数理解析研究所講究録
第 1776 巻 2012 年 66-74

主束上の体積保存微分同相写像群の Arnold-Euler 方程式

早稲田大学理工学部　郡　敏昭　(Tosiaki Kori)
School of Sciences and Technology,
Waseda Uiversity

1　Arnold による Euler 方程式

V. Arnold: Sur la geometrie differentielle des groups de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaites, Ann.Inst.Fourier 16.1, (1965) の冒頭部分は次のような書き出しで始まる.　「オイラーが剛体の運動方程式を論文にした 1765 年からの２00 年周年記念に, この方程式の現代数学的な記述をするのも良いだろう.」「オイラーによる剛体の運動は R^3 の回転群上の左不変距離の測地線であり、オイラーの定理は本質的に　このことしか使ってないので高次元の剛体や完全流体など他の群に対してもオイラーの方程式を得ることができる.」　オイラー方程式を現代的な形で記述し、Maxwell 方程式や他の方程式も同じ枠組みから導くという試みには、Symplctic 多様体や Poisson 多様体を目的に応じた形で定義して、その上の Hamilton 運動方程式を書くことにより導くという方法もあり、Marsden, Ratiu etc. により精力的に展開された. Arnold のこの論文は有名であるにもかかわらず、直接それに続く研究が多くあったとは思えない.　1 節では Arnold によるオイラー方程式を（1965 年以後の現代数学による記述も用いて）述べる. まず　剛体のオイラー方程式を　そのかたちのまま一般の（有限次元）リー群に拡張し、次に　おなじ形式により　流体のオイラー方程式を導くことができることを示す.

1.1　Lie 群上の Arnold-Euler 方程式

G を Lie Group ,　　T_gG を元 $g\in G$ での接空間 , $Lie\,G=T_eG$ を単位元 e での接空間、すなわち G の Lie 代数とする.
例.
1 点を固定した剛体の運動の状態空間は 3 次元回転群 $G=SO(3)$ で
$Lie\,G=so(3)$ は剛体の蓋然的回転の角速度ベクトル全体で,　その Lie 括弧式は 外積 で与えられる.

$g\in G$ の G への左からの積を L_g; $G\ni h\longrightarrow gh\in G$ とする. 同様に R_g を右作用とする.
L_g の $h\in G$ での微分写像を $(L_g)_{*h}:T_hG\longrightarrow T_{gh}G$　, とし,　また
$L_{g*}\equiv(L_g)_{*e}:\ Lie\,G=T_eG\longrightarrow T_gG$ と書く.
T_g^*G を $g\in G$ での余接空間として、$\alpha\in T_g^*G$ の $\xi\in T_gG$ での値を

$<\alpha,\xi>$ と書く.
L_{g*} の双対作用を $L_g^*: T_g^*G \longrightarrow T_e^*G = (Lie\,G)^*$ とする.

$$< L_g^*\alpha, \xi > = < \alpha, L_{g*}\xi >, \quad \alpha \in T_g^*G,\ \xi \in Lie\,G$$

- 右作用 R_g, R_{g*}, R_g^* も同様に定義する.

adjoint 作用は順に次のように定義する：

$$\begin{aligned} Ad_g &= R_{g^{-1}*}L_{g*} : Lie\,G \xrightarrow{L_{g*}} T_gG \xrightarrow{R_{g^{-1}*}} Lie\,G \\ Ad_g^* &= L_g^*R_{g^{-1}}^* : (Lie\,G)^* \longrightarrow (Lie\,G)^*. \\ & \quad < Ad_g^*\xi, \eta > = < \xi, Ad_g\eta > \end{aligned}$$

$\xi \in Lie\,G$ に対して

$$ad\,\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{\exp t\xi} : Lie\,G \longrightarrow Lie\,G$$

とすると

$$ad\,\xi\,(\eta) = [\xi, \eta]$$

が成り立つ.
$\xi \in Lie\,G$ の $(Lie\,G)^*$ への coadjoint 作用；

$$ad^*\xi : (Lie\,G)^* \longrightarrow (Lie\,G)^*,$$

は

$$< ad^*\xi\,(\alpha), \eta > = < \alpha, ad\,\xi\,(\eta) >$$

で定義される.

G 上の左不変距離とは riemannian metric $(\ ,\ ) = \{(\ ,\ )_h\,;\, h \in G\}$, で, L_g-不変 なもの;

$$(L_{g*}\xi, L_{g*}\eta)_{gh} = (\xi, \eta)_h\,, \forall\,\xi, \eta \in T_hG,$$

このとき G 上のベクトル場の 各点での内積 $(\ ,\ )_g$ が, $Lie\,G$ 上の正定値対称 2 次形式 $(\ ,\ ) = (\ ,\ )_e$ で 定まる.

リー群に不随した 次の概念を定義する：

1. $A : Lie\,G \longrightarrow (Lie\,G)^*$: $< A\xi, \eta > = (\xi, \eta)$ で定まる正定値対称作用素.

$$A_g : T_gG \longrightarrow T_g^*G; \quad A_g\xi = (L_{g^{-1}})^*\,A\,L_{g^{-1}*}\xi$$

(inertia operator)

2. 双線形作用素

$$B: Lie\,G \times Lie\,G \longrightarrow Lie\,G$$

を

$$([a,b],c) = (B(c,a),b), \quad \forall b \in Lie\,G.$$

で定義する.

inertia operator と coadjoint 作用により

$$B(c,a) = A^{-1}\,(\,ad^*\,a\,)(A\,c)\,, \tag{1}$$

と表されることがわかる.

c を止めて $(B(c,a),b)$ は歪対称:

$$(B(c,a),b) + (B(c,b),a) = 0$$

3. V. Arnold による、剛体のオイラー方程式とリー群との対応原理は、
「最小作用の原理によると、1 点を固定した剛体の（外力がないときの）運動は 左不変距離が与えられたリー群 $G = SO(3)$ の測地線である.」
となる.
そこで G 上の**各々の測地線** $g(t)$ に対して次の量を定義する：

(a)

$$M = A_g\dot{g}: \quad g \in G \text{ での運動量.}$$

(b)

$$T_gG \ni \dot{g} \implies \omega_c = L_{g^{-1}*}\,\dot{g} \in Lie\,G \quad \text{: 剛体角速度,}$$

(c)

$$Lie\,G \ni \omega_c \implies M_c = A\omega_c = (L_g)^*\,A_g\,\dot{g} \in (Lie\,G)^* \quad \text{: 剛体角運動量.}$$

(d) 運動エネルギー

$$E = \frac{1}{2} < M_c, \omega_c >= \frac{1}{2} < M, \dot{g} > \tag{2}$$

剛体の回転運動において、3 次元の回転 h の左作用は、速度 $\dot{g}$ で運動している回転 g の後に回転 h を行うことであり、それは剛体に沿って空間全体を回転することになる. このとき回転速度ベクトルの長さは変わらないから運動エネルギーも変わらない. このゆえに E は剛体の回転運動を表す 3 次元回転群 G 上の左不変リーマン距離 $(\cdot,\cdot)_g$ を定める:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{g},\dot{g})_g = \frac{1}{2}(\omega_c,\omega_c)$$

$SO(3)$ 以外のリー群に対しても この左不変距離を用いる.

Arnold-Euler の運動方程式は次のように述べられる：

定理 1

$$\frac{d}{dt}M_c = ad^*\omega_c(M_c) \tag{3}$$

$M_c = A\omega_c$ より (1) を使って書き直すと

定理 2

$$\frac{d}{dt}\omega_c = B(\omega_c, \omega_c) \tag{4}$$

定理 2 の証明.

測地線の速度ベクトルの変化を調べるのだが、それは T_gG の元だから g とともに動いてしまう. g により変化しない定まった空間 $T_eG = Lie\,G$ で記述するため 特別な局所座標系を選ぶ. すなわち、$e \in G$ での正規座標系を $(U, \varphi, (q^1, \cdots, q^m))$, とする. $g \in U \subset G$ は $g = \exp_e(\mathbf{q}) = \exp_e(\sum_{i=1}^m q^i\partial_i)$, と表される. ここに $(\partial_1, \cdots, \partial_m)$ は $T_eG = Lie\,G$ の基底. $\varphi(g) = (q^1, \cdots, q^m) \in \mathrm{R}^m \simeq Lie\,G$:

$$\exp_e : T_eG \supset B_\delta(\mathbf{0}) \ni \mathbf{q} \xrightarrow{\simeq} g = \exp_e \mathbf{q} \in U \subset G$$

その微分写像は

$$(d\exp_e)_{\mathbf{q}} : T_{\mathbf{q}}T_eG = T_eG \longrightarrow T_gG$$

で、これは $L_{\exp_e \mathbf{q}\,*}$ に等しい。

補題 3

$$L_{\exp_e \mathbf{q}\,*} = \frac{1 - \exp(-ad\,\mathbf{q})}{ad\,\mathbf{q}} \tag{5}$$

すなわち, $\forall\xi \in Lie\,G$ に対して

$$L_{\exp_e \mathbf{q}\,*}\xi = \xi + \frac{1}{2}[\mathbf{q}, \xi] + O(\mathbf{q}^2).$$

これは $\exp_e \mathbf{q} \cdot \exp t\xi = \exp_e\left(\mathbf{q} + t(\xi + \frac{1}{2}[\mathbf{q}, \xi] + O(\mathbf{q}^2)) + O(t^2)\right)$ より従う.

測地線 $g(t)$ の座標を $t\mathbf{q}$; $g(t) = \exp_e t\mathbf{q}$, として $\omega_c = L_{g(t)^{-1}*}\dot{g}$ の座標は $L_{\exp_e(-t\mathbf{q})*}\dot{\mathbf{q}}$, したがって Lemma より

$$\omega_c = \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] + O(\mathbf{q}^2)\,\dot{\mathbf{q}} \tag{6}$$

この式より Energy $E = \frac{1}{2}(\omega_c, \omega_c)$ は

$$\begin{aligned} 2E &= (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - (\dot{\mathbf{q}}, [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]) + O(\mathbf{q}^2)\,\dot{\mathbf{q}} \\ &= (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - (B(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}}) + O(\mathbf{q}^2)\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

したがって

$$\mathbf{p} \overset{def}{=} \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}B(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}[\mathbf{q}\,\dot{\mathbf{q}}] + O(\mathbf{q}^2) = \omega_c - \frac{1}{2}B(\omega_c, \mathbf{q}) + O(\mathbf{q}^2)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= \dot{\omega}_c - \frac{1}{2}B(\omega_c, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}B(\dot{\omega}_c, \mathbf{q}) + O(\mathbf{q}) = \dot{\omega}_c - \frac{1}{2}B(\omega_c, \dot{\mathbf{q}}) + O(\mathbf{q}) \\ &= \dot{\omega}_c - \frac{1}{2}B(\omega_c, \omega_c) + O(\mathbf{q})\end{aligned}$$

他方

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\left(B(\dot{\mathbf{q}},\, \mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}}\right) + O(|\mathbf{q}|^2)\right) = \frac{1}{2}B(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + O(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2}B(\omega_c, \omega_c) + O(\mathbf{q})\end{aligned}$$

以上より Euler-Lagrange の方程式　$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}}$　は

$$\dot{\omega}_c - \frac{1}{2}B(\omega_c, \omega_c) + O(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}B(\omega_c, \omega_c) + O(\mathbf{q}),$$

ゆえに

$$\dot{\omega}_c = B(\omega_c, \omega_c) \tag{7}$$

1.2 完全流体に対する $B(\,,\,)$

D を３次元リーマン多様体 $(M, (\,,\,)_M)$ の領域として、$SDiff(D)$ で D 上の体積を保存する微分同相写像のつくる無限次元リー群とする。

$SDiff(D)$ のリー環は

$$SVect(D) = \{\mathbf{v} : D \text{ 上のベクトル場}, div\,\mathbf{v} = 0,\ (\mathbf{v}, \mathbf{n})_M = 0,\ \partial D \text{ 上で}\}.$$

このときリー括弧は poisson bracket of vector filds

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

で与えられる。

V. Arnold による、完全流体のオイラー方程式とリー群との対応原理は次のようになる：

「領域 D を満たしている完全流体では、変換 $g(t) : D \longrightarrow D$ により流体の各粒子の時刻 0 での位置が時刻 t での位置に移され、体積は保存される．したがって $g(t) \in SDiff(D)$．最小作用の原理より $g(t)$ は運動エネルギー

$$\frac{1}{2}\int_D (\mathbf{v}\,, \mathbf{v})_M\, dvol$$

の極値を与えるが、$g(t+\Delta t)=\exp(\mathbf{v}\Delta t)\,g(t)$ より $\mathbf{v}(g(t))=R_{g^{-1}(t)*}\dot{g}(t)$ ゆえ、ベクトル場 $\mathbf{v}$ は右不変となる. すなわち $g(t)$ は $SDiff(D)$ で上の右不変距離

$$(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2)=\int_D(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2)_M\,dvol$$

の測地線となる.」

次のように考えると理解しやすい：

「$h\in SDiff(D)$ の右作用は、領域 D の速度 $\dot{g}$ で変化する (体積を変えない) 変換 g の前に、まず始めに変換 h を行うことである. それは流体の粒子の運動の初期位置を選びなおすことである. このような運動の初期位置の変更によって流体粒子の各時点での速度は変わらないから、運動エネルギーは $SDiff(D)$ の作用で右不変となる.」

前節の結果を、左作用から右作用に書き換えて、この測地線が満たす方程式を得る：

$$\dot{\mathbf{v}}=-B(\mathbf{v},\mathbf{v}),\quad \mathbf{v}\in SVect(D). \tag{8}$$

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in SVect(D)$ に対しては

$$([\mathbf{u},\mathbf{v}],\mathbf{w})=(rot\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}),\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v},rot\,\mathbf{w})=((rot\,\mathbf{w})\times\mathbf{u},\mathbf{v})$$

だから, $\exists p$;

$$B(\mathbf{w},\mathbf{u})=(rot\,\mathbf{w})\times\mathbf{u}+grad\,p \tag{9}$$

となる。これより Eulrer-Arnold 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}=\mathbf{v}\times rot\,\mathbf{v}-grad\,p \tag{10}$$

2 主束上の体積保存微分同相写像群の Arnold-Euler 方程式

G: a compact Lie group with a G-invariant positive scalar product.
(M,g) a riemannian manifold.
$\pi:P\longrightarrow M$: a G-principal bundle with a connection ω とする.

$P\ni\forall p$ において M の metric g と connection による直交分解が定まる.

$$T_pP\ =H_pP\oplus V_pP; \tag{11}$$

$$H_pP\ \xrightarrow{\simeq}T_{\pi p}M\,,\quad V_pP\xrightarrow{\simeq}Lie\,G. \tag{12}$$

次の関係が成り立っている：

1. $a\in Lie\,G$, $p\in P$ に対して $t\longrightarrow p\exp ta$ は P の ($\pi^{-1}(\pi p)$ 内にある) 測地線. $\exp_p a=p\exp a$.

2. $x(s)$ が M の測地線なら 水平持ち上げは P の測地線.

$Vect(P) = Vect(M) \oplus C^\infty(M, Lie\,G)$ により
$X \in Vect(P)$ を

$$X = \mathbf{v}^h + \xi,$$

と直交分解する. ここに $\mathbf{v}^h$ は $\mathbf{v} \in Vect(M)$ の水平持ち上げで, $\xi \in C^\infty(M, Lie\,G)$.

水平持ち上げ $\mathbf{v}^h$ は G-不変だから

$$[a, \mathbf{v}^h] = 0, \quad \forall a \in \mathcal{E}(M, Lie\,G). \tag{13}$$

が成り立つ.

接続 ω の曲率を $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ とすると Ω は P 上の $Lie\,G$ 値 2-form で水平、すなわち $\forall a \in C^\infty(M, Lie\,G)$ に対し $\Omega(a, \cdot) = 0$ 、である. また定義より

$$[\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]^h - \Omega(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h). \tag{14}$$

- [Jackiw のいう非 abel 流体への試み] として
P 上の体積保存微分同相群 $SDiff(P)$ にアーノルドの完全流体の形式を適用したい.

まず、 P 上の微分同相が体積を保存するという条件について考えよう. たとえば div が 0 のように無限小微分同相の条件を書くのはむつかしいが、 測地線による無限小微分同相 の場合には、知られた結果からつぎのように書けることがわかる.

$\exp_p : T_pP \longrightarrow P$ を $p \in P$ から出る測地線; $T_pP \ni a \longrightarrow \exp_p a \in P$, とする. その微分写像

$$J(p, a) : d(\exp_p)_a : T_a(T_pP) = T_pP \longrightarrow T_pP$$

は分解 (11) により $T_mM \oplus Lie\,G$ から自分自身への写像となる. ここに $m = \pi p \in M$.

次のことが知られている :

- $J(p, a)$ は T_mM を T_mM に、$Lie\,G$ を $Lie\,G$ に写し、

$$J(p,a)|_{T_mM} = \frac{1 - \exp[-\tau(\Omega_p \cdot a)/2]}{\tau(\Omega_p \cdot a)/2},$$

$$J(p,a)|_{Lie\,G} = \frac{1 - \exp[-ad\,a]}{ad\,a}$$

$\tau(\Omega_p \cdot a) \in End(T_mM)$ は, $\mathbf{e}_k$ を M の接ベクトルの正規直交枠として

$$\tau(\Omega_p \cdot a)\,X = 2\sum_k (\Omega(X^h, \mathbf{e}_k^h)_{Lie\,G}\,\mathbf{e}_k$$

で与えられる.

この結果より、測地線による微分同相変換で微少体積要素 dp は, $Lie\,G$ 方向へは

$$d(\exp a) = \det_{Lie\,G}\left(\frac{1 - \exp[-ad\,a]}{ad\,a}\right) da$$

となり、$\det_{Lie\,G}\left(\frac{1-\exp[-ad\,a]}{ad\,a}\right)=1$ のときに無限小体積は保存される.

水平方向へは, $X \in End(T_mM)$ に対して $j(X)=\det\left(\frac{\sinh X/2}{X/2}\right)$ と書くとき、

$$d(\exp_m \mathbf{v}^h) = j(\tau(\Omega_p \cdot a))\, d\mathbf{v}^h$$

で与えられるので $\det\left(\frac{\sinh \tau(\Omega_p \cdot a)/2}{\tau(\Omega_p \cdot a)/2}\right)=1$ のとき無限小体積は保存される.

これらの条件はわかりにくいが（もし正しければ）示唆的な内容を含んでいるだろう.

さて、Arnold による Euler 方程式を書こう：
$B(\,,\,)$ を求めればよい. すなわち
$X, Y \in SVect(P)$ に対する $B(X,Y) \in Vect(P)$:

$$(\,B(Z,X),\,Y\,) = (\,[X,Y]\,,\,Z\,),$$

を求める.
$B(X,Y) = B^h(X,Y) + b(X,Y) \in Vect(M) \oplus \mathcal{E}(M,\,Lie\,G)$ と分解して計算する.

以下の $B_M(\mathbf{u},\mathbf{v})$ は (1) の M 上のベクトル場で (9) の形で与えられたことを思い出しておく.

$(\mathbf{v}^h,\,a)=0$ と (13) の二つの式を用いて次がわかる：

1. $$B^h(\mathbf{u}^h,\mathbf{v}^h) = B_M(\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad b(\mathbf{u}^h,\mathbf{v}^h)=0$$

2. $$B(\mathbf{v}^h,\eta)=0,$$

3. $$B^h(\xi,\eta)=0, \quad B(\xi,\eta)=b(\xi,\eta).$$

4. $$b(\xi,\mathbf{w}^h)=0,$$

5. $$(\,B^h(\xi,\mathbf{v}^h),\,\mathbf{w}^h\,) = (\Omega(\mathbf{v}^h,\mathbf{w}^h)\,,\,\xi\,).$$

アーノルドの定理 2 より次の命題を得る：

命題 4 $X = \mathbf{x}^h + \xi \in SVect(P)$ に対して

$$\dot{\mathbf{x}}^h = B^h(\mathbf{x}^h,\mathbf{x}^h) = B_M(\mathbf{x},\mathbf{x}), \tag{15}$$

$$\dot{\xi} = b(\xi,\xi) + (\,\Omega(\mathbf{v}^h,\,\cdot\,),\,\xi\,), \tag{16}$$

最初の式は (9) の繰り返しである.

こうして G -主束の上の体積保存微分同相写像群の測地線が満たす Arnold-Euler の方程式が得られた. これが Jackiw の云う 非abel 流体の方程式かどうかは 見当のしようもないが、この流体方程式の 渦度や Helicity に相当するものを導いて、そこに Chern-Simons 形式が関わってくるなら、それは求めるものと呼んでいいだろう. $SDiff(D)$ の垂直方向の部分群のリー環は、条件 $\det_{Lie\,G}\left(\frac{1-\exp[-ad\,a]}{ad\,a}\right)=1$ を満たす $a\in C^\infty(M,\,Lie\,G)$ を含んでおり、これは主束 P の無限小ゲージ変換群 $Lie\,\mathcal{G}$ である. Chern-Simons 形式は、それが作用する接続の空間上に定義されるので、それも考慮に入れた universal な主束

$$P\times_G\mathcal{A}\longrightarrow M\times_G\mathcal{A}/\mathcal{G}$$

を考える必要があると思う.