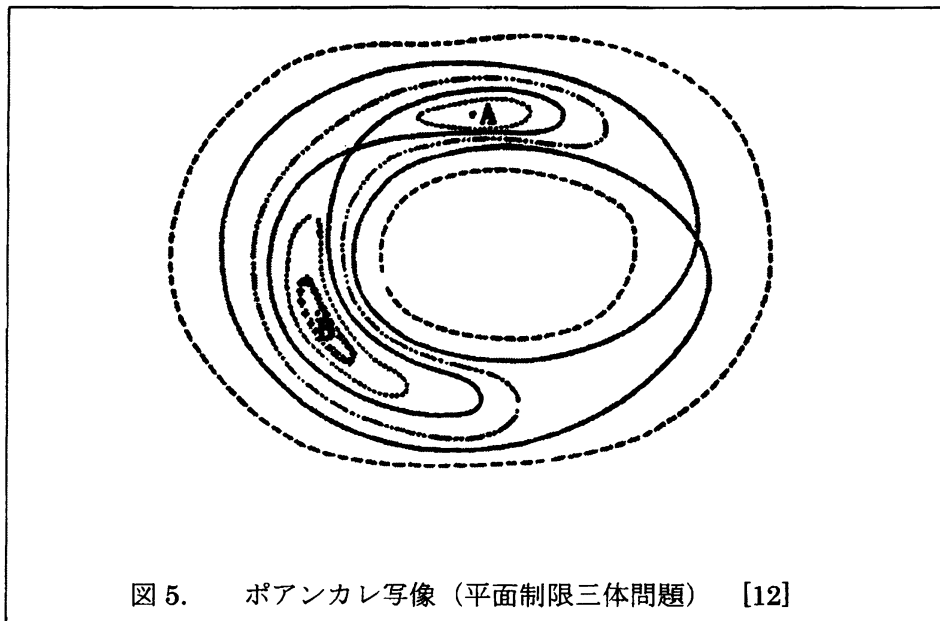
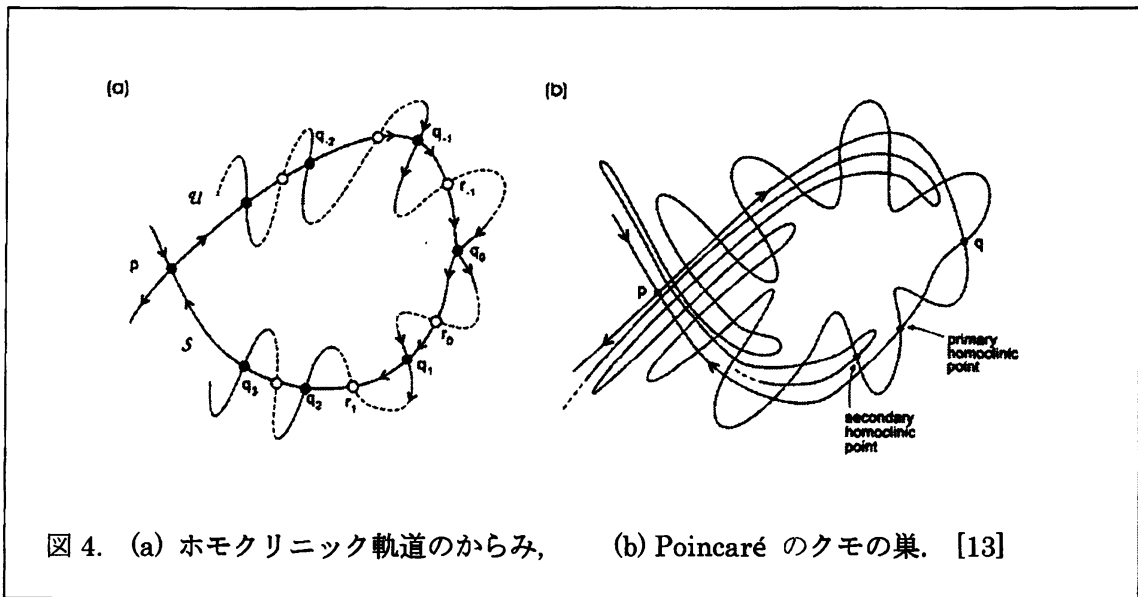
これを、Poincaré は *Doubly asymptotic* と呼んだ。後で、彼はこれを *Homoclinic* という語をあてるようになった。

## 5 Poincaré のクモの巣: カオスの描像

写像  $P$  および  $P^{-1}$  は方向性を有する (図4)。もし  $S$  が、点  $q_0$  で  $U$  を左から右に横切るとしたら、どの点  $q_n$  でも同様である。そのため、これら点  $q_n$  近傍の短い弧をつなげるには、各点  $q_n$  とその像  $q_{n+1}$  の間に少なくとももう一つの交点  $r_n$  がなければならない。これら二つの無限列  $q_n$  および  $r_n$  は、*Primary homoclinic orbits* と呼ばれ (図4(a))、単振子の場合、これらは不安定固定点から、一回転して同じ点に戻る運動に相当している。

この反復写像  $P$  のもとで、鞍点固定点  $p$  に近づくにつれ、 $S$  あるいは  $U$  の弧は近接してくる。前進写像では、曲線  $S$  の弧は、曲線  $U$  に沿って伸ばされる。逆進写像では  $S$  と  $U$  は交代するが同様である。

このため、交点がさらに生れて、*Secondary homoclinic orbits* が生ずる (図4 (b))。単振子の場合、これらは不安定固定点から、二回転して戻る運動に相当する。この考察をさらに続けると、*Tertiary, Quaternary* 等、次々とホモクリニック軌道を得る。



ホモクリニック軌道の Web (クモの巣):

かくして、無限個のホモクリニック軌道を得て、それぞれは無限個のホモクリニック点を有する。安定および不安定多様体  $S, U$  の単一のホモクリニック交点から出発して、無限個のホモクリニック点からなる軌道の、無限個の集合を得た。このような Poincaré の注意深い洞察から、図 4 (b) のようなクモの巣の描像を得るが、彼自身はそれを図にすることはしなかった。そのクモの巣の糸は、 $S$  および  $U$  に属する弧である。これらの糸は、位相空間の中で、将来の軌道が鞍点  $p$  の右に行くか、左に行くかを分ける臨界の境界線である。無限個の境界線が、有限の位相空間の中に詰め込まれている。ポアンカレは、このようなホモクリニック軌道のもつれについて次のように記述している：『安定および不安定多様体の図と、その無限個の交点を描こうとすると、ホモクリニック軌道の各々は二重漸近点からなるが、その一群の軌道の無限個の交点は、無限に細かい格子点を形成する。』かくして、次のように結論づけられよう：

初期条件から出発した軌道の将来を予言することは実際的に不可能である。

交点で交わった軌道の各々は再び自分自身と交わらないが、複雑に屈曲した相手の曲線とは無限回交差する。かくて無限に細かい格子点を形成し、無限に細かくもつれた網目が構成される。ホモクリニック点の無限の集合ともつれた臨界曲線は、ストーリーの一部にすぎない。さらにまだいくつもあるが、ポアンカレのホモクリニックの網目葛藤の格子は、現在カオスと呼ばれている現象の、最初の数学的表明であった。

### Part III: 上田アトラクター (1961)

上田アトラクターとは、2次非線形常微分方程式 (ODE) に、周期的外力項が加わった力学系のカオス・アトラクターのことである。上田 亮 (うへだよしすけ) 教授 [15] にその名前の由来がある。氏が 1961 年に京都大学の大学院工学研究科博士課程の院生であった時に、アナログ計算機で、その ODE を解く計算機実験に従事していた。その計算機は、林千尋教授の同じ研究グループの先輩安陪稔氏 (博士) が真空管を用いて作成したものであった。

計算機実験の中で、上田は従来の学術カテゴリからはずれた振る舞いの出力データを発見した。力学系の応答は、周期的ではなかった。その特異な時間発展を観測し、今日ではカオス系特有のものとして知られるある特徴を認識した。上田はその ODE の出力データをグラフ用紙に記録すると同時に、その日付 1961 年 11 月 27 日を記した。これ (図 6) が今日では、現実の物理系での最も古いカオスデータとみなされている。そのオリジナル出力は、ブルックヘブン国立研究所 (USA) に *BNL Photo. Div. No.1-380-90* として保管されている。

上田は電子回路で構成されたアナログ計算機上で、時間  $t$  を独立変数とする ODE を数值的に解いていた。これは電子計算機内に、与えられた初期値に対する微分方程式の解に相当する物理状態の時系列が実現されることを意味していた。彼が解いていた強制非線形 ODE は、従属変数  $x(t)$  に対する、次の微分方程式である：

$$\ddot{x} - \mu(1 - \gamma x^2)\dot{x} + x^3 = B \cos \nu t, \quad (1)$$

ここで、 $\dot{x} = dx/dt$ , および  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ , また  $B$  および  $\nu$  は強制項の振幅および振動数であり、また  $\mu$  および  $\gamma$  は力学系のパラメータである。

特別のカオス的な振る舞いを示した実験では、パラメータは  $\mu = 0.2$ ,  $\gamma = 8$ ,  $B = 0.35$ , であり、さらに振動数  $\nu$  は 1.010 から 1.020 まで 0.002 の間隔で値を変化させた。微分方程式 (1) は、周期的に強制された負抵抗の振動子のモデル方程式として導かれたもので、*Duffing* および *Van-der-Pol* 混合型の方程式と呼ばれた。というのは、復元項および減衰項が非線形であるからである。上田は、この不規則な応答に隠された複雑さの原因を解明しようと、この一見簡単な系の数学的構造の研究を続けた [16, 17]。

一般に、2階の微分方程式は、初期値  $x(0)$  および  $\dot{x}(0)$  を与えて解く。時刻  $t$  での物理的状態は、位相空間  $(x, \dot{x})$  の点  $(x(t), \dot{x}(t))$  によって表される。周期的強制振動系では、その解は連続時間で観察されるか、あるいは(周期毎の)離散的な時間での点列で観測される。最初の一時的な状態を過ぎると、散逸もしくは減衰の結果、点の列は漸近的に最終的な状態集合に近づく。それはアトラクターと呼ばれる。現在の場合は、アトラクターは無限に多くの周期点をその中に含んでいる。それら周期点はすべて Lyapunov の意味で不安定である。

さらに詳しく見ると、強制振動系のアトラクターの特徴は、離散的時間  $t = t_n = nT$  ( $n$ : 整数) でサンプリングすることで明瞭になる。ここで  $T = 2\pi/\nu$  は強制外力の周期である。周期  $T$  毎でのデータ抽出はストロボ写像と呼ばれる。実際、方程式 (1) の上のパラメータの場合、 $\nu$  の値が最後の値  $\nu = 1.020$  を除く他の5つ場合は、すべての抽出された状態点  $(x(t_n), \dot{x}(t_n))$  は十分長い時間の後、単一の点、すなわち固定点に収束した。固定点は、5つの異なる  $\nu$  の値 ( $= 1.010, 1.012, \dots, 1.018$ ) に対して異なっている。単一固定点は、系が外力の周期  $T$  に同期した周期振動を達成して、位相空間の代表点が周期  $T$  毎に同じ位置に回帰することを意味する。しかしながら、 $\nu = 1.020$  の場合には、この回帰は起らず、代表点は位相空間上で一見不規則に動き回り、図5の離散的な太い点で表される形を形成した。そのストロボ写像は、ギザギザの割れた卵の殻を思わせる不思議な図形を描いた [16, 17]。これは、いわゆる準周期振動の系について期待される、滑らかな楕円形の閉曲線とは全く異なるものであった。当時は幅広く出版されなかったが、これは新しい現象であり、またカオス現象の最初の記録であった。

その1年後、上田は3次非線形の他の *Duffing* 型の強制振動系を研究した：

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos t, \quad (2)$$

ここで、 $k$  および  $B$  は定数パラメータである。この系でも、パラメータ空間  $(k, B)$  のある領域で、解  $x(t)$  がカオス的振る舞いをすることを発見した。そのカオス・アトラクターは外国の学者の注目を受けることになり、 $k = 0.10$  および  $B = 12.0$  の場合に得られたカオス・アトラクターは、*Japanese Attractor* と呼ばれた (D. Ruelle 1980)。他方、 $k = 0.05$  および  $B = 7.5$  の場合は、*Ueda's Chaotic Attractor* と名づけられた (Thompson & Stewart 1986)。これらのアトラクターは1963年の初めの頃に発見されたが、それは有名な *Lorenz attractor* の論文 [19] と同じ年であった。

その当時、上田はこの現象を不規則遷移現象 *Randomly Transitional Phenomena* と呼んだが、現在「カオス Chaos」の名で広く呼ばれる現象の実体を、それは適切に捉えた名称である。1971年に、この新しい概念は日本語の論文 [18] で報告されたが、そこで上田は次のように所見を示した：「しかし、この現象について計算機を使用しての私の観察では、アトラクターを構成する最小集合の各々は、すべて不安定であり、振動系の小変動および外的変動の影響を受けて、位相空間の代表点は、不規則に最小集合の近傍をさまようかのようなのである。」このように記述したのは、日本の数学者が不規則振動についての上田の最終的結論を支持してくれることを期待してのことだったが、反応はいま一つであった。

さらに上田は、アトラクターがフラクタル構造を有することも示した [16, 17]。それはローレンツ [19] が自身のアトラクターに対してフラクタル性を示したのに対応している。ローレンツが強調したのは、ローレンツの方程式系の数値解の初期値に対する敏感性であった。上田が研究した方程式系のストロボ写像のアトラクターは不変閉集合で、それは次のものを含んでいる：(a) ある数の最短周期点もしくは固定点；(b) 無限個の周期点 (周期が次々と長くなる)；(c) ホモクリニック点；および (d) 高次の彷徨点。代表点はカオス・アトラクターの中を、そこに埋め込まれた無限個の不安定周期点に近づいたり、遠のいたりしながら、その中を一見不規則に動き回る。

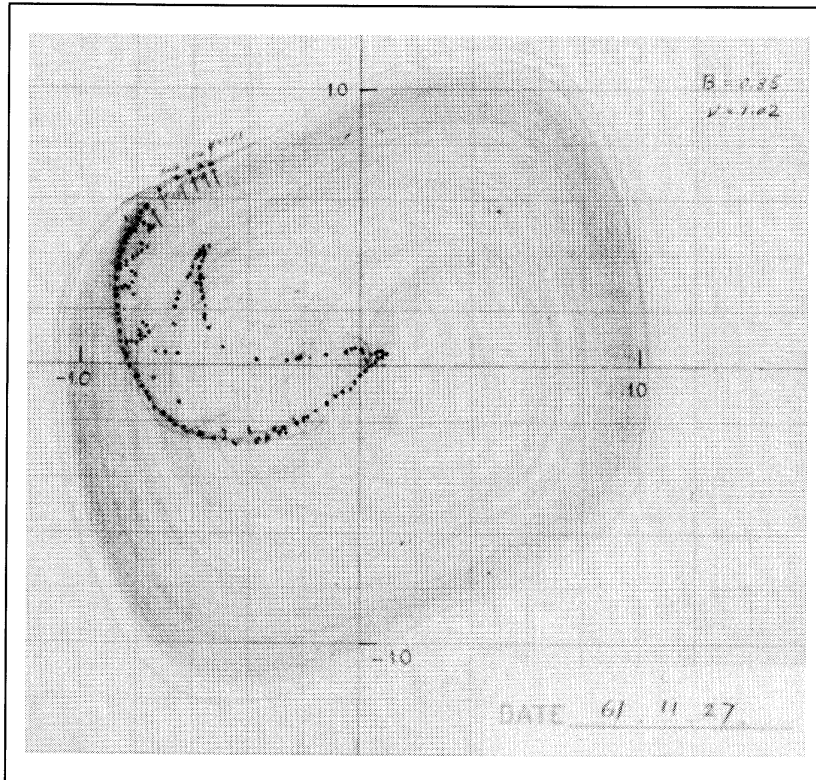
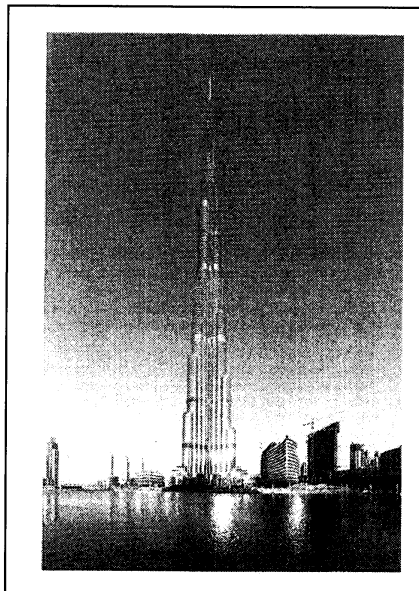


図6. 上田アトラクタ ——— 割れた卵. [15]



図A. ブルジ・カリファ塔  
(ドバイ、UAE). [20]

## Appendix

### A Euler-Lagrange equation

— Variation with respect to particle coordinate —

We consider the following infinitesimal transformation of the position of particle  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ , and associated volume change  $d^3\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{a}) &\rightarrow \mathbf{x}'(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t), \\ d^3\mathbf{x} &\rightarrow d^3\mathbf{x}' = (1 + \partial_k \xi^k) d^3\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1)$$

Then the variations of particle position and volume are  $\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  and  $\delta(d^3\mathbf{x}) = \partial_k \xi^k d^3\mathbf{x}$ . It is shown in [1, 2] that other variations of density  $\rho$ , velocity  $\mathbf{v}$  and entropy  $s$  are given by

$$\delta\rho = -\rho \partial_k \xi^k, \quad \delta\mathbf{v} = D_t \boldsymbol{\xi}, \quad \delta s = 0.$$

The action  $J$  is defined by (3) in the main text, where the Lagrangian density  $\Lambda$  is given by (4), which is written simply by  $\Lambda$  here. Variation of  $J$  resulting from the above variations is expressed as

$$\delta J = \int d^4x \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{v}} \delta \mathbf{v} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \Lambda}{\partial s} \delta s + \Lambda \partial_k \xi^k \right].$$

Substituting the expressions for  $\delta\rho$ ,  $\delta\mathbf{v}$ ,  $\delta s$  and  $\delta(d^3\mathbf{x})$ , and requiring  $\delta J$  vanishes for arbitrary variation  $\xi^k$ , we obtain the *Euler-Lagrange equation*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( v^i \frac{\partial \Lambda}{\partial v^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \Lambda - \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right) = 0.$$

(see [1, 2] for details). Using the expression  $\Lambda_{\text{main}}$  of (2) for  $\Lambda$ , we obtain the following momentum conservation:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \nabla p = 0.$$

This reduces to the Euler's equation of motion (25) by using the continuity equation (16) and a thermodynamic relation.

### B Generalized form of Clebsch solution

General form of Clebsch solution is defined by

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + s\nabla\psi + \sum_{k=1}^3 B_k \nabla a_k, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} v^2 + h + \partial_t\phi + s\partial_t\psi + \sum_{k=1}^3 B_k \partial_t a_k = 0, \quad (3)$$

$$D_t s = 0, \quad D_t \psi = 0, \quad (4)$$

$$D_t B_k = 0, \quad D_t a_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

The third term of the velocity (2) and the last equations (5) are new terms. With the velocity (2), we have  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  and  $\partial_t \mathbf{v}$  given by

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla s \times \nabla \psi + \nabla B_k \times \nabla a_k. \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla s) \nabla \psi - (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi) \nabla s \\ &\quad + (\mathbf{v} \cdot \nabla B_k) \nabla a_k - (\mathbf{v} \cdot \nabla a_k) \nabla B_k, \\ \partial_t \mathbf{v} &= \nabla \partial_t \phi + \partial_t s \nabla \psi + s \nabla \partial_t \psi \\ &\quad + \partial_t B_k \nabla a_k + B_k \nabla \partial_t a_k.\end{aligned}$$

where the symbol  $\sum_{k=1}^3$  is omitted for terms including both  $a_k$  and  $B_k$ . Adding the last two and using (4) and (5), we obtain

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= \nabla (\partial_t \phi + s \partial_t \psi + B_k \partial_t a_k) \\ &\quad + (D_t s) \nabla \psi + (D_t B_k) \nabla a_k.\end{aligned}$$

Last two terms vanish due to (4) and (5), and the first can be replaced by  $-\nabla(\frac{1}{2}v^2 + h)$  by (3). Thus, this equation reduces to the following Euler's equation:

$$\partial_t \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right).$$

Namely, the set of equations (2)~(5) is a solution of the Euler equation.

Recently, a new Eulerian variational problem was investigated by [20], with fixing both ends of a path line in the variational calculus. This was based on the idea that the Eulerian variation should coincide with that of the Lagrangian description. What they obtained was the velocity  $\mathbf{v}$  equivalent to the following:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \nabla \phi + s \nabla \psi + \sum_{k=1}^2 B_k \nabla a_k, \\ \frac{1}{2}v^2 + h + \partial_t \phi + s \partial_t \psi + \sum_{k=1}^2 B_k \partial_t a_k &= 0, \\ D_t s &= 0, \quad D_t \psi = 0, \\ D_t B_k &= 0, \quad D_t a_k = 0, \quad (k = 1, 2).\end{aligned}$$

Thus, the number of potentials  $B_k$  can be reduced from three to two. This was made possible because the density  $\rho(t, \mathbf{x})$  is connected with the derivatives  $\partial x^i / \partial a_j$  by the mass conservation condition,

$$d^3 \mathbf{x} = J d^3 \mathbf{a}, \quad J = \frac{\rho(0, \mathbf{x})}{\rho(t, \mathbf{x})} = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)},$$

since the Lagrange parameter  $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$  is defined by  $\mathbf{a}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

## References:

- [1] T. Kambe, A new solution of Euler's equation of motion with explicit expression of helicity, *Preprint* (2011).
- [2] J. Serrin, Mathematical principles of classical fluid mechanics, *Encyclopedia of Physics* (eds: Flügge and Truesdell), Springer, 1959, pp.125-263.
- [3] C.C. Lin, Hydrodynamics of helium II, *Liquid Helium*. Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi" XXI (NY: Academic Press), 1963, 93-146.
- [4] R.L. Seliger and G.B. Whitham, Variational principle in continuum mechanics, *Proc. Roy. Soc. A*, Vol.305, 1968, 1-25.
- [5] R. Salmon, Hamiltonian fluid mechanics, *Ann. Rev. Fluid Mech.* Vol.20, 1988, 225-256.
- [6] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, Vol.56, 1859, pp.1-10.
- [7] T. Kambe, Variational formulation of ideal fluid flows according to gauge principle, *Fluid Dyn. Res.* Vol.40, 2008, pp.399-426.
- [8] T. Kambe, *Geometrical Theory of Dynamical Systems and Fluid Flows* (Rev. ed), Chap.7, World Scientific, 2010.
- [9] L. Euler, Principes généraux du mouvement des fluides, *Memoires de l'Académie Royale des Sciences* (année 1755. Berlin 1757) v. Vol.11, 1757, pp.274-315.  
In this paper, Euler showed that his equation of motion, in fact, can describe *rotational* flows.
- [10] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta*, **13**, 1890, 1-270.
- [11] H. Poincaré, [Printed in 1889, but not published] Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique avec des notes par l' auteur - Memoire couronne du prix S. M. le Roi Oscar II.
- [12] J. Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*, American Math. Soc. and London Math. Soc., 1997.
- [13] F. Diacu and P. Holmes, *Celestial Encounters — The origin of chaos and stability*. Princeton Univ. Press, 1996.
- [14] Whittaker ET. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambr. Univ. Press. First edition published in 1904.
- [15] T. Kambe and S. Bishop, *Ueda Attractor*, *Preprint*, 2011.
- [16] Y. Ueda, Strange attractors and the origin of chaos, *The Road to Chaos*, Aerial Press, 1992.
- [17] 上田 亮, カオス現象論, コロナ社 (東京), 2008.
- [18] C. Hayashi, Y. Ueda and N. Akamatsu, On steady-state solutions of a nonlinear differential equation of the second order [Japanese], *Res. Rep. RIMS*, Kyoto Univ, No.113 (1971), 1-27.
- [19] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963), 130-141.
- [20] H. Fukagawa and Y. Fujitani, Clebsch potentials in the variational principle for a perfect fluid, *Progress of Theoretical Physics*, Vol.124, 2010, 517-531.
- 
- [21] Vortices and tall buildings, *Physics Today*, Sep. 2010. [翻訳: '渦と高層ビル', パリテイ, 2011年8月号.]; Engineering the World's Tallest Building, Burj Dubai, [http://www.som.com/resources/content/5/0/4/3/9/0/1/8/documents/SOM\\_EngineeringtheWorldsTallest.pdf](http://www.som.com/resources/content/5/0/4/3/9/0/1/8/documents/SOM_EngineeringtheWorldsTallest.pdf)