数理解析研究所講究録
第 1778 巻 2012 年 1-5

m-ISOMETRIC OPERATORS

神奈川大学　長　宗雄 (Muneo Chō)
Departament of Mathematics
Kanagawa University
九州大学　太田昇一 (Schôichi Ôta)
Departament of Content and Creative Design
Kyushu University
東北薬科大学　棚橋浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)
Departament of Mathematics
Tohoku Pharmaceutical University

1. Introduction

J. Agler and M. Stankus は [1], [2] and [3] において distribution differential operator (Dirichlet operator) の研究のために m-isometry を研究した. $\mathcal{H}$ を complex Hilbert space とし $B(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体とする. また, ${}_mC_k$ を the binomial coefficient とする. 作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\ {}_mC_k\, T^{*m-k}T^{m-k} = 0$ を満たすときに m-isometry と呼ぶ. そこで

$$B_m(T) = T^{*m}T^m - \ {}_mC_1 \cdot T^{*m-1}T^{m-1} + \cdots + (-1)^m \cdot I$$

の記号を導入する. $T^*B_m(T)T - B_m(T) = B_{m+1}(T)$ が成り立つので, もし, T が m-isometry であれば $(m+1)$-isometry であることはすぐに分かる. 従って, m-isometry である作用素は $(m+1)$-isometry である. あとで示すが, この逆は一般に成り立たない. また, 次の定理を証明した.

THEOREM A-S-1 [1]. *Let T be an m-isometry. Then $B_{m-1}(T) \geq 0$.*

次に T のスペクトルを $\sigma(T)$ と書き, 複素平面の単位円周を $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$ と書くことにすれば, 次の性質を持つことを示した.

THEOREM A-S-2 [1]. *Let T be an m-isometry. Then the following assertions hold.*
(1) *If z is an approximate eigenvalue of T, then $z \in \mathbf{T}$.*
(2) *If T is invertible, then $\sigma(T) \subset \mathbf{T}$.*
(3) *If T is not invertible, then $\sigma(T) = \{z : |z| \leq 1\}$.*

このことから，m-isometry のスペクトルの境界は単位円周上にしか存在しないのでスペクトルは単位円周上の一部か，さもなくば単位円板全体であるという特徴を持っている．

A. Athavale は [4] で unilateral weighted shift $Te_n = w_n e_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ が $w_n = \sqrt{\dfrac{n+m}{n}}$ のとき, T は $(m+1)$-isometry であるが，m-isometry ではないことを示した．従って，すべての自然数 m について $(m+1)$-isometry であるが m-isometry でない作用素が存在する．また，$w_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ は Dirichlet shift と呼ばれている．T. Bermudez, A. Martinon and E. Negrin は [7] において weighted shift m-isometry について研究を行っている．昨年の数理研の研究集会においても I.B. Jung が weighted shift 2-isometry について少し述べられた（数理解析研究所講究録 1737, 46-55）．

2. m-isometry

初めに [8] で得られた結果を列記する．

THEOREM COT-1. *For an m-isometry T the following statements hold.*
(a) *If a is an eigenvalue of T, then $\overline{a}$ is an eigenvalue of T^*.*
(b) *Eigenvectors of T corresponding to distinct eigenvalues are orthogonal.*
(c) *If a is an approximate eigenvalue of T, then $\overline{a}$ is an approximate eigenvalue of T^*.*
(d) *If a, b are distinct approximate eigenvalues of T, and $\{x_n\}, \{y_n\}$ sequences of unit vectors such that $(T-a)x_n \longrightarrow 0$ and $(T-b)y_n \longrightarrow 0$, then $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow 0$.*

内山-棚橋によって次の定理が得られている．

THEOREM UT [10]. *Let an operator T satisfy that if a, b are approximate eigenvalues of T $(a \neq b)$ and $\{x_n\}, \{y_n\}$ are sequences of unit vectors such that $(T-a)x_n \longrightarrow 0$ and $(T-b)y_n \longrightarrow 0$, then $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow 0$. Then T has Bishop's property (β).*

従って Theorem COT-1 (d) から次の定理を得る．

THEOREM COT-2. *An m-isometric operator T has Bishop's property (β).*

さらに次の定理が示される.

THEOREM COT-3. *Let T be an m-isometry. If T is invertible and paranormal, then T is a unitary operator.*

3. 2-isometry

ここでは初めに Patel [9] によって得られた 2-isometry の特性について列記する. 従って作用素 T は

$$T^{*2}T^2 - 2T^*T + I = 0 \quad \text{and} \quad T^*T - I \geq 0$$

を満たしている. 以下の定理 P-1 $\sim$ 6 では T は 2-isometry とする.

THEOREM P-1. *Let T be power bounded. then T is an isometry.*

THEOREM P-2. *If T is similar to some spectraloid operator, then T is an isometry.*

ここで $\sigma_\pi(T)$ と $\sigma_p(T)$ を T の the approximate point spectrum と the point spectrum とする. このとき, 次の定理を示した.

THEOREM P-3. *T has following properties.*
(1) $1 \in \sigma(T^*T)$.
(2) $z \in \sigma_\pi(T) \implies \bar{z} \in \sigma_\pi(T^*)$.
(3) $z \in \sigma_p(T) \implies \bar{z} \in \sigma_p(T^*)$.

THEOREM P-4. *If z is an isolated point of $\sigma(T)$, then z is an eigen value of T.*

THEOREM P-5. *If $m(\sigma(T)) = 0$, then T is an isometry, where m is the Lebesgue planar measure.*

THEOREM P-6. *Weyl's theorem holds for T.*

次に 2-isometry の場合の我々の [8] で得た結果を述べる. 最初に 2-isometry T は $T^*T - I \geq 0$ であるが, この別証明を示す. まず次の補題を示す.

Lemma COT-4. *For a constant $a \in \mathbb{R}$ and $m = 2, 3, 4, ...$, it holds*

$$-\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \,{}_mC_k\, (1 + (m-k)a) = 1 + ma.$$

証明は簡単である．この補題から，次もすぐに得られる．

Lemma COT-5. *Let T be a 2-isometry. If $T^*Tx = (1+a)x$ for some constant $a \in \mathbb{R}$ and a non-zero vector $x \in \mathcal{H}$, then, for every m $(m \geq 2)$,*

$$T^{*m}T^m x = (1 + ma)x.$$

これらによって，次の結果を得るが，これは証明を示す．

Theorem COT-6. *Let T be a 2-isometry. Then $T^*T - I \geq 0$.*

Proof. We assume $T^*T - I \not\geq 0$. Since the operator $T^*T - I$ is hermitian, there exist $a < 0$ and a sequence $\{x_n\}$ of unit vectors such that $(T^*T - I - a)x_n \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$. By Berberian's method [6], we can assume that there exists a non-zero vector x such that $(T^*T - I - a)x = 0$. Hence we have $T^*Tx = (1+a)x$. Since T is a 2-isometry, by Lemma 3 it holds

$$T^{*m}T^m x = (1 + ma)x \quad \text{for every } m \geq 2.$$

Since $a < 0$ and $\|T^m x\|^2 = (1 + ma)\|x\|^2$, it's a contradiction for some large $m \in \mathbb{N}$. □

従って，次の corollary を得る．

Corollary COT-7 [9]. *Let T be a 2-isometry. If T is power bounded, then T is an isometry.*

さらに，次の結果も得る．

Theorem COT-8. *Let T be a 2-isometry. If the range of T is dense, then T is a unitary operator.*

従って，次の corollary を得る．

Corollary COT-9 [1, Proposition 1.23]. *If T is an invertible 2-isometry, then T is a unitary operator.*

References

[1] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space I,* Integr. Equat. Oper. Theory, **21**(1995), 387-429.

[2] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space II,* Integr. Equat. Oper. Theory, **23**(1995), 1-48.

[3] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space III,* Integr. Equat. Oper. Theory, **24**(1996), 379-421.

[4] A. Athavale, *Some operator theoretic calculus for positive definite kernel,* Proc. Amer. Math. Soc., **112**(1991), 701-708.

[5] J.V. Baxley, *Some general conditions implying Weyl's theorem,* Rev. Roum. Math. Pures Appl., **16**(1971), 1163-1166.

[6] S.K. Berberian, *Approximate proper vectors,* Proc. Amer. Math. Soc., **13**(1962), 111-114.

[7] T. Bermudez, A. Martinon and E. Negrin, *Weighted shift operators which are m-isometries,* Integr. Equat. Oper. Theory, **68**(2010), 301-312.

[8] M. Chō, S. Ôta and K. Tanahashi, *On m-isometric operators,* to appear in Glasnik Mat.

[9] S.M. Patel, 2-*Isometric operators,* Glasnik Mat., **37** (2002), 143-147.

[10] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *Bishop's property (β) for paranormal operators,* Operators and Matrices, **3**(2009), 517-524.