数理解析研究所講究録
第 1777 巻 2012 年 62-74

Parametrizations of Teichmüller spaces by trace functions

中西敏浩 (Toshihiro Nakanishi)　島根大学総合理工学部
中村豪（Gou Nakamura)　愛知工業大学

1 Seppälä-Sorvali の問題

1.1. 以下 (g,m) は $2g-2+m>0$ をみたす非負整数の組とする。m 個の境界成分をもつ種数 g の向きのついたコンパクト曲面 S の基本群の標準生成系を用いた表示は次のようになる。

$$\Gamma=\langle a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g,c_1,\ldots,c_m:(\prod_{j=1}^{g}a_jb_ja_j^{-1}b_j^{-1})c_1\cdots c_m=1\rangle$$

群 Γ から $SL(2,\mathbb{R})$ への忠実な表現 ρ で次の条件をみたすもの全体を考える。

- $G=\rho(\Gamma)$ は purely hyperbolic な Fuchs 群
- 向きを保つ同相写像 $f:S\to\mathbb{H}/G$ と，その普遍被覆空間の間への lift $\tilde{f}:\tilde{S}\to\mathbb{H}$ が存在して $\tilde{f}\circ\gamma=\tilde{\rho}(\gamma)\circ\tilde{f}\quad(\gamma\in G)$. ($\mathbb{H}$ は双曲平面とみた上半平面)

ここで射影 $\pi:SL(2,\mathbb{R})\to PSL(2,\mathbb{R})$ と ρ との合成を $\tilde{\rho}=\pi\circ\rho$ と記した。上の条件をみたす2つの表現 ρ_1 と ρ_2 が同値であるとは，$\tilde{\rho}_1$ と $\tilde{\rho}_2$ が G から $PSL(2,\mathbb{R})$ への表現として同値（共役）であることとする。このとき表現の同値類の空間を $\mathcal{T}(g,m)$ で表わし，(g,m) 型タイヒミュラー空間と呼ぶ。$\mathcal{T}(g,m)$ は（たとえば Fenchel-Nielsen 座標によって）$\mathbb{R}^{6g-6+3m}$ と同相であることが知られている。

1.2. $\gamma\in\Gamma-\{1\}$ とする。このとき trace function $\tau_\gamma([\rho])=|\mathrm{tr}\rho(\gamma)|$ は $\mathcal{T}(g,m)$ 上の正値関数である (実際は 2 より大きい値をとる)。次のことが知られている。

Theorem 1.1 有限個の $\gamma_1,\ldots,\gamma_N\in\Gamma$ が存在して次の写像は *embedding*（したがって $\mathcal{T}(g,m)$ の大域的な座標系を与える）

$$(\tau_{\gamma_1},\ldots,\tau_{\gamma_N}):\mathcal{T}(g,m)\to\mathbb{R}^N.$$

この定理は $g+m$ が小さいときには Fricke-Klein の時代に遡るだろうが，一般の曲面に対して最初に証明したのは L. Keen である。定理にあるような $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$ が存在する N の最小値 $N(g,m)$ を求めよという問題があった。$m=0$, すなわち閉曲面の場合は Wolpert の定理により $N(g,0)>6g-6=\dim\mathcal{T}(g,0)$ であることがわかる。Seppälä と Sorvali が 1980 年代中頃に $6g-4$ 個の trace functions による大域的座標系を導入したので $N(g,0)$ は $6g-5$ または $6g-4$ であり，そのどちらであるかを決定することが一時 Seppälä-Sorvali の問題と呼ばれた。この問題は Schmutz によって 1993 年に解決された。その後 Okumura, Feng Luo, Hamenstädt らによって別証明が与えられている (参考文献を参照のこと)。

Theorem 1.2

$$N(g,m)=\begin{cases}6g-6+3m=\dim\mathcal{T}(g,m) & (m\geq 1)\\ 6g-5=\dim\mathcal{T}(g,0)+1 & (m=0)\end{cases}$$

この小論は Seppälä-Sorvali の問題の再論である。$SL(2,\mathbb{R})$ の行列について成立する一つのトレース恒等式 (2.4.2 節の (2.7)) を紹介し，それを用いて $N(g,0)=\dim\mathcal{T}(g,0)+1$ であることを証明する。

2 いくつかの例

2.1 トレース恒等式

$SL(2,\mathbb{R})$ の行列に対して成り立つ次の恒等式は基本である ([6, §3.4]):

(1) $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^{-1}$,

(2) $\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}AB^{-1} = \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B$,

(3) $\mathrm{tr}ABC = \mathrm{tr}A\mathrm{tr}BC + \mathrm{tr}B\mathrm{tr}CA + \mathrm{tr}C\mathrm{tr}AB - \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B\mathrm{tr}C - \mathrm{tr}ACB$.

次の恒等式は (1),(2),(3) から得られるが，これらもよく用いる:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[A,B] = \mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1} = (\mathrm{tr}A)^2 + (\mathrm{tr}B)^2 + (\mathrm{tr}AB)^2 - \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B\mathrm{tr}AB - 2,\\
&\mathrm{tr}ABCB = \mathrm{tr}AB\mathrm{tr}BC + \mathrm{tr}AC - \mathrm{tr}A\mathrm{tr}C, \qquad (2.1)\\
&\mathrm{tr}ABCB^{-1} = \mathrm{tr}A\mathrm{tr}C - \mathrm{tr}AC - \mathrm{tr}AB\mathrm{tr}BC + \mathrm{tr}B\mathrm{tr}ABC.
\end{aligned}$$

群 G は $A_1,\dots,A_n \in SL(2,\mathbb{R})$ で生成されるとし，次のトレースの組を考える。

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{tr}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r}) : 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n, 1 \le r \le n\}. \qquad (2.2)$$

このとき次の補題が知られている ([6, §3.5]).

Lemma 2.1 任意の $g \in G$ のトレース $\mathrm{tr}g$ は $\mathcal{S}$ 上の整数係数多項式で表わされる。

以下 $SL(2,\mathbb{R})$ の行列の組 $(A_1,\dots,A_n)$ に対して次を定める：

$$\mathrm{tr}(A_1,\dots,A_n) = (\mathrm{tr}A_1,\dots,\mathrm{tr}A_n), \quad \mathrm{sgn}\,(A_1,\dots,A_n) = (\mathrm{sgn}\,\mathrm{tr}A_1,\dots,\mathrm{sgn}\,\mathrm{tr}A_n)$$

2.2 $g+m \le 4$ をみたす (g,m) 型タイヒミュラー空間の座標

以下 $\mathcal{T}(g,m)$ の点 $[\rho]$ と行列の組

$$(A_1,B_1,\dots,A_g,B_g,C_1,\dots,C_m) = (\rho(a_1),\rho(b_1),\dots,\rho(a_g),\rho(b_g),\rho(c_1),\dots,\rho(c_m))$$

を同一視する。ただし後者は（共役の自由度があるので）適当な normalization を受けていると仮定する。双曲的 Möbius 変換を表わす行列 $A \in SL(2,\mathbb{R})$ に対して p_A, q_A をそれぞれ A の反発的（吸引的）不動点とする。

2.3 Type $(0,3)$

type$(0,3)$ すなわち pair of pants のタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(0,3)$ の点を (A,B,C) ($ABC = I$(単位行列)) で代表させる。ここで $\mathrm{sgn}\,(A,B) = (-,-)$ とする。このとき $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}C < 0$ であり

$$(a,b,z) = (-\mathrm{tr}A, -\mathrm{tr}B, -\mathrm{tr}AB) : \mathcal{T}(0,3) \to \mathbb{R}^3_{>2}$$

は (surjective)embedding である。実際 $q_A < p_C = -1 < q_C = 1 < p_B < q_B < p_A = -q_A$ という normalization condition のもとで (a,b,z) は (A,B,C) を次のように一意に復元する[1]：

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} & \dfrac{2b+az+2\sqrt{K^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}} \\ \dfrac{2b+az-2\sqrt{K^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}} & -\dfrac{a}{2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{-b-\sqrt{K^2-4}}{2} & \dfrac{2a+bz+z\sqrt{K^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}} \\ \dfrac{2a+bz-z\sqrt{K^2-4}}{2\sqrt{z^2-4}} & \dfrac{-b+\sqrt{K^2-4}}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\dfrac{z}{2} & -\dfrac{\sqrt{z^2-4}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{z^2-4}}{2} & -\dfrac{z}{2} \end{pmatrix}.$$

ここで

$$K = \sqrt{abz+a^2+b^2+z^2} = \sqrt{\mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1}+2}. \tag{2.4}$$

2.4 Type $(1,1)$

One-holed torus のタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(1,1)$ の点を (A,B,C) $(ABA^{-1}B^{-1}C=I)$ で代表させる。ここで $\mathrm{tr}A>0$, $\mathrm{tr}B>0$ とすると $\mathrm{tr}AB>0$ である。このとき

$$(x,y,z) = (\mathrm{tr}A, \mathrm{tr}B, \mathrm{tr}AB) : \mathcal{T}(1,1) \to \mathbb{R}^3_{>2}$$

は embedding である。ただし surjective でない。$-\mathrm{tr}C = -\mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1} = xyz-x^2-y^2-z^2+2 > 2$ なので (x,y,z) による像は $\{(x,y,z) : xyz > x^2+y^2+z^2\}$ に含まれていないといけない（実際は一致する)。

2.5 Type $(0,4)$

$\mathcal{T}(0,4)$ の点を (A,B,C,D) $(ABCD=I)$ で代表させる。ここで $\mathrm{sgn}\,(A,B,C)=(-,-,-)$ となるようにとる。このとき

$$(a,b,c,d,x,y,z) = (-\mathrm{tr}A, -\mathrm{tr}B, -\mathrm{tr}C, -\mathrm{tr}D, -\mathrm{tr}BC, -\mathrm{tr}CA, -\mathrm{tr}AB) : \mathcal{T}(0,4) \to \mathbb{R}^7_{>2}$$

は embedding で $F_{04}(a,b,c,d,x,y,z)=0$ をみたす。ここで $F_{04}(a,b,c,d,x,y,z)$ は

$$x^2+y^2+z^2-xyz+(ad+bc)x+(bd+ca)y+(cd+ab)z+a^2+b^2+c^2+d^2+abcd-4. \tag{2.5}$$

この式は $d^2-2 = \mathrm{tr}D^2 = \mathrm{tr}(AB)(CA)(BC)$ の右辺に基本トレース恒等式 (3) を応用して得られる。F_{04} は d についてモニックな 2 次多項式で d の係数 $ax+by+cz+abc>0$ である。したがって

[1] 以下の例 2.4–2.6 ででも trace functions の組がタイヒミュラー空間の座標系を与えるということは，それらが群の生成系 $(A_1, B_1, ..., C_m)$ を（ある normalization のもとで）一意に復元することを意味している。

$F_{04}=0$ が d について必ず負の解をもつから，正の解をもてばそれは一意に定まる。すなわち (2.5) を $d^2+2Pd+Q$ のように書けば

$$d=-P+\sqrt{P^2-Q}$$

であり ($-P+\sqrt{P^2-Q}>2$ が (a,b,c,d,x,y,z) がタイヒミュラー空間の点を表わすための必要条件となる)，d は省略してよく，(a,b,c,x,y,z) が $\mathcal{T}(0,4)$ を $\mathbb{R}^6_{>2}$ に埋め込む ($6=\dim\mathcal{T}(0,4)$ に注意)。

2.6 Type $(1,2)$

$\mathcal{T}(1,2)$ の点を (A,B,C,D) $(ABA^{-1}B^{-1}CD=I)$ で代表させる。ここで $\mathrm{sgn}\,(A,B,C,D)=(+,+,-,-)$ であるとする。

2.6.1 トレース恒等式 I.

$$(a,b,c,d,x,y,z)=(\mathrm{tr}A,\mathrm{tr}B,-\mathrm{tr}C,-\mathrm{tr}D,\mathrm{tr}AD,\mathrm{tr}AC,\mathrm{tr}AB):\mathcal{T}(1,2)\to\mathbb{R}^7_{>2}$$

は embedding である。$(A,BA^{-1}B^{-1},C,D)$ は type(0,4) であり，$\mathrm{tr}BA^{-1}B^{-1}=a$, $\mathrm{tr}BA^{-1}B^{-1}C=\mathrm{tr}AD=x$ ゆえ $z_1=-\mathrm{tr}A(B^{-1}A^{-1}B^{-1})$ とおくと $F_{04}(a,a,c,d,x,y,z_1)=0$ が成り立つ[2]。この式に $z_1=abz-a^2-b^2-z^2+2$ を代入したものを $F_{12}(a,b,c,d,x,y,z)$ とおくと (a,b,c,d,x,y,z) は $F_{12}(a,b,c,d,x,y,z)=0$ をみたす。これを具体的に表示すると $F_{12}(a,b,c,d,x,y,z)$ は

$$\begin{aligned}a^2b^2-4b^2+b^4+c^2+2cd-b^2cd+d^2+acx+adx+x^2+acy+ady\\-2xy+a^2xy+b^2xy+y^2+4abz-a^3bz-2ab^3z+abcdz-abxyz\\-4z^2+a^2z^2+2b^2z^2+a^2b^2z^2-cdz^2+xyz^2-2abz^3+z^4\end{aligned}\tag{2.6}$$

となり c,d について対称なモニックな 2 次多項式で c および d の係数は正である。したがって d (または c) を省略してよく，(a,b,c,x,y,z) が $\mathcal{T}(0,4)$ を $\mathbb{R}^6$ に埋め込む ($6=\dim\mathcal{T}(1,2)$ に注意)。

2.6.2 トレース恒等式 II.

$$u=\mathrm{tr}CABA^{-1},\ v=\mathrm{tr}CAB^2,\ w=\mathrm{tr}CAB,\ k=-\mathrm{tr}CD$$

とし c,d,z は I と同じとする。このとき $(u,v,z,w,c,d,k):\mathcal{T}(1,2)\to\mathbb{R}^7_{>2}$ は embedding である。(u,v,z,w,c,d,k) は $s=uvw-u^2-v^2-w^2+2$ とおくとき

$$w^2+\frac{c+d}{2}zw+k+s+z^2+cd-w\sqrt{(k+2)(s+2)+\left(\frac{c-d}{2}\right)^2(z^2-4)}=0.\tag{2.7}$$

をみたす。左辺を $G_{12}(u,v,z,w,c,d,k)$ で表わす。

3 種数 $g\geq 2$ の閉曲面

$\mathcal{T}(g,0)$ の点を $(A_1,B_1,A_2,B_2,\dots,A_g,B_g)$ $(\prod_{j=1}^{g}A_jB_jA_j^{-1}B_j^{-1}=I)$ で代表させる。すべての行列のトレースは正とする。$g=2$ の場合は次章で述べるので $g\geq 3$ とする。

---

[2] トレースの符号が例 2.3 と異なるところがあるが，同じ恒等式をみたす。

3.1 $g \geq 3$ の場合

証明は g についての帰納法である。(正確には (g,m) 型のタイヒミュラー空間すべてを考え $g+m$ についての帰納法である。すべての場合を取り扱うと大変なので，ここでは簡略化して記述する。) $a_k = \mathrm{tr}A_k > 0$, $b_k = \mathrm{tr}B_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., g)$ とおく。$E_k = [A_k, B_k]$ とおくと $e_k = -\mathrm{tr}E_k > 0$ $(k = 1, 2, ..., g)$. $\mathcal{S}_1 = (A_1, B_1, ..., A_{g-2}, B_{g-2}, E_{g-1}E_g)$ は type $(g-2, 1)$ のタイヒミュラー空間の点を定める。今

$$\begin{array}{ll} a_k,\ b_k,\ z_k = \mathrm{tr}A_kB_k, & (k = 1, ..., g-2) \\ x_k = -\mathrm{tr}B_{k-1}A_{k-1}^{-1}B_{k-1}^{-1}A_k, & y_k = -\mathrm{tr}E_1 \cdots E_{k-2}A_{k-1}A_k, \\ w_k = -\mathrm{tr}A_kE_{k+1} \cdots E_gC_{g+1} & (k = 2, ..., g-2) \end{array} \tag{3.1}$$

が $\mathcal{S}_1$ を決定すると仮定する。次に $\mathcal{T}(0,4)$ の点

$$\mathcal{S}_2 = (E_1 \cdots E_{g-3}A_{g-2}, B_{g-2}A_{g-2}^{-1}B_{g-2}^{-1}, A_{g-1}, B_{g-1}A_{g-1}^{-1}B_{g-1}^{-1}E_g),$$

を考える。

$$\begin{array}{lll} d_{g-2} = \mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-3}A_{g-2}, & a_{g-2} = \mathrm{tr}B_{g-2}A_{g-2}^{-1}B_{g-2}^{-1}, & a_{g-1} = \mathrm{tr}A_{g-1} \\ d_{g-1} = \mathrm{tr}B_{g-1}A_{g-1}^{-1}B_{g-1}^{-1}C_g, & x_g = -\mathrm{tr}B_{g-2}A_{g-2}^{-1}B_{g-2}^{-1}A_{g-1}, & \\ y_{g-1} = -\mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-3}A_{g-2}A_{g-1}, & f_{g-2} = -\mathrm{tr}(E_1 \cdots E_{g-3}A_{g-2})(B_{g-2}A_{g-2}^{-1}B_{g-2}^{-1}) & \end{array} \tag{3.2}$$

は $\mathcal{S}_2$ を決定する。ここで

$$d_{g-1} = \mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-2}A_{g-1}, \quad f_{g-2} = -\mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-2},$$

と書けること，および d_{g-2} と f_{g-2} は (3.1) を用いて表わされることに注意する (下の (D), (F) 参照). さらに d_{g-1} は

(D) d_{g-1} についての 2 次方程式 $F_{04}(d_{g-2}, a_{g-2}, a_{g-1}, d_{g-1}, x_{g-1}, y_{g-1}, f_{g-2}) = 0$ の唯一の正の解.

次に $\mathcal{T}(1,2)$ の点 $\mathcal{S}_3 = (A_{g-1}, B_{g-1}, E_g, E_1 \cdots E_{g-2})$ を考える。

$$\begin{array}{lll} a_{g-1},\quad b_{g-1}, & f_{g-1} = e_g = -\mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-1}, & f_{g-2} \\ d_{g-1},\quad w_{g-1} = \mathrm{tr}A_{g-1}C_g, & z_{g-1} = \mathrm{tr}A_{g-1}B_{g-1} & \end{array} \tag{3.3}$$

は $\mathcal{S}_3$ を決定し, f_{g-1} は

(F) f_{g-1} についての 2 次方程式 $F_{12}(a_{g-1}, b_{g-1}, f_{g-1}, f_{g-2}, d_{g-1}, w_{g-1}, z_{g-1}) = 0$ の唯一の正の解.

$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ が生成する群の中に（共役を除いて）共通の type$(0,3)$ の部分群が存在する。必要ならば，その部分群上で同じ $SL(2,\mathbb{R})$ 表現を与えるように修正して $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ を選び直す。また $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ と $\mathcal{S}_3$ が生成する群についても同じことを行なう。このとき，

Proposition 3.1 $6g-9$ 個の *trace functions* a_k, b_k, z_k $(k = 1, 2, ..., g-1)$, x_k, y_k, w_k $(k = 2, ..., g-2)$ は $\mathcal{T}(g-1, 1)$ の点 $(A_1, B_1, ..., A_{g-1}, B_{g-1}, E_g)$ を決定する。

次に $\mathcal{T}(1,2)$ の点 $\mathcal{S}_4 = (A_g, B_g, E_1 \cdots E_{g-2}, E_{g-1})$ を考える。

$$\begin{array}{lll} u_g = \mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-2}A_gB_gA_g^{-1}, & v_g = \mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-2}A_gB_g^2, & w_g = \mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-2}A_gB_g, \\ z_g = \mathrm{tr}A_gB_g, & f_{g-2} = -\mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-2}, & \\ \multicolumn{3}{l}{e_{g-1} = -\mathrm{tr}E_{g-1} = a_{g-1}b_{g-1}z_{g-1} - a_{g-1}^2 - b_{g-1}^2 - z_{g-1}^2 + 2,} \\ \multicolumn{3}{l}{f_{g-1} = -\mathrm{tr}E_1 \cdots E_{g-1}} \end{array}$$

は S_4 を一意に定めるので，これらを Proposition 3.1 の trace functions に加えて $(A_1, B_1, ..., A_g, B_g)$ を決定することができる。実際に新たに加わるのは u_g, v_g, w_g, z_g なので全部で $6g-5$ 個の trace functions によるパラメータを得る。それらは $G_{12}(u_g, v_g, z_g, w_g, f_{g-2}, e_{g-1}, f_{g-1}) = 0$ をみたす。

種数 3 のとき $\mathcal{T}(3,0)$ の点 $(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3)$ は

$$\begin{array}{lll} a_1 = \mathrm{tr}A_1, & b_1 = \mathrm{tr}B_1, & z_1 = \mathrm{tr}A_1B_1, \\ a_2 = \mathrm{tr}A_2, & b_2 = \mathrm{tr}B_2, & z_2 = \mathrm{tr}A_2B_2, \\ x_2 = -\mathrm{tr}B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2, & y_2 = -\mathrm{tr}A_1A_2, & w_2 = \mathrm{tr}A_2E_3, \\ u_3 = \mathrm{tr}E_1A_3B_3A_3^{-1}, & v_3 = \mathrm{tr}E_1A_3B_3^2, & w_3 = \mathrm{tr}E_1A_3B_3, \\ z_3 = \mathrm{tr}A_3B_3 & & \end{array} \tag{3.4}$$

の 13 個によって決まる。今，補助的に

$$\begin{array}{l} e_i = -\mathrm{tr}E_i = a_ib_iz_i - a_i^2 - b_i^2 - z_i^2 + 2, \ i = 1, 2 \\ e_3 = -\mathrm{tr}E_1E_2 = -\mathrm{tr}E_3, \qquad d_2 = \mathrm{tr}A_2E_1 = \mathrm{tr}B_2A_2^{-1}B_2^{-1}E_3. \end{array}$$

を定めると，これらはそれぞれ $F_{12}(a_1, b_1, a_2, d_2, x_2, y_2, z_1)$ と $F_{12}(a_2, b_2, e_3, e_1, d_2, w_2, z_2)$ の正の根であり，(3.4) のパラメータは

$$G_{12}(u_3, v_3, z_3, w_3, e_1, e_2, e_3) = 0.$$

をみたす。

4 種数 2 の閉曲面の写像類群

4.1 $g = 2$ の場合

$\mathcal{T}(2,0)$ の点を $(2,0)$ 型 Fuchs 群 G の標準生成系 $E = (A, B, C, D)$ $([A, B][C, D] = 1)$ の同値類で表す。ただし $\mathrm{sgn}\,(A, B, C, D) = (+, +, +, +)$ とする。7 つの trace functions $a = \mathrm{tr}A$, $b = \mathrm{tr}B$,$z = \mathrm{tr}AB$, $u = -\mathrm{tr}ACDC^{-1}$, $v = -\mathrm{tr}ACD^2$, $w = -\mathrm{tr}ACD$, $t = \mathrm{tr}CD$ は $\mathcal{T}(2,0)$ を $\mathbb{R}^7_{>2}$ に埋め込む。$K = abz - a^2 - b^2 - z^2$, $s = uvt - u^2 - v^2 - t^2$ とおくと次の恒等式が成立する。

$$awt + a^2 + w^2 + t^2 + K^2 + S^2 + 4 - w\sqrt{(K^2+4)(S^2+4)} = 0, \tag{4.1}$$

4.2 種数 2 の Fuchs 群上のトレース多項式

群 G の任意の元のトレースを a, b, z, u, v, w, t を用いて表わしたい。そのためには補題 2.1 により $c = x_1 = \mathrm{tr}C$ and $d = x_2 = \mathrm{tr}D$, $x_3 = \mathrm{tr}AC$, $x_4 = \mathrm{tr}AD$, $x_5 = \mathrm{tr}BC$, $x_6 = \mathrm{tr}BD$, $x_7 = \mathrm{tr}ABC$, $x_8 = \mathrm{tr}ABD$, $x_9 = \mathrm{tr}BCD$ および $x_{10} = \mathrm{tr}ABCD$ を a, b, z, u, v, w, t をもちいて表わしておけばよい。

(1) $[A, B] = [C, D]^{-1}$ と (2.1) を用いて

$$abz - a^2 - b^2 - z^2 = cdt - c^2 - d^2 - t^2. \tag{4.2}$$

G は離散だから $\mathrm{tr}[A, B] = a^2 + b^2 + z^2 - abz - 2 < -2$([17, 33 D]). 以下 $K = \sqrt{abz - a^2 - b^2 - z^2}$ とおく。

(2) $BAB^{-1} = CDC^{-1}D^{-1}A$ と基本恒等式 (3) より

$$a = \mathrm{tr}(ACD)\cdot C^{-1}\cdot D^{-1} = -wt + cx_3 - ud + wcd - a.$$

したがって

$$2a + wt - cx_3 + ud - wcd = 0 \tag{4.3}$$

(3) $v = -\mathrm{tr}ACD\cdot D = -(\mathrm{tr}ACD\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}AC) = wd + x_3$ だから

$$x_3 = v - dw. \tag{4.4}$$

これと (4.3) を用いて

$$2a + wt - cv + ud = 0. \tag{4.5}$$

(4) 次が成り立つ：

$$\begin{aligned} -u &= \mathrm{tr}A\cdot CD\cdot C^{-1} = ad + t(\mathrm{tr}AC^{-1}) - wc - atc - x_4 \\ &= ad + t(ac - x_3) - wc - atc - x_4, \end{aligned}$$

よって (4.3) から

$$x_4 = u + ad - tx_3 - wc = u + ad - tv + twd - cw. \tag{4.6}$$

$d = u^{-1}(cv - 2a - wt)$ (4.5) を (4.2) に代入して

$$(uvt - u^2 - v^2)c^2 - (2a + wt)(tu - 2v)c - (K^2 + t^2)u^2 - (2a + tw)^2 = 0.$$

この等式を c の 2 次方程式と見なすと

$$uvt - u^2 - v^2 = (-\mathrm{tr}[CD^{-1}C^{-1}A, ACD^2] - 2) + t^2 > t^2 > 0$$

([17, 33 D]) と $-(K^2 + t^2)u^2 - (2a + tw)^2 < 0$ から必ず負の根をもち，よって 2 より大きい根は存在すれば一意であることがわかる。$c = \mathrm{tr}C > 2$ だから

$$c = \frac{(2a + tw)(ut - 2v) + u\sqrt{(2a + tw)^2(t^2 - 4) + 4(K^2 + t^2)(S^2 + t^2)}}{2(S^2 + t^2)},\quad d = \frac{cv - 2a - wt}{u} \tag{4.7}$$

ここで $S = \sqrt{uvt - u^2 - v^2 - t^2}$. ここで (4.1) より $(2a + tw)^2(t^2 - 4) + 4(K^2 + t^2)(S^2 + t^2)$ は次式に等しい。

$$\left((t^2 - 4)w + 2\sqrt{(S^2 + 4)(K^2 + 4)}\right)^2 = \left((t^2 - 4)w + \frac{2(awt + a^2 + t^2 + K^2 + S^2 + 4)}{w}\right)^2.$$

よって (4.7) より

$$\begin{aligned} c &= \frac{(K^2 + S^2 + t^2 + a^2 + 4)u + w(2atu - 2av - uw + t^2uw - tvw)}{w(S^2 + t^2)}, \\ d &= \frac{(K^2 + S^2 + t^2 + a^2 + 4)v + w(2au + twu - vw)}{w(S^2 + t^2)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

続いて (4.4), (4.6) と (4.8) より $x_3 = \mathrm{tr}AC$ と $x_4 = \mathrm{tr}AD$ の (a,b,z,u,v,w,t) による表現を得る。

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{uw(2a+tw)+v(4+a^2+K^2-w^2)}{S^2+t^2} \\ x_4 &= (ad+u-cw)+t\frac{(4+a^2+K^2-vw^2)v+w(2au+tuw)}{S^2+t^2} \end{aligned} \tag{4.9}$$

(5) 基本トレース恒等式により $\mathrm{tr}B^{-1}CD = bt - x_9$,

$$\mathrm{tr}B^{-1}(CDC^{-1}) = bd - \mathrm{tr}BCDC^{-1} = bd - (bd - x_6 - x_5t + cx_9) = x_6 + tx_5 - cx_9.$$

よって $AB^{-1}A^{-1} = B^{-1}CD \cdot C^{-1} \cdot D^{-1}$ から

$$\begin{aligned} b &= (\mathrm{tr}B^{-1}CD)t + c\mathrm{tr}B^{-1}C + d\mathrm{tr}B^{-1}CD \cdot C^{-1} - (\mathrm{tr}B^{-1}CD)cd - b \\ &= (bt - x_9)(t - cd) + c(bc - x_5) + d(x_6 + tx_5 - cx_9) - b. \end{aligned}$$

が従い，さらに次が成り立つ。

$$(dt - c)x_5 + dx_6 - tx_9 = 2b - bt^2 + bcdt - bc^2.$$

(6) 基本トレース恒等式により $\mathrm{tr}A^{-1}CD = at + w$ と

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}B^{-1}A^{-1} \cdot C \cdot D &= zt + c\mathrm{tr}ABD^{-1} + d\mathrm{tr}ABC^{-1} - zcd - \mathrm{tr}B^{-1}A^{-1}DC \\ &= zt + c(zd - x_8) + d(zc - x_7) - zcd - \mathrm{tr}B^{-1}A^{-1}DC \\ &= zt + cdz - dx_7 - cx_8 - \mathrm{tr}B^{-1}A^{-1}DC. \end{aligned}$$

を得る。$B^{-1}A^{-1}DC = A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot CD$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}B^{-1}A^{-1}DC &= a\mathrm{tr}B^{-1}CD + b\mathrm{tr}A^{-1}CD + zt - abt - \mathrm{tr}B^{-1}A^{-1}CD \\ &= a(bt - x_9) + b(at + w) + zt - abt \\ &\quad -zt - cdz + dx_7 + cx_8 + \mathrm{tr}B^{-1}A^{-1}DC. \end{aligned}$$

したがって次式を得る。

$$dx_7 + cx_8 - ax_9 = -abt - bw + cdz.$$

(7) $B^{-1}CDC^{-1} = \mathrm{tr}AB^{-1}A^{-1}D$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}B^{-1}(CDC^{-1}) &= bd - \mathrm{tr}BCDC^{-1} \\ &= bd - (\mathrm{tr}B\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}BD - \mathrm{tr}BC\mathrm{tr}CD + \mathrm{tr}C\mathrm{tr}BCD) = x_6 + tx_5 - cx_9 \end{aligned}$$

は次に等しい。

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}AB^{-1}A^{-1}D &= bd - \mathrm{tr}DABA^{-1} \\ &= bd - (\mathrm{tr}B\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}BD - \mathrm{tr}BA\mathrm{tr}AD + \mathrm{tr}A\mathrm{tr}ABD) = x_6 + zx_4 - ax_8. \end{aligned}$$

したがって

$$tx_5 + ax_8 - cx_9 = zx_4.$$

(8) $BA^{-1}B^{-1}C = \mathrm{tr}A^{-1}DCD^{-1}$ により

$$ac - \mathrm{tr}BAB^{-1}C = \mathrm{tr}BA^{-1}B^{-1}C = \mathrm{tr}A^{-1}DCD^{-1} = ac - \mathrm{tr}ADCD^{-1},$$

したがって $\mathrm{tr}CBAB^{-1} = \mathrm{tr}ADCD^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}CBAB^{-1} &= \mathrm{tr}C\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}AC - \mathrm{tr}BC\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}B\mathrm{tr}CBA \\
&= ac - x_3 - zx_5 + b(\mathrm{tr}C\mathrm{tr}BA + \mathrm{tr}B\mathrm{tr}CA + \mathrm{tr}A\mathrm{tr}CB - \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B\mathrm{tr}C - \mathrm{tr}ABC) \\
&= ac - x_3 - zx_5 + bcz + b^2x_3 + abx_5 - ab^2c - bx_7
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}ADCD^{-1} &= \mathrm{tr}A\mathrm{tr}C - \mathrm{tr}AC - \mathrm{tr}AD\mathrm{tr}DC + \mathrm{tr}D\mathrm{tr}ADC \\
&= ac - x_3 - tx_4 + d(\mathrm{tr}A\mathrm{tr}CD + \mathrm{tr}D\mathrm{tr}AC + \mathrm{tr}C\mathrm{tr}AD - \mathrm{tr}A\mathrm{tr}D\mathrm{tr}C - \mathrm{tr}ACD) \\
&= ac - x_3 - tx_4 + adt + d^2x_3 + cdx_4 - ad^2c + wd
\end{aligned}$$

により，次式を得る。

$$(z-ab)x_5 + bx_7 = (b^2-d^2)x_3 + (t-cd)x_4 + bcz - ab^2c - adt + ad^2c - wd.$$

(9) $C^{-1}BA = \mathrm{tr}DC^{-1}D^{-1}AB$ を用いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}C^{-1}BA &= zc - \mathrm{tr}CBA \\
&= zc - (cz + bx_3 + ax_5 - abc - x_7) = -bx_3 - ax_5 + abc + x_7
\end{aligned}$$

は

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(DC^{-1}D^{-1})AB &= cz - \mathrm{tr}ABDCD^{-1} \\
&= cz - (\mathrm{tr}AB\mathrm{tr}C - \mathrm{tr}ABC - \mathrm{tr}ABD\mathrm{tr}CD + \mathrm{tr}D\mathrm{tr}(AB\cdot D\cdot C)) \\
&= x_7 + tx_8 - d(zt + dx_7 + cx_8 - zcd - x_{10}).
\end{aligned}$$

に等しいことがわかる。よって次式を得る。

$$-ax_5 + d^2x_7 + (cd-t)x_8 - dx_{10} = -abc + bx_3 - dtz + cd^2z.$$

(10) $D^{-1}C^{-1}B = C^{-1}D^{-1}ABA^{-1}$ を用いて $\mathrm{tr}D^{-1}C^{-1}B = bt - x_9$ と

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}C^{-1}D^{-1}ABA^{-1} &= tb - \mathrm{tr}(DC)ABA^{-1} \\
&= tb - (tb - \mathrm{tr}DCB - \mathrm{tr}DCA\mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}A\mathrm{tr}DCAB) \\
&= (dx_5 + cx_6 + bt - bcd - x_9) + z(dx_3 + cx_4 + at - acd + w) \\
&\quad -a(zt + dx_7 + cx_8 - zcd - x_{10})
\end{aligned}$$

が成り立ち，次式を得る：

$$dx_5 + cx_6 - adx_7 - acx_8 + ax_{10} = bcd - zdx_3 - zcx_4 - zw.$$

以上により，次の連立方程式が得られた：

$$M = \begin{pmatrix} dt-c & d & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & d & c & -a & 0 \\ t & 0 & 0 & a & -c & 0 \\ z-ab & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & d^2 & cd-t & 0 & -d \\ d & c & -ad & -ac & 0 & a \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix}$$

および

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} 2b-bt^2+bcdt-bc^2 \\ -abt-bw+cdz \\ zx_4 \\ (b^2-d^2)x_3+(t-cd)x_4+bcz-ab^2c-adt+acd^2-wd \\ -abc+bx_3-dzt+cd^2z \\ bcd-dzx_3-czx_4-zw \end{pmatrix},$$

を定めると $M\vec{x}=\vec{v}$. 行列 M は $a=c$ のときには正則ではないが (4.3) と (4.6) を用いて次を得る：

$$\begin{aligned}
x_5 &= \frac{c(2b+a^2b-2az+bK^2)-tuz+dw(ab+z+zK^2)-v(ab+zK^2)}{K^2+a^2}, \\
x_6 &= \frac{2(adz-bd)-u(ab+K^2z)+tv(ab+z+K^2z)+(c-dt)w(ab+z+K^2z)}{K^2+a^2}, \\
x_7 &= \frac{-2cz-btu+avz+wd(b-az)}{K^2+a^2}, \\
x_8 &= \frac{d(K^2+a^2+2)+auz+vt(b-az)+w(bc-bdt-acz+adtz)}{K^2+a^2}, \\
x_9 &= \frac{t(2b+a^2b-2az+bK^2)+dvz+w(ab+K^2z)+u(cz-dtz)}{K^2+a^2}, \\
x_{10} &= \frac{-2tz+b(c-dt)u+bdv-awz}{K^2+a^2}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

このように $x_1,\dots,x_{10}$ は a,b,z,u,v,w,t の有理関数である。

5 写像類群

G を $(2,-)$ 型の Fuchs 群, $E=(A,B,C,D)$ をその標準生成系 (すなわち G のマーキング) とする。次のマーキングの入れ替えを定める：

$$\begin{aligned}
&\omega_1(E)=(AB^{-1},B,C,D),\quad \omega_2(E)=(B,BA,C,D),\quad \omega_3(E)=(B^{-1}CA,B,C,B^{-1}CD) \\
&\omega_4(E)=(A,B,CD^{-1},D),\quad \omega_5(E)=(A,B,C,DC)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

各 ω_j は G の自己同型 ω_j に拡張できる。下図はいちばん左の列の元の ω_j による像を示す。

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
A	AB^{-1}	A	$B^{-1}CA$	A	A
B	B	BA	B	B	B
AB	A	ABA	$B^{-1}CAB$	AB	AB
$ACDC^{-1}$	$AB^{-1}CDC^{-1}$	$ACDC^{-1}$	$B^{-1}CACB^{-1}CDC^{-1}$	$ACDC^{-1}$	ACD
ACD^2	$AB^{-1}CD^2$	ACD^2	$B^{-1}CAC(B^{-1}CD)^2$	ACD	$AC(DC)^2$
ACD	$AB^{-1}CD$	ACD	$B^{-1}CACB^{-1}CD$	AC	$ACDC$
CD	CD	CD	$CB^{-1}CD$	C	CDC

種数 2 の閉曲面の写像類群を $\mathcal{MC}_2$ とする。$\omega_{j*} \in \mathcal{MC}_2$ を ω_j によって誘導される写像類とする。ω_{1*}, ..., ω_{5*} は次の関係式をみたす ([1, Theorem 4.8]):

$$\omega_{i*}\omega_{j*} = \omega_{j*}\omega_{i*} \text{ if } |i-j| \geq 2,\ 1 \leq i,j \leq 5$$
$$\omega_{j*}\omega_{j+1*}\omega_{j*} = \omega_{j+1*}\omega_{j*}\omega_{j+1*}\ (j=1,2,3,4),$$
$$(\omega_{1*}\omega_{2*}\omega_{3*}\omega_{4*}\omega_{5*})^6 = 1$$
$$\omega_{1*}\omega_{2*}\omega_{3*}\omega_{4*}\omega_{5*}^2\omega_{4*}\omega_{3*}\omega_{2*}\omega_{1*} = 1.$$

最後の式は超楕円的対合 (hyperelliptic involution)J の作用であり $\mathcal{T}(2,0)$ の各点を固定する。ω_{1*}, ..., ω_{5*} は $\mathcal{MC}_2' = \mathcal{MC}_2/\langle J\rangle$ を生成する。$(A_j, B_j, C_j, D_j) = \omega_j(A,B,C,D)$ とおいて

$$\begin{array}{llll} a_j = \mathrm{tr}A_j, & b_j = \mathrm{tr}B_j, & z_j = \mathrm{tr}A_jB_j, & u_j = -\mathrm{tr}A_jC_jD_jC_j^{-1}, \\ v_j = -\mathrm{tr}A_jC_jD_j^2, & w_j = -\mathrm{tr}A_jC_jD_j, & t_j = \mathrm{tr}C_jD_j & \end{array}$$

を a,b,z,u,v,w,t によって表わすと. $\mathcal{MC}_2'$ の $\mathbb{R}^7$ 上の有理変換による群による表現が得られる。

(Case of ω_{1*}) 基本トレース恒等式を用いて $\mathrm{tr}AB^{-1} = \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B - \mathrm{tr}AB = ab - z$,

$$w_1 = -\mathrm{tr}AB^{-1}CD \;=\; -\mathrm{tr}B\mathrm{tr}ACD + \mathrm{tr}ABCD = bw + x_{10},$$

$$\begin{aligned} u_1 = -\mathrm{tr}AB^{-1}CDC^{-1} &= -\mathrm{tr}B\mathrm{tr}ACDC^{-1} + \mathrm{tr}(AB)CDC^{-1} \\ &= -b(\mathrm{tr}A\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}AD - \mathrm{tr}AC\mathrm{tr}CD + \mathrm{tr}C\mathrm{tr}ACD) \\ &\quad +(\mathrm{tr}AB\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}ABD - \mathrm{tr}ABC\mathrm{tr}CD + \mathrm{tr}C\mathrm{tr}ABCD) \\ &= -abd + bcw + dz + btx_3 + bx_4 - tx_7 - x_8 + cx_{10}, \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} v_1 = -\mathrm{tr}AB^{-1}CD^2 &= -\mathrm{tr}B\mathrm{tr}ACD^2 + \mathrm{tr}ABCD^2 \\ &= -b(\mathrm{tr}ACD\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}AC) + (\mathrm{tr}ABCD\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}ABC) \\ &= bdw + bx_3 - x_7 + dx_{10}. \end{aligned}$$

を得る。したがって

$$\omega_{1*}(a,b,z,u,v,w,t) = (ab-z, b, a, u_1, v_1, w_1, t).$$

(Case of ω_{2*}) $\mathrm{tr}ABA = \mathrm{tr}AB\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}B = za - b$ だから

$$\omega_{2*}(a,b,z,u,v,w,t) = (a, z, az-b, u, v, w, t).$$

(Case of ω_{3*}) ω_{3*} の計算がいちばん面倒である：

$$a_3 = \mathrm{tr}B^{-1}CA = \mathrm{tr}B\mathrm{tr}AC - \mathrm{tr}ABC = bx_3 - x_7.$$

$$\begin{aligned} w_3 &= -\mathrm{tr}(B^{-1}C)(AC)(B^{-1}C)D = -\mathrm{tr}(AC)(B^{-1}C)D(B^{-1}C) \\ &= -\mathrm{tr}ACB^{-1}C\mathrm{tr}B^{-1}CD - \mathrm{tr}ACD + \mathrm{tr}AC\mathrm{tr}D \\ &= -(\mathrm{tr}B\mathrm{tr}AC^2 - \mathrm{tr}ACBC)(\mathrm{tr}B\mathrm{tr}CD - \mathrm{tr}BCD) + w + dx_3 \\ &= -[b(cx_3 - a) - (x_3x_5 + z - ab)](bt - x_9) + w + dx_3 \\ &= (x_3x_5 + z - bcx_3)(bt - x_9) + w + dx_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= -\mathrm{tr}(B^{-1}C)(AC)(B^{-1}C)(DC^{-1}) = -\mathrm{tr}(AC)(B^{-1}C)(DC^{-1})(B^{-1}C)\\
&= -\mathrm{tr}ACB^{-1}C\mathrm{tr}B^{-1}CDC^{-1} - \mathrm{tr}ACDC^{-1} + \mathrm{tr}AC\mathrm{tr}DC^{-1}\\
&= -(\mathrm{tr}AC\mathrm{tr}B^{-1}C - \mathrm{tr}AB)(\mathrm{tr}B\mathrm{tr}D - \mathrm{tr}BCDC^{-1}) + u + x_3(cd-t)\\
&= -(x_3(bc-x_5)-z)[bc-(bd-x_6-tx_5+cx_9)] + u + x_3(cd-t)\\
&= (x_3x_5+z-bcx_3)(x_6+tx_5-cx_9) + u + x_3(cd-t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= -\mathrm{tr}B^{-1}CAC(B^{-1}CD)^2 = -\mathrm{tr}B^{-1}CD\mathrm{tr}B^{-1}CACB^{-1}CD + \mathrm{tr}B^{-1}CAC\\
&= (bt-x_9)[(x_3x_5+z-bcx_3)(bt-x_9)+w+dx_3] + (bc-x_5)x_3 - z.
\end{aligned}$$

$$t_3 = \mathrm{tr}CB^{-1}CD = \mathrm{tr}CB^{-1}\mathrm{tr}CD - \mathrm{tr}BD = (bc-x_5)t - x_6.$$

この場合は a_3, x_3, v_3 と t_3 は負になる。よって符号を入れ替えて次を得る；

$$\omega_{3*}(a,b,z,u,v,w,t) = (-a_3, b, -x_3, u_3, -v_3, w_3, -t_3).$$

(Case of ω_{4*}) この場合は容易に次を得る：

$$\omega_{4*}(a,b,z,u,v,w,t) = (a,b,z,u,w,-x_3,c).$$

(Case of ω_{5*}) $-\mathrm{tr}ACDC = -\mathrm{tr}C\mathrm{tr}ACD + \mathrm{tr}ACDC^{-1} = cw - u,$

$$\begin{aligned}
v_5 &= -\mathrm{tr}AC(DC)^2 = -\mathrm{tr}CD\mathrm{tr}ACDC + \mathrm{tr}AC\\
&= -t(\mathrm{tr}C\mathrm{tr}ACD - \mathrm{tr}ACDC^{-1}) + x_3\\
&= cwt - tu + x_3,
\end{aligned}$$

と $\mathrm{tr}CDC = ct - d$ によって

$$\omega_{5*}(a,b,z,u,v,w,t) = (a,b,z,w,cwt-tu+x_3, cw-u, ct-d).$$

以上から次の結果を得る。

Theorem 5.1 写像類 $\omega_{1*}, \omega_{2*}, \omega_{3*}, \omega_{4*}, \omega_{5*}$ は a,b,z,u,v,w,t の有理変換として次の表現をもつ：

$$\begin{aligned}
\omega_{1*}(a,b,z,u,v,w,t) &= (ab-z, b, a, u_1, v_1, w_1, t)\\
\omega_{2*}(a,b,z,u,v,w,t) &= (a, z, az-b, u, v, w, t)\\
\omega_{3*}(a,b,z,u,v,w,t) &= (-bx_3+x_7, b, -x_3, u_3, -v_3, w_3, -bct+x_5t+x_6)\\
\omega_{4*}(a,b,z,u,v,w,t) &= (a,b,z,u,w,-x_3,c)\\
\omega_{5*}(a,b,z,u,v,w,t) &= (a,b,z,w,cwt-tu+x_3, cw-u, ct-d),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで c, d, x_3, x_4, x_5, x_6 と x_7 は (4.8),(4.9) と (4.10) で与えられている。

$x_1 = c, \ldots, x_{10}$ はすべて (a,b,z,u,v,w,t) の有理変換であるから，ω_{j*} $(j = 1,, \ldots, 5)$ の逆変換も有理変換である。

References

[1] Birman, J. S., *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Ann. of Math. Studies **82**, Princeton Univ. Press, 1974.

[2] Gilman, J. and B. Maskit, An algorithm for 2-generator Fuchsian groups, Michigan Math. J. **38** (1991), 13–32.

[3] Hamenstädt, U., Length functions and parameterizations of Teichmüller space for surfaces with cusps. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 75?-88.

[4] Keen, L., On Fricke moduli, in Advances in the Theory of Riemann Surfaces, (L. V. Ahlfors ed. et al.), Ann. Math. Studies **66**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971, 205-224.

[5] Luo, Feng, Geodesic length functions and Teichmüller spaces, Differential Geom. **48** (1998), 275–317.

[6] Maclachlan, C., and A. W. Reid, *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, Graduate Texts in Math. **219**, Springer-Verlag, 2003.

[7] Nakanishi, T. and M. Näätänen, Parametrization of Teichmüller space by length parameters, in *Analysis and Topology* (C.Andreian-Cazacu, O. Lehto and Th. M. Rassias, eds.) WorldScientific, Singapore, 541–560. 1998.

[8] Nakamura, G. and T. Nakanishi, Parametrizations of Teichmüller spaces by trace functions, Preprint, 2011.

[9] Okumura, Y., Global real analytic coordinates for Teichmüller spaces, J. Math. Soc. Japan, **42** (1990), 91–101.

[10] Okumura, Y., Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces, Hiroshima Math. J., **26** (1996), 165–179.

[11] Schmutz, P., Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen, Comment. Math. Helvet., **68** (1993), 278–288.

[12] Seppälä, M. and T. Sorvali, On geometric parametrizations of Teichmüller spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A I Math,. **10**, (1985), 515–526.

[13] Seppälä, M. and T. Sorvali, Parametrization of Teichmuüller spaces by geodesic length functions, In *Holomorphic Functions and Moduli*, Vol. II, Berkeley 1986, 267?-284.

[14] Seppälä, M. and T. Sorvali, Parametrization of Möbius groups acting in a disk, Comment. Math. Helvet., **61** (1986), 149–160

[15] Seppälä, M. and T. Sorvali, *Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces*, North-Holland Mathematics Studies, **169**, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[16] Wolpert, S. A., Geodesic length functions and the Nielsen problem, J. Differential Geom., **25** (1987), 275-296.

[17] H. Zieschang, *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces*, Lecture Notes in Math. **875**, Springer-Verlag, 1981.