数理解析研究所講究録
第 1777 巻 2012 年 59-61

Genus One Stories in Low Dimensional Topology

森田茂之

1. 講演では，まず Gauss 曲面論について簡単に復習した後，種数 $g \geq 1$ の向き付けられた閉曲面 Σ_g について，カップ積

$$\left(\wedge^2 H^1(\Sigma_g,\mathbb{Z})\right)^{\mathrm{Sp}} \to H^2(\Sigma_g,\mathbb{Z})$$

はシンプレクティック類 ω_0 を基本コホモロジー類の $2g$ 倍に対応させること，したがって標語的に

$$\omega_0 = \sqrt{H^2(\Sigma_g)}$$

と表せることを述べた．

2. 写像類群 $\mathcal{M}_g$ と，トレリ群と呼ばれるその重要な部分群 $\mathcal{I}_g$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_g &= \pi_0\,\mathrm{Diff}^+\Sigma_g\\ \mathcal{I}_g &= \mathrm{Ker}\left(\mathcal{M}_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})\right)\end{aligned}$$

により定義される．

3. $\mathrm{Diff}^+\Sigma_g$ のホモトピー型について Smale $(g = 0)$ と Earle-Eells $(g = 1)$ の定理を述べ，$g = 1$ の場合が，$g = 0$ と $g \geq 2$ の場合のちょうど架け橋的な様相を示すことを注意した．1985 年ころ $H^*(\mathrm{BDiff}^+T^2)$ を決定する仕事をしたが，その過程で $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ の $\mathrm{Sym}^m\left(H^1(\Sigma_g,\mathbb{Z}/p)\right)$ および $\mathrm{Sym}^m\left(H^1(\Sigma_g,\mathbb{Q})\right)$ 係数の twisted cohomology を計算した．ここで Sym^m は m 次 symmetric power を表す．後者の係数を以後 S^mH と略記すると，結果はつぎの形をしている（ここでは $r(m)$ の具体的値は省略する）．

$$\dim H^1(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z};S^mH) = \begin{cases}0 & (m\text{: odd})\\ 1+2r(m) & (m\text{: even})\end{cases}$$

その後この仕事と古典的な Eichler-Shimura の有名な仕事との間に密接な関連があることが Furusawa-Tezuka-Yagita の仕事の中で明らかにされた．

それから 25 年ほどが経過したが，最近 Eichler-Shimura 理論がふたたび写像類群に関連する二つの研究に登場した．一つは Conan-Kassabov-Vogtmann の仕事，もう一つは Hain-Matsumoto の仕事である．

より具体的には，$H = H_1(\Sigma_g;\mathbb{Q})$ の生成する自由リー代数 $\mathcal{L}_H$ のシンプレクティック微分全体のなすリー代数を $\mathfrak{h}_{g,1}$ とする．このリー代数は写像類群の Johnson 準同型の理論において導入され，基本的な役割を果たして来たものである．それ以外にも low dimensional topology 全般および数論において活躍する重要なリー代数である．さらに Kontsevich のグラフホモロジー理論の登場により，自由群の自己同型群のコホモロジー理論においても基本的な役割を果たすことが示され，その具体的な実現が筆者の trace maps の理論を使うことにより推進されて来た．Conant-Kassabov-Vogtmann の仕事は $H_1(\mathfrak{h}^+_{g,1})$ に関する新しい展開を与えるものであり，Hain-Matsumoto の仕事は $g = 1$ の場合，すなわち $\mathfrak{h}_{1,1}$ を舞台とする universal elliptic motives の理論である．

これらの二つの理論の間には，今のところ直接の関係が見えないように思われる．しかし筆者は，これらの二つの理論はある未知の枠組みの異なる二つの側面ではないか，と予想している．この予想の実現・検証に向けて，現在逆井卓也，鈴木正明両氏と共同研究を推進している．

4. リーマン面のモジュライ空間 $\mathbf{M}_g$ およびグラフのモジュライ空間 $\mathbf{G}_n$ は，タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ および Culler-Vogtmann のアウター空間の写像類群および自由群の外部自己同型群の商空間として，

$$\mathbf{M}_g = \mathcal{T}_g/\mathcal{M}_g, \quad \mathbf{G}_n = \mathrm{OuterSpace}_n/\mathrm{Out}\, F_n$$

と定義される．

5. 写像類群を含む三つの群

(i) $\mathrm{Out}\, F_n$

(ii) $1 \to \hat{\mathcal{M}}_g \to \pi_1^{\mathrm{alg}}\, \mathbf{M}_{g,1}/\mathbf{Q} \to G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to 1$ arithmetic mapping class group

(iii) $\mathcal{H}_{g,1}$ = homology cylinder / homology cobordism

この内，(i) は幾何学的群論（Culler-Vogtmann, Conant-Vogtmann,...), (ii) は数論（Grothendieck, Ihara, Deligne, Drinfeld, Oda, Nakamura, Matsumoto,...）, (iii) は low dimensional topology (Habiro, Gussarov, Levine, Garoufalidis-Levine, Sakasai, Goda-Sakasai, Cha-Friedl-Kim, Massuyeau...) において研究されて来た重要な群である．群 $\mathcal{H}_{g,1}$ は smooth category と topological category の両方で定義することができるので，それらを区別するために $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}}$, $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}}$ と記す．

また

$$\mathcal{H}_{0,1} = \Theta_{\mathbf{Z}}^3 = \{\text{homology 3-sphere}\} / \text{homology cobordism}$$

は 3 次元多様体論および幾何的トポロジーにおいて極めて重要かつその構造が未解明で神秘的な群である．Rohlin 不変量が誘導する古典的完全系列

$$0 \to \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Rohlin}) \to \Theta_{\mathbf{Z}}^3 \xrightarrow{\mathrm{Rohlin}} \mathbf{Z}/2 \to 0$$

が split するかどうか，という問題は T. Matumoto および Galewsky-Stern の定理により，位相多様体の三角形分割可能性と直接に関連し，いまでは古典となった微分トポロジーの最重要未解決問題の一つである．一方，Furuta (やや遅れて独立に Fintushel-Stern) により群 $\Theta_{\mathbf{Z}}^3$ は無限ランクであることが証明された．

二つの神秘的な群 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) = \pi_1^{\mathrm{alg}}\, \mathbf{M}_{0,3}/\mathbf{Q}$ および $\Theta_{\mathbf{Z}}^3$ はいずれも種数 0 において現れるが，これを種数 1 の場合を介して種数 2 以上の世界とつなぎ，構造の解明（ただし，前者はあくまでトポロジーの観点からの）を目指したいというのが戦略である．

6. 与えられた群 G の研究として，つぎのような一般的な方法を考える．まず G から良く知られた，いわば標準的な準同型 $r : G \to \mathrm{Aut}$ (known object) が与えられていることを想定する．つぎに $\mathrm{Ker}\, r$ のあるアーベル商 $\mathrm{Ker}\, r \to A$ が構成されているとする．このとき，誘導される準同型 $H^*(A)^{\mathrm{Im}\, r} \to H^*(G)$, あるいは crossed homomorphism としての $H^1(G, A)$ の元としての拡張の可能性，そのカップ積 $H^p(G, \wedge^p A)$ 等を考え，G のコホモロジーの構造に迫るというものである．典型的例は写像類群の場合であり，$r : \mathcal{M}_g \to \mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ は古典的準同型，$\mathrm{Ker}\, r = \mathcal{I}_g \to \wedge^3 H/H$ は Johnson 準同型となる．これが $H^1(\mathcal{M}_g; \wedge^3 H/H) \cong \mathbf{Q}$ の元として一意的にリフトされ（筆者），それが誘導する準同型 $H^*(\wedge^3 H/H)^{\mathrm{Sp}} \to H^*(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q})$ の像が $\mathbf{M}_g$ の tautological algebra $\mathcal{R}^*(\mathbf{M}_g)$

に一致するというのが Kawazumi-M. の結果である．また自由群の自己同型群については T. Satoh の一連の仕事がある．

算術的写像類群の場合には，cyclotomic character $\chi_{\mathrm{cyc}} : G_{\mathbb{Q}} \to \hat{\mathbb{Z}}^*$ と Soulé による $\mathrm{Ker}\,\chi_{\mathrm{cyc}}$ から $\mathbb{Z}_p$ への沢山の準同型，あるいは crossed homomorphisms $\sigma_p(2k+1) \in H^1(G_p;\mathbb{Z}_p(2k+1)) \cong \mathbb{Z}_p$ としての実現 (Soulé's p-adic regulators) が知られている．

$\mathcal{H}_{g,1}$ の場合は筆者が trace maps を使って構成した $H^1\left(\mathcal{H}_{g,1};S^{2k+1}H\right)$ $(k=1,2,\ldots)$ の元（trace maps の群バージョン）がある．これを用いて群 $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}}$, $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}}$ のコホモロジーの元が

$$H^*\left(\wedge^3 H/H \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} S^{2k+1}H\right)^{\mathrm{Sp}} \longrightarrow H^*\left(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}},\mathbb{Q}\right),\quad H^*\left(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}}),\mathbb{Q}\right)$$

により大量に定義される．

ここで一つの大きな問題は $H^1\left(\mathcal{H}_{g,1};S^{2k+1}H\right) \cong \mathbb{Q}$ $(k=1,2,\ldots)$ か？，という問いと $H^2(S^{2k+1}H)^{\mathrm{Sp}} \cong \mathbb{Q}$ の上記準同型による像 $\tilde{t}_{2k+1}$ の自明・非自明性の決定である．

7. Freedman は任意のホモロジー 3 球面は可縮な 4 次元コンパクト位相多様体の境界となることを証明した．これによりつぎの準同型

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,1}^{\mathrm{smooth}} = \mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}}/\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}}$$

が誘導される．

予想　1　つぎの同型

$$H^2\left(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}},\mathbb{Q}\right) \cong \mathbb{Q}\langle e_1,\tilde{t}_3,\tilde{t}_5,\cdots\rangle$$
$$H^2\left(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}},\mathbb{Q}\right) \cong \mathbb{Q}\langle e_1\rangle$$

が成立する．これを標語的に言えば

$$\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \text{ transgresses to } \mathbb{Q}\langle \tilde{t}_3,\tilde{t}_5,\cdots\rangle$$

予想　2　trace maps $\mathrm{tr}(2k+1)$ は Soulé's p-adic regulators $\sigma_p(2k+1)$ の"square root"の役割を果たす．