数理解析研究所講究録
第 1780 巻 2012 年 83-88

On Triangular array of numbers

城西大学理学部　飯田　正敏 (Masatoshi IIDA)
Faculty of Science,
Josai University

1 Introduction

自然数 n と n 以下の非負整数 k に対して定義される数列

$$a_{n,k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^{n}, \qquad (k=1,\ldots,n) \qquad (\text{ただし}, \binom{k}{i}\text{は 2 項係数})$$

は Triangle of numbers と呼ばれる (オンライン整数列大辞典 https://oeis.org/A019538).[1]

この数列は数え上げ組み合わせ論的な意味を持ち, 第 2 種 Stirling 数とも深く関わっていくつかの応用もあるが, たとえばこの分野のテキストとしてよく読まれている [GKP] などでも名前もなしに演習問題に出てくるだけ (p284 の問題 17 c) でマイナー感は否めない.

こうしたマイナーで名前がついているのかいないのかさえ分からないような数列に関する文献を調べるのは非常に困難であるが, 上記サイトのようなデータベースサイト (数列の最初のいくつかの数字を入力するだけでマッチする数列のリストが検索される) によりその困難が除かれたといえる.

本小文ではこの triangle of numbers に関する性質, 応用についていくつか述べる. [2]

2 添え字の拡張と漸化式

補題 1.

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}i^{\ell}=0, \qquad (\ell=0,1,\ldots,k-1).$$

ここで, 数え上げ組み合わせ論では標準的な慣例として $0^0=1$ とする (0^0 が不定であるとする立場もあるが, これに対する反論が [GKP]p159 ページに見られる. [3]).

証明は $(x-1)^k$ の 2 項展開の l 階微分を考えればよい. 実際には k のベキではなく下降階乗ベキが現れるが, それをベキに直すのは容易である.

[1] 2007 年頃は同サイトでは題名の通り Triangular array of numbers と呼んでいたが, 2011 年 8 月現在は Triangle of numbers と呼び方が変わっている. 本文中ではこちらの呼び方に統一する.

[2] 2 項係数や Stirling 数の言葉で書き直すと大半が既知の結果ではあるが, 表現が煩雑になる.

[3] 大雑把に言うと $x\geq 0$ で定義された関数 $f(x)=0^x$ が $x=0$ で不連続であっても, すなわち $0^x=\delta_{x0}$(クロネッカーのデルタ) であっても構わないじゃないかという主張である.

この式は$\ell=0$の場合は有名な

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}=0.$$

両辺に$(-1)^k$をかけ, $(-1)^i=(-1)^{-i}$に注意すると

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^{\ell}=0, \qquad (\ell=0,1,...,k-1).$$

なので$a_{n,k}$の定義はn,kが$k\geq n$を満たす非負整数のペアである場合まで拡張できて, その場合は0になることが分かる.

定理 2. Triangle of numbers $a_{n,k}$は次の漸化式を満たす.

$$\begin{cases} a_{n+1,k}=ka_{n,k-1}+ka_{n,k} & (k=2,3,...,n+1) \\ a_{n,1}=1, \quad a_{n,0}=1, & a_{n,k}=0 \quad (n<k) \end{cases}$$

この漸化式は2項係数の性質を用いれば定義式から容易に導ける. [4]

この漸化式から$a_{n,k}$がn個の元からなる集合をk個のdisjointな空でない部分集合の列(順序も意味を持つ)に分ける場合の数, あるいはn個の元からなる集合からk個の元からなる集合への全射の個数であることが分かる.

実際, $n+1$個の元からなる集合$A=\{x_1,x_2,...,x_{n+1}\}$を$k$個のdisjointな空でない部分集合の列に分ける方法は

(1) $A\setminus\{x_{n+1}\}$をk個のdisjointな空でない部分集合の列$A_1,A_2,...,A_k$に分け, x_{n+1}をA_1からA_kのどれかに割り振る($ka_{n,k}$通り)

(2) $A\setminus\{x_{n+1}\}$を$k-1$個のdisjointな空でない部分集合の列$A_1,A_2,...,A_{k-1}$に分け, $A_k=\{x_{n+1}\}$をこの列のどこかに割り込ませる($ka_{n-1,k-1}$通り)

のどちらかで尽くされるからである.

類似の漸化式をもつ数列に第1種/第2種Stirling数がある. 記号は[GKP]のものを用いた.

第1種Stirling数

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}=n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}=(n-1)!, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}=0, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=0 \quad (n<k) \end{cases}$$

k個のサイクルの積で表されるn次対称群の元の個数.

[4]逆に筆者はStirling数との関係などを知らないまま, この漸化式のみを頼りに$a_{n,k}$の定義式に至ったのでかなりの試行錯誤を要した.

第2種 Stirling 数

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} \\ \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0 \quad (n < k) \end{cases}$$

n 個の元からなる集合を k 個の disjoint な (空でない) 部分集合に分割する方法の数.

第2種 Stirling 数の漸化式の両辺を $k!$ で割ることで

$$a_{n,n} = n!, \quad a_{n,k} = k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

であることが分かる.

3 三角形

$a_{n,k}$ の漸化式から次の三角形が得られる. 上から n 番目, 左から k 番目の数が $a_{n,k}$ である.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow\times1 & & \searrow\times2 & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & & \\
 & & \swarrow\times1 & & \searrow\times2 \;\; \swarrow\times2 & & \searrow\times3 & & \\
 & & 1 & & 6 & & 6 & & \\
 & \swarrow\times1 & & \searrow\times2 \;\; \swarrow\times2 & & \searrow\times3 \;\; \swarrow\times3 & & \searrow\times4 & \\
 & 1 & & 14 & & 36 & & 24 & \\
\swarrow\times1 & & \searrow\times2 \;\; \swarrow\times2 & & \searrow\times3 \;\; \swarrow\times3 & & \searrow\times4 \;\; \swarrow\times4 & & \searrow\times5 \\
1 & & 30 & & 150 & & 240 & & 120
\end{array}$$

パスカルの三角形は各行の数について交代和を取れば 0 になったがこの三角形についてもそれを modify した式が成り立つ.

命題 3. $n \geq 2$ について

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} a_{n,k} = 0.$$

これも漸化式を用いて容易に示せる.

4 Bernoulli numberとの関係

$n \in \mathbb{N}$ を固定して m^n の母関数 (形式ベキ級数)

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m^n x^m$$

を考える. $F_{n+1}(x) = xF_n'(x)$ が成り立つことから次の補題を得る.

補題 4. $F_n(x)$ は $a_{n,k}$ によって次のように表される.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^n x^m = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x^k (1-x)^{-k-1}.$$

$F_0(x)F_n(x)$ は $\sum_{m=0}^{k} m^n$ の母関数になっている (たとえば [N] 参照) ことを利用すると次の定理が得られる.

定理 5. 自然数 ℓ, n に対して次が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{\ell} i^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{\ell+1}{k+1} a_{n,k}$$

両辺の階差をとることで次の系が得られる.

系 6.

$$\ell^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{\ell}{k} a_{n,k}$$

例 7. $n=5$ の場合, セクション 3 の三角形から $a_{5,1}=1, a_{5,2}=30, a_{5,3}=150, a_{5,4}=240, a_{5,5}=120$, が分かるので

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\ell} i^5 &= \binom{\ell+1}{2} + 30\binom{\ell+1}{3} + 150\binom{\ell+1}{4} + 240\binom{\ell+1}{5} + 120\binom{\ell+1}{6} \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{12}\{6 + 60(\ell-1) + 75(\ell-2)(\ell-1) + 24(\ell-3)(\ell-2)(\ell-1) \\
&\qquad +2(\ell-4)(\ell-3)(\ell-2)(\ell-1)\} \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{12}(2\ell^4 + 4\ell^3 + \ell^2 - \ell) \\
&= \frac{\ell^2(\ell+1)^2(2\ell^2+2\ell-1)}{12}.
\end{aligned}$$

となる.

Bernoulli 数は

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

によって定義される有理数で, 漸化式

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=0,\quad B_0=1,$$

を満たす. $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2}$ が偶関数であることから n が 3 以上の奇数の場合は B_n は 0 である.

定理 8. $\sum_{i=0}^{\ell} i^n$ は Bernoulli 数によって

$$\sum_{i=0}^{\ell} i^n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(\ell+1)^{n+1-k}$$

と表される.

定理 5 と定理 8 から Bernoulli 数と $a_{n,k}$ の間に関係があることが分かり, これら定理の 2 つの式を比べることにより次が得られる ([I], 2 項係数の言葉に翻訳した式は [AIK]).

定理 9. 全ての自然数 n に対して

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}a_{n,k}$$

である.

n が 3 以上のとき, Bernoulli 数は 0 になることから $a_{n,k}$ に関する性質として

$$\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{(-1)^k}{k+1}a_{2m+1,k}=0\qquad(m\in\mathbb{N})$$

も分かる.

例 10. セクション 3 の三角形から $a_{4,1}=1, a_{4,2}=14, a_{4,3}=36, a_{4,4}=24$ が分かるので

$$\begin{aligned}B_4&=\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k+1}a_{4,k}\\&=-\frac{1}{2}+\frac{14}{3}-\frac{36}{4}+\frac{24}{5}\\&=-\frac{1}{30}\end{aligned}$$

が得られる.

References

[AIK] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店, 2001

[Go] H. W. Gould, Explicit formulas for Benoulli numbers, Amer. Math. Monthly 79, 1972, 44-51

[Gr] Ralph P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics, Addison-Wesley, 2004

[GKP] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, コンピュータの数学, 共立出版, 1993

[I] M. Iida, On Triangle of numbers, To appear in Josai mathematical monographs

[K] D. E. Knuth, The Art of Computer Programming vol1. Fundamental Algorithms, Addison-Wesley, 1973

[N] 成嶋 弘, 数え上げ組み合わせ論, 日本評論社, 2003

[O] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
`http://oeis.org/`