数理解析研究所講究録
第 1780 巻 2012 年 141-153

図表示された曲面の理解度調査報告

工学院大学・基礎教養教育部門　北原 清志 (Kiyoshi Kitahara)
Division of Liberal Arts,
Kogakuin University

東邦大学・薬学部　高遠 節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Pharmaceutical Sciences,
Toho University

1 はじめに

今回は，コンピュータによって描かれた曲面を「学生がどの程度正確に把握しイメージ化できるか」について調査した結果を報告し，合わせて不正確な理解や曖昧なイメージの特徴を誤答の分類を通して明らかにする．問題として扱う曲面は多変数関数の極値問題の単元で代表例として取り上げる関数

$$z=x^{3}+y^{3}-3xy$$

のグラフである．この単元は理系の大学または高等専門学校の基礎数学において必ず扱う単元であり，微積分学の中心課題の一つである．特に 2 変数関数の極値問題は直感的なグラフが描きやすく比較的抽象度が低いので初学者を対象とする基礎数学担当の教員にとっては非常に貴重な教材であると考えられる．

調査は 3 つのクラスの学生を対象に，極致問題の授業の導入部分におけるイメージ化のための作業課題として実行した．印刷配付物をメインに扱い，プロジェクタを補助教材として用いた．特に印刷された曲面の形状を十分把握してもらうために，数式処理ソフトの描画機能を直接用いて描いた曲面をプロジェクタで投影し，様々な方向から観察させた．実際の作業は曲面に対して座標軸がどのように見えるか，曲面の背後に隠れて見えない部分と隠れていない部分とを区別してプリントに書き込むことである。

プリントは TEX を用いて作成し，プリントに載せた図形はすべて KETpic を用いて描いている．KETpic は単色線画を基本とした描画機能を持ち，精度の高い出力が可能である．線画の特徴を生かしたシンプルで情報量を抑えた表現により，初心者にとって全体像を把握しやすくグラフの特徴へ自然と注意が向くような画像を生成することができる．

2 調査方法

本節では調査にあたっての作業手順を箇条書きに記述し，調査の状況を明らかにする．

1. 印刷配布物中の画像はKETpicによって生成した曲面の全体図・断面図・拡大図などで，平行投影を用い陰線処理を施してある．座標軸は全て点線で陰線処理をせずに描いてある．

2. 数式処理ソフト上で同一曲面のグラフを描き，それをプロジェクタによって大画面に投影し回転して，様々な方向から曲面の様子を観察させた．数式処理ソフトによる描画では座標軸に関する陰線処理は行われていない．

3. 座標軸の見えている部分を実線でプリントの図中に書き込ませる作業を行わせた．作業の経過を通してより詳細に曲面の様子を観察し理解を深めることができる．

授業を行ったクラスは3クラスあり，A, B, C と名付ける．学生数は順に49名，47名，41名である．これらのクラスは作業手順2. における曲面の観察時間に違いがあり，

A: 5分程度，B: 10分程度，C: 15分程度

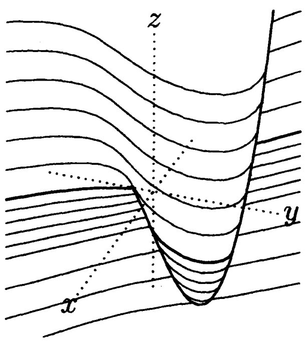
となっている．

3　問1，問2に関する調査結果

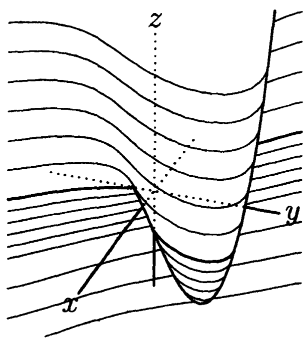
3.1　問1の提示，解答と座標軸の分割点

問1は曲面を xy 軸の正方向から見た平行投影図で，輪郭線と $z=0$ を表わす等高線が太い線で描かれている．ここで黒丸で表された座標軸の分割点と各座標軸に付随した記号 x_1, y_1, z_1 は次の意味を表わす．x_1 は図示された x 軸の部分区間で最大値（x 軸正方向の端点）から最初の黒丸までを表わす．最初の黒丸から第2の黒丸までの区間は x_2 と表し，第2の黒丸から x の最小値までの部分区間は x_3 と表わす．y 軸，z 軸についても同様である．さらに，誤答例の中に出てくる y_4z_1 などの記号は y_4 部分と z_1 部分の両方が違っておりそれ以外の部分は正解であることを表わす．また煩雑さを避けるために $x_1x_2x_4$ のように同一軸上に複数の誤りがある場合は x_{124} と表わす．問2から問4も記号の意味はここで解説したものと全く同じである．

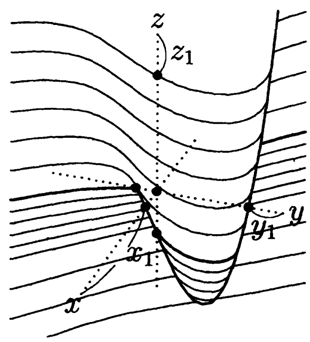
これらの分割点は学生の答案を精査し，誤答を分類する上で必要であると判断した結果である．



問1の提示



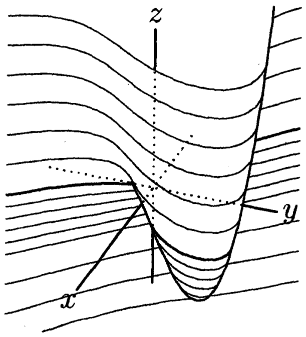
問1の解答



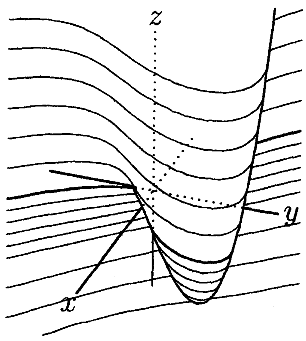
座標軸の分割点

3.2　問１の誤答例と正答率及びクラス毎の全誤答数比較

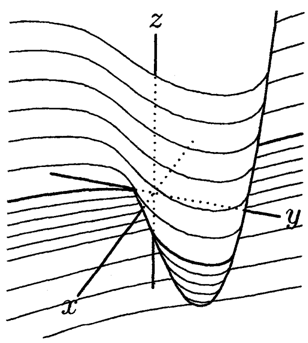
問１の誤答例を多いものから順に例示したものが下図である．問１の全誤答数91のうち誤答数は左から順に20, 11, 10である．



誤答例1:z_1



誤答例2:y_4



誤答例3:y_4z_1

問１の正答率は　Ａクラス:28.6%，Ｂクラス:34.0%，Ｃクラス:39.0%　である．プロジェクタによる投影図をみる時間数に応じて正答率が上がっていることがわかるが，正答率最高のＣクラスでは15分程度様々な方向から曲面を見ているにもかかわらず正答率は39%に止まっている．曲面理解の難しさを反映している結果と言えよう．

次の表は座標軸の部分区間ごとの誤答数を各クラスの人数比（%）で表したものであり全クラスの実誤答数の多い順に並べてある．表中の右端の欄(Total)は各クラスの人数を100名換算したときの誤答数である（誤答数の比例外挿・内挿，或いは100で割って一人当たりの平均の間違え箇所と考えることもできる）．

	z_1	y_4	x_2	z_4	y_2	z_3	y_3	z_2	y_1	x_3	x_1	Total
Ａクラス	41	33	27	24	29	20	12	14	16	14	10	241
Ｂクラス	47	36	23	21	17	19	19	17	9	4	2	215
Ｃクラス	29	27	10	10	0	5	7	2	0	0	2	93
全クラス	39	32	20	19	16	15	13	12	9	7	5	188
実誤答数	54	44	28	26	22	21	18	16	12	9	7	257

問１における誤答数の各クラス毎の人数比

表から読み取れる誤答の特徴を箇条書きにすると次のようになる．

1. プロジェクタやプリントの観察を続けて10分〜15分の間に曲面の特徴に関する理解が大きく進むと考えられる．

2. z_1の誤答数が各クラスとも最も多い．曲面が全空間に広がっていることは説明し

てあったが，図から得られる印象に引きずられる傾向を示している．また，等高線の図示に問題があり，z 軸を覆うまで描く必要があることを示唆している．

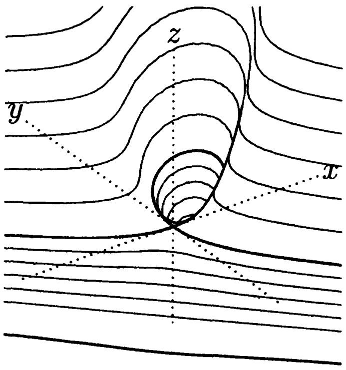
3. y_4 の誤答数が各クラスとも2番目に多い．y 軸を棒のように考えて日常生活上の事例からの類推を行ったと考えられる．

4. x_2 の誤答数の多さと x_3 の少なさとは関連があるように思われる．原点を基準にして見える見えないを判断している可能性がある．

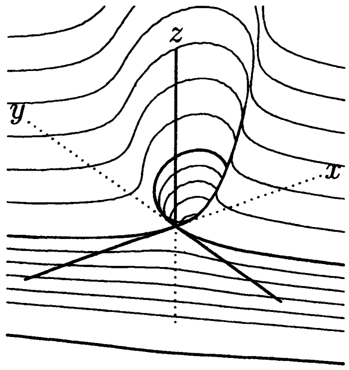
5. z_4 は曲面との関わりが複雑なので判断が難しいようである．

6. x_1 と y_1 の誤答数が少ないことが特徴的である．

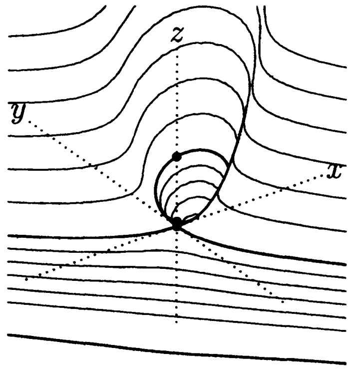
3.3　問2の提示，解答と座標軸の分割点



問2の提示

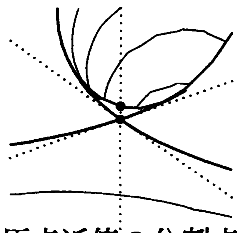


問2の解答



座標軸の分割点

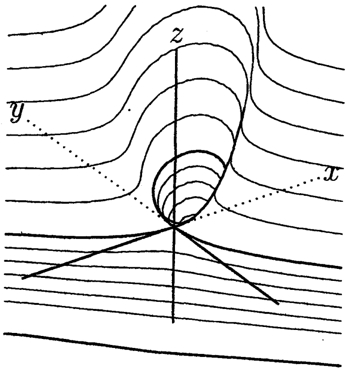
問2における座標軸の分割点については，右図原点近傍での拡大図のように接近した2点を設定していることに注意が必要である．


原点近傍の分割点

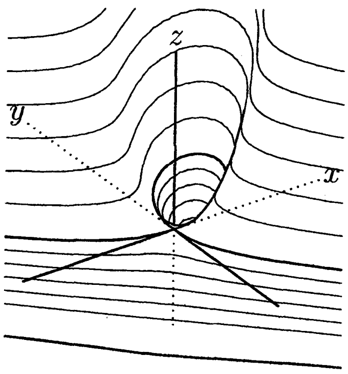
3.4　問2の誤答例と正答率及びクラス毎の全誤答数比較

問2の誤答例を多いものから順に例示したものが次図である．問2の全誤答数88のうち誤答数は左から順に 15, 12, 9 である．

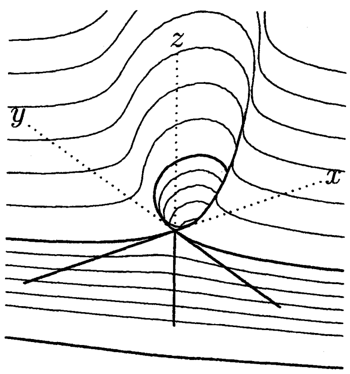
問2の正答率は　Aクラス:8.2%，Bクラス:48.9%，Cクラス:53.7%　である．
Aクラスの正答率が異常に低い理由は不明だが，各座標軸に関する誤答数が他のクラスと比較して均等に高くなっていることがわかる．B,Cクラスの結果より，プロジェクタによる投影図をみる時間数に応じて正答率が上がっていることがわかるが，問1に比べて座標軸の分割数が少ないために正答率が高くなっていると考えられる．



誤答例 1:z_4



誤答例 2:z_3



誤答例 3:z_{1234}

次表は問 1 の対応する表と同じ内容のものである.

	z_3	y_1	z_4	y_2	x_1	x_2	z_2	z_1	Total
A クラス	49	37	33	35	33	31	31	27	273
B クラス	15	28	26	17	23	13	9	11	140
C クラス	27	10	17	15	2	10	15	15	110
全クラス	31	26	26	23	20	18	18	18	179
実誤答数	42	35	35	31	28	25	25	24	245

問 2 における誤答数の各クラス毎の人数比

表から読み取れる誤答の特徴を箇条書きにすると次のようになる.

1. 問 1 の実誤答数 257 に対して問 2 の実誤答数は 245 である. 問 1 よりも座標軸の分割数が少なく, B,C クラスの正答率が問 1 よりも高いにも拘らず実誤答数は余り変わらない. 各クラスの実誤答数は問 1,A=118,B=101, C=38, 問 2,A=134,B=66,C=45 となっているので, A クラスの正答率の低さのみが原因ではない.

2. z_3 に対する誤答が最も多いが, 曲線 $z = 0$ を輪郭線と同じ太さで強調表示したことが誤りを誘う原因の一つであると考えられる. そのことは曲線 $z = 0$ で z 軸を分割し上下で見え方を変えている答案があることからも推察される.

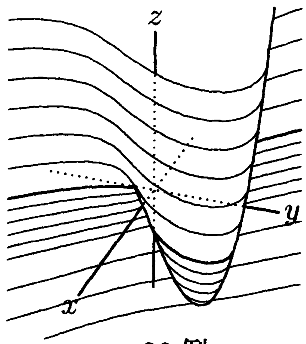
3. y_1 と y_2 の誤答が目立つけれども次節で行う誤答の分類を見れば, x 軸 y 軸に関する対称性は理解していると考えられる.

4. z_4 の間違えは曲面の理解と強く結びついているが. 鞍点の状況はかなり理解しにくいようである.

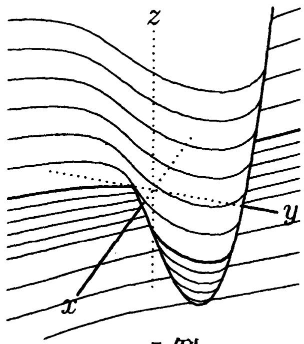
3.5 問 1 に関する誤答の分類

問 1 の全誤答数 91 を傾向が比較的似ている 4 つの類とその他に分類した.

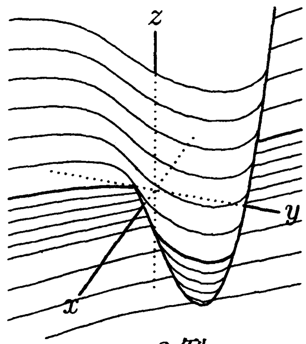
3.5.1 誤答分類 1：$\boldsymbol{xy}$ 軸が正解であるもの（誤答数 31）



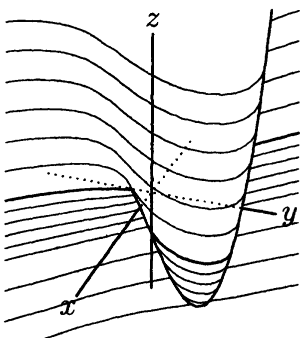
z_1 , 20 例



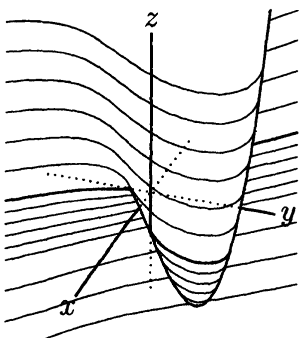
z_4 , 5 例



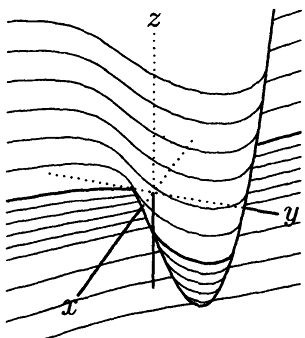
z_{14} , 3 例



z_{123} , 1 例

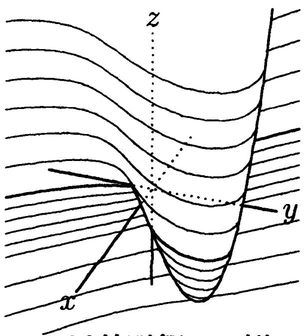


z_{1234} , 1 例

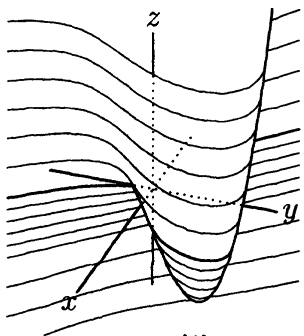


z_3 , 1 例

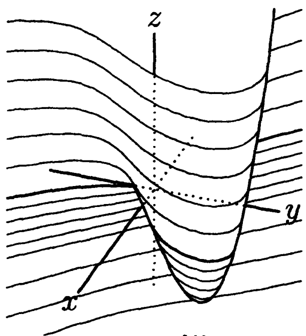
3.5.2 誤答分類 2：$\boldsymbol{y_4}$ が誤答であり $\boldsymbol{x}$ 軸は正解であるもの（誤答数 24）



y_4 以外正解 , 11 例

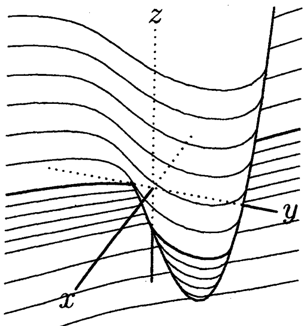


z_1 , 10 例

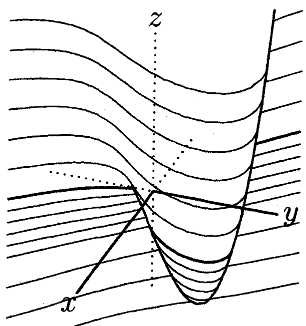


z_{14} , 1 例

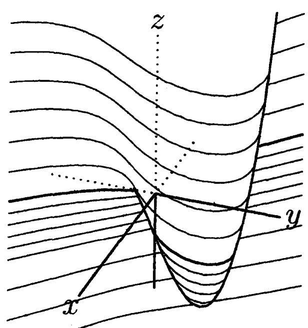
3.5.3 誤答分類 3：$\boldsymbol{x_2}$ が誤答であるもの（誤答数 19）誤答に多様性がある



x_2 以外正解 , 2 例

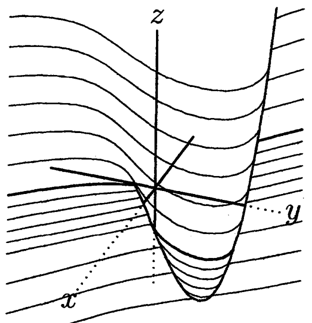


y_2z_4 , 2 例

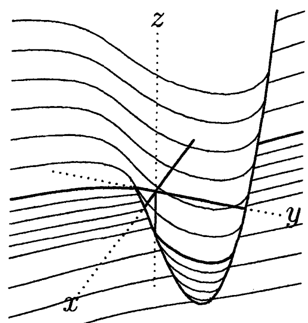


y_2z_3 , 2 例

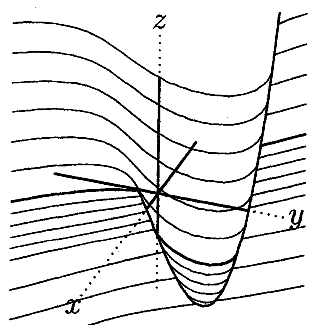
3.5.4 誤答分類 4：$\boldsymbol{x_{123}}$ が誤答であるもの（誤答数 5）座標軸が輪郭線の内部



$y_{1234}z_{1234}$, 3 例



$y_{123}z_{34}$, 1 例

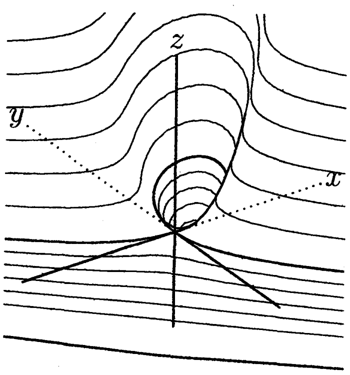


$y_{1234}z_{234}$, 1 例

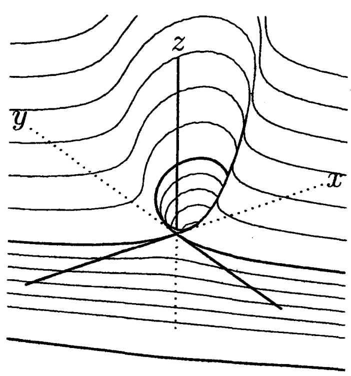
3.6 問 2 に関する誤答の分類

問 2 の全誤答数 88 を傾向が比較的似ている 4 つの類とその他に分類した.

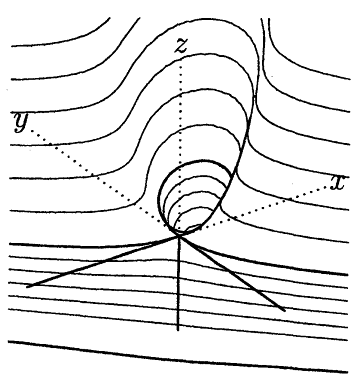
3.6.1 誤答分類 1：$\boldsymbol{xy}$ 軸が正解であるもの（誤答数 41）全誤答中半数弱



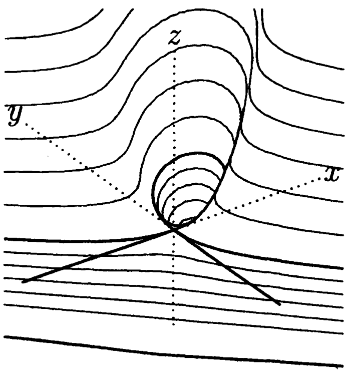
z_4 , 15 例



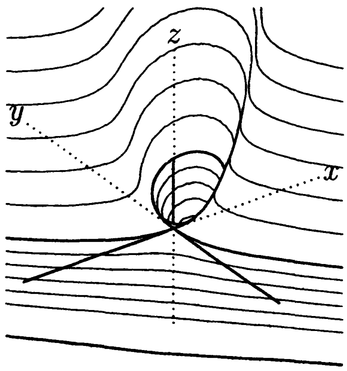
z_3 , 12 例



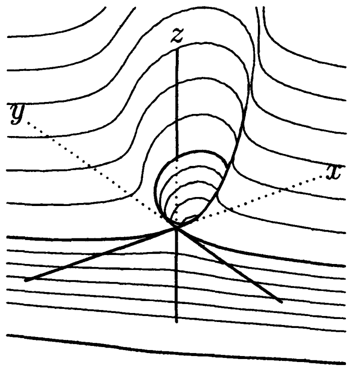
z_{1234} , 9 例



z_{123} , 3 例

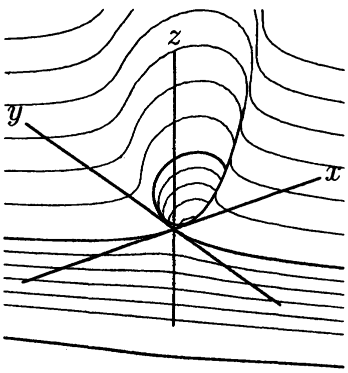


z_{13} , 1 例

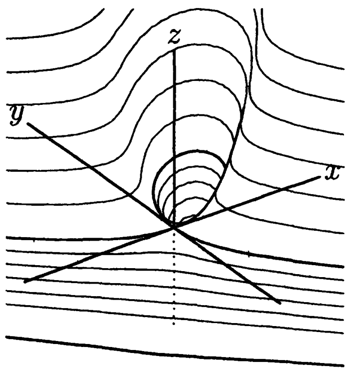


z_{234} , 1 例

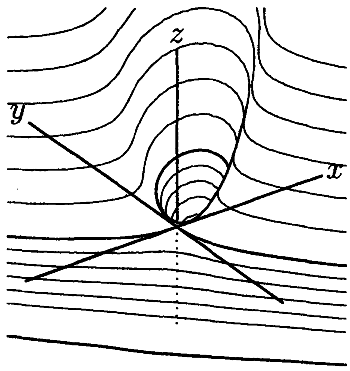
3.6.2 誤答分類 2：$\boldsymbol{x_1 y_1}$ が誤答であるもの（誤答数 13）



z_4 , 5 例

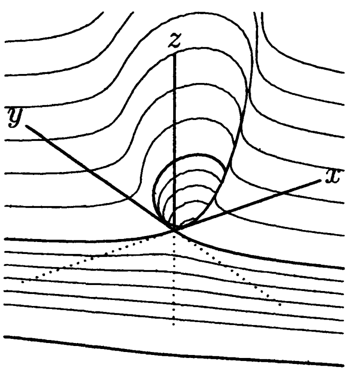


$x_1 y_1$ 以外正解 , 4 例

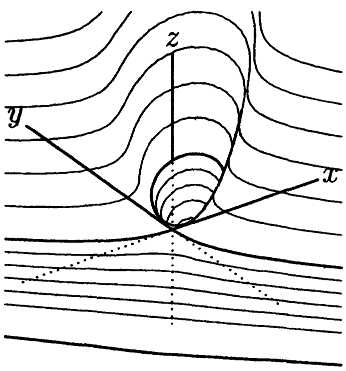


z_3 , 1 例

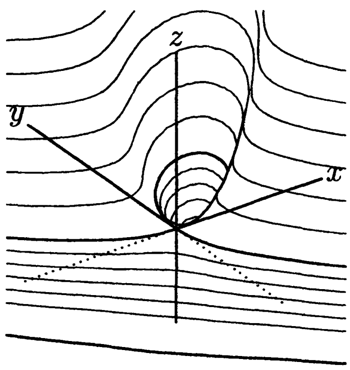
3.6.3 誤答分類 3：$\boldsymbol{x_{12} y_{12}}$ が誤答であるもの（誤答数 12）



$x_{12} y_{12}$ 以外正解 , 5 例

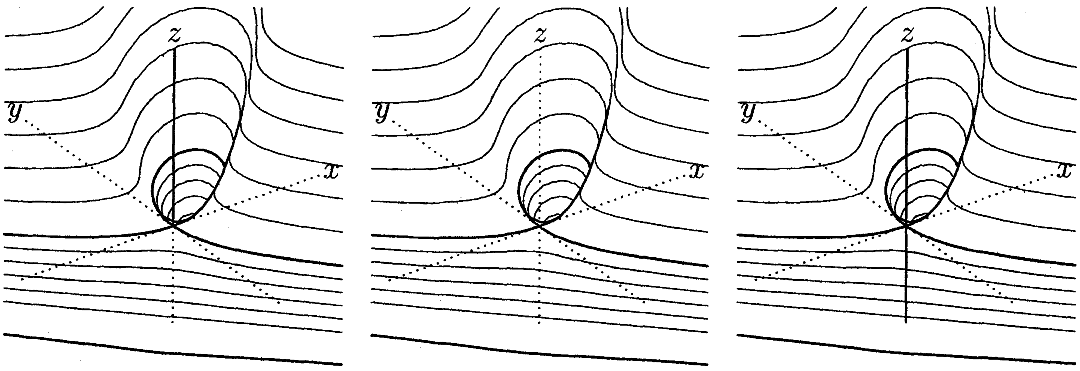


z_{23} , 4 例



z_4 , 2 例

3.6.4 誤答分類4：x_2y_2 が誤答であるもの（誤答数8）



x_2y_2 以外正解, 3例　　z_{123}, 2例　　z_4, 1例

3.7 問1と問2の誤答分類のまとめ

3.7.1 問1誤答分類のまとめ

分類1と分類2の中で z_1 のみの間違え41例（分類1が20例，分類2が21例）は等高線の表示が不適切であった可能性を考慮すると，曲面の理解が比較的良いと考えられる．また，本報告ではグラフを表示しなかった誤答の内 y_1 のみの間違えが2例あったが，その他は全て1例ずつで（誤答数91の内30例），間違え方が非常に多様であることがわかる．特に誤答分類3,4が示す特徴から，x 軸の状態が正確にイメージできないと他の部分についても多様な間違えを犯しやすいということができる．誤答分類4では輪郭線の内側のみに実線を描いているがどのような基準を適用したのか不明である．

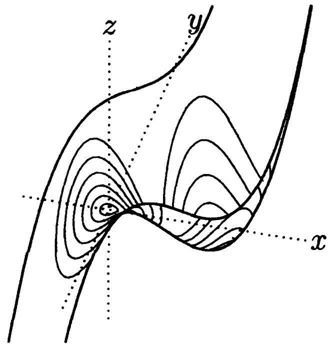
3.7.2 問2誤答分類のまとめ

分類1〜4は誤答ではあってもxy軸の対称性が意識されていそうなものを集めている．正解も含めてグラフの対称性に反応している答案は $123/137 = 90\%$ に上ると考えられる．また誤答の多様性についても，88の誤答中20例が他と同じものがない1例だけの誤答となっており，間違え方が多様であるといえる．誤答分類1の z_{13}, z_{234} あるいは誤答分類3の z_{23} のように曲面の形状よりも目立つ線を境に見える見えないの境界と判断する傾向が一部にある．これは不必要な情報によって間違ったイメージを持ってしまうことがあることを示している．そこで図形作成者は不必要な情報はなるべく少なくして図を作成する必要がある．

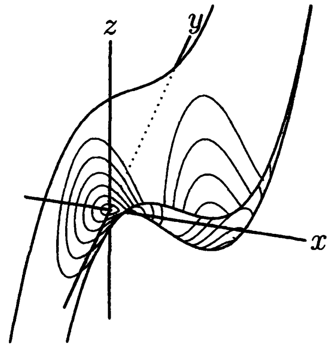
4　問3，問4に関する調査結果

問3，問4は鞍点と極小点の近傍を拡大し $y = x$ に平行な平面で切り取った図形を表わす．問4の方は鞍点と極小点を通る平面 $y = x$ で切り取っている．

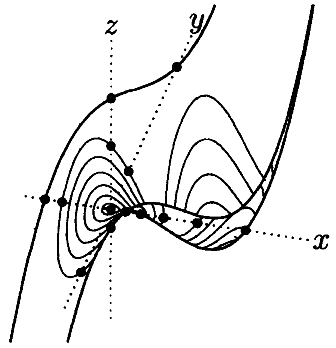
4.1　問3の提示，解答と座標軸の分割点



問3の提示



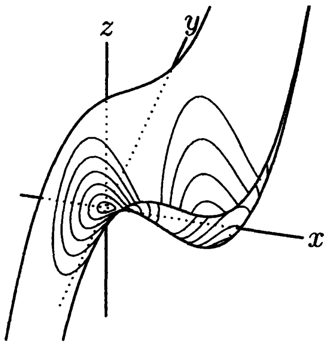
問3の解答



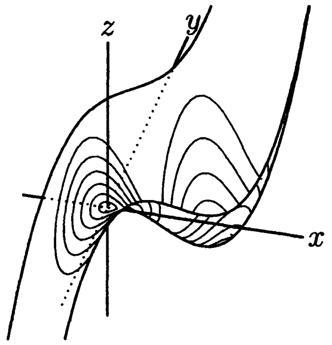
座標軸の分割点

4.2　問3の誤答例と正答数及びクラス毎の全誤答数比較

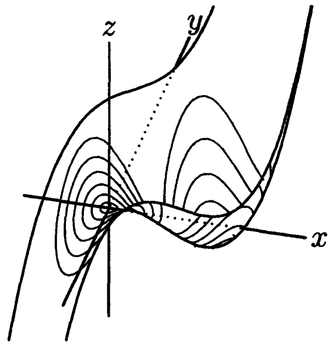
正答数は133名中（無回答の4名を除く）5名であった．誤答例を多いものから順に例示したものが次図であり，全誤答数128のうち誤答数は左から順に26, 4, 3である．



誤答例 1:$x_{234578}y_{45}z_{23}$



誤答例 2:$x_{78}y_{45}$

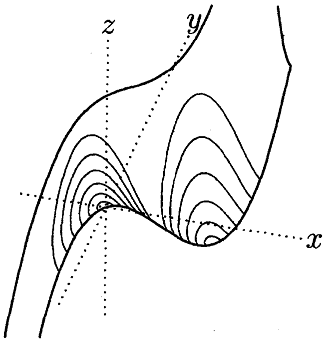


誤答例 3:x_{23456}

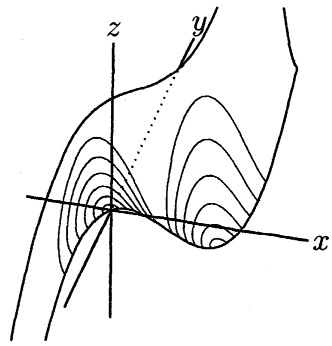
	x_2	x_4	x_3	x_5	x_8	x_7	y_4	y_5	z_3	z_2	x_6	y_3	y_2	x_9	y_1	x_1	z_5	z_4	z_1	Total
Aクラス	65	65	61	67	65	67	67	63	59	57	41	33	37	33	24	17	24	13	17	876
Bクラス	64	64	62	57	62	60	57	60	38	38	34	30	19	11	19	13	13	13	9	721
Cクラス	75	75	78	73	63	58	58	50	43	43	30	13	10	15	15	13	5	10	8	730
全クラス	68	68	66	65	63	62	61	58	47	46	35	26	23	20	20	14	14	12	11	777
実誤答数	90	90	88	87	84	82	81	77	62	61	47	34	30	26	26	19	19	16	15	1034

問3における誤答数の各クラス毎の人数比

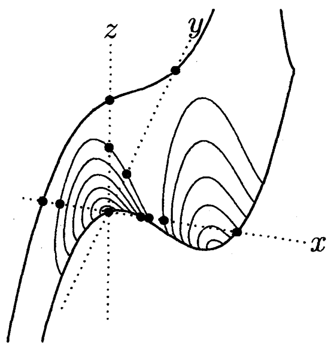
4.3 問 4 の提示，解答と座標軸の分割点



問 4 の提示



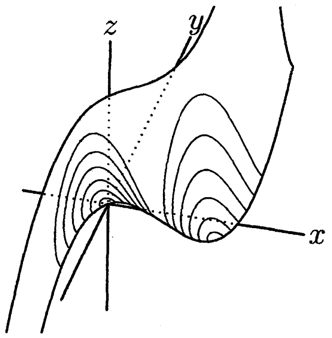
問 4 の解答



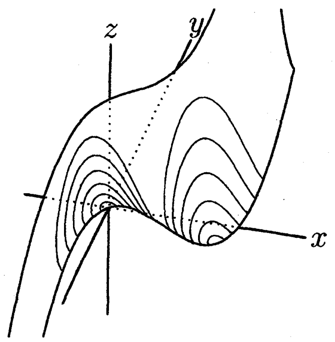
座標軸の分割点

4.4 問 4 の誤答例と正答数及びクラス毎の全誤答数比較

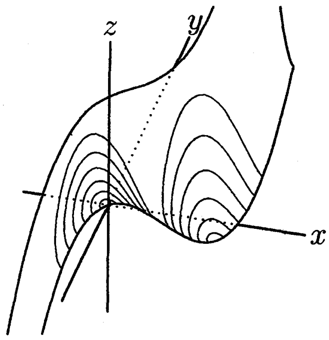
正答数は 130 名中（無回答の 7 名を除く）11 名であった．誤答例を多いものから順に例示したものが次図であり，全誤答数 119 のうち誤答数は左から順に 26, 20, 6 である．



誤答例 1:$x_{23467}z_{23}$



誤答例 2:$x_{234567}z_{23}$



誤答例 3:x_{234567}

	x_2	x_7	x_3	x_4	x_6	z_2	z_3	x_5	y_3	y_2	y_1	x_8	x_1	z_1	z_4	y_4	Total
A クラス	80	75	73	77	75	64	64	55	23	25	18	18	16	11	14	14	700
B クラス	62	66	64	62	60	64	60	36	28	17	13	6	9	13	13	4	574
C クラス	74	74	72	69	74	56	49	33	13	10	15	21	13	8	5	10	597
全クラス	72	72	69	69	69	62	58	42	22	18	15	15	12	11	11	9	624
実誤答数	93	93	90	90	90	80	75	54	28	23	20	19	16	14	14	12	811

問 4 における誤答数の各クラス毎の人数比

4.5 問3，問4に関するまとめ

問3，問4共に正答数が非常に少なかった．切断面の図はプロジェクタでは見せていないので今までの全体図からイメージしなければならないのだが，やはりかなり難しいようである．曲面の描き方は問1，問2とは違って，等高線によるものではなく，局所的な性質がよりはっきりするように xy 平面上の同心円を曲面に投影する方法を用いた．

どちらも誤答数に関するクラス毎の違いはほぼ無いと考えて良いであろう．問3の誤答は誤答例1に一点集中しておりその他は多様な仕方でばらけている．問4の誤答は同様に誤答例1と誤答例2に集中している．

表中の実誤答数に着目すると次のような特徴を見出すことができる．
問3において実誤答数90〜61に対応する間違えは表のほぼ半分を占め間違え数の多い側に属している．各座標軸の対応する間違え部分は x_5 のみを例外としてグラフの輪郭線または境界線の内側に属しかつ見えている部分である．これに対して実誤答数47〜15に対応する間違えはやはり表のほぼ半分を占め間違え数の少ない側に属している．各座標軸の対応する間違え部分はグラフの輪郭線または境界線の内側に属しかつ見えないか外側に属して見えている部分である．このことから，座標軸の一部分で輪郭線または境界線の内側にあるものは曲面の形状とは関係なく見えず，外側にあるものは見えると判断する傾向にあるように感じられる．この傾向は誤答例1が26例（誤答例1よりも不完全ではあるが同傾向の誤答がさらに4例ある）という最も多くの集団を形成していることからも窺える．問4の実誤答数に関しても，93〜54に対応する部分と28〜12に対応する部分に分割すると x_5 のみを例外として問3で分析したことと全く同じことがいえる．問4の場合は問3よりも実誤答数の上でこの分割はよりはっきりしていると考えられる．誤答例の面から見ると誤答例1,2で46例，不完全ではあるが同傾向の誤答がさらに7例ある．問4の図は3次元的なイメージが少ない図になっているので，図表現の面からの問題があるかもしれない．なお例外の x_5 部分に関しては輪郭線または境界線に接するように存在して見えにくいので，見える見えないの判断が x_{234} の部分に引きずられたと考えられる．

5 まとめと今後の課題

3次元図から曲面の形状を正確に把握するのはかなり困難な認知作業であることがわかった．手作業なども取り入れて十分時間をかける必要があり，特に鞍点近傍については丁寧な指導が望まれる．今回用いた配布教材とプロジェクタを併用する方法は一つの方向として，改良を続けながら今後も使用してゆきたい．

今回は学生の図形認識における特徴を明らかにするために全ての誤答に対応するリストを作成した．このリストをデータとして K_ETpic のプログラム機能を駆使して全答案の図を再現し，希望する形で出力できるようにデータ化を行った．抽象記号としてのリストのみでは図形的な特徴がイメージしにくいので，具体的な再現図とリストの両方を用いて誤答の分類を行った．また，これらのデータを用いて，今回の報告の中に見やすい形で誤答案の例示を行うことができた．図形に関する答案をデータ化する今回の手法

は，データの蓄積の面でも重要である．学生の図形認識の特徴を様々な角度から明らかにしてゆくことは，教材作成の面からばかりではなく授業構成の点からも重要性が増してゆくと思われるが，今後も今回の手法を改良しつつ活用してゆくことが必要である．

参考文献

[1] 金子真隆，高遠節夫：「KETpicの利用と教材発掘　—線形代数と微分方程式を中心に—」，
京都大学数理解析研究所講究録 1735「数式処理と教育」，pp.57–72, 2011

[2] 北原清志, 高遠節夫：「極値問題の図表示と曲面の形状把握に関する調査」，京都大学数理解析研究所講究録 1735「数式処理と教育」，pp.162–172, 2011

[3] 山下哲，高遠節夫：「Making Materials based on Symbolic Thinking and Mathematical Understanding （Symbolic Thinking に基づく教材作成と数学の理解）」，
京都大学数理解析研究所講究録 1735「数式処理と教育」，pp.173–180, 2011

[4] Kitahara K., Abe T., Kaneko M., Yamashita S., & Takato S.: "Towards a More Effective Use of 3D-Graphics in Mathematics Education —Utilization of KETpic to Insert Figures into LATEX Documents—", to appear in The International Journal for Technology in Mathematics Education, Vol. 17, Number 4, 2010

[5] 金子真隆，阿部孝之，泉源，山下哲，深澤謙次，北原清志，高遠節夫：「線形代数学の教科書における挿図の利用について　—KETpic 利用の可能性を中心に—」，
京都大学数理解析研究所講究録 1674「数式処理と教育」，pp.12–25, 2010

[6] 北原清志, 高遠節夫：「全微分に関する図入り教材の作成例とその研究授業報告」，
京都大学数理解析研究所講究録 1674「数式処理と教育」，pp.132–145, 2010

[7] Takato S., Akemi G., & Iglesias A.: "Use of ImplicitPlot in Drawing Surfaces Embedded in LaTeX documents", 2009 International Conference on Computational Sciences and its Applications, IEEE, 2009

[8] 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 北原清志, 越川浩明, 深澤謙次, 高遠節夫：「空間曲面の稜線描画の一方法について—Scilab 版 KETpic の改良—」日本数学会 2009 年度年会応用数学分科会講演アブストラクト, 2009

[9] 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 関口昌由, 山下哲, 北原清志, 深澤謙次, 高遠節夫:「挿図教材の実態調査について」，日本数学教育学会誌第 91 回総会特集号, p.543, 2009

[10] 北原清志, 高遠節夫: 「級数を扱う授業における KETpic で作成した挿図教材の使用」，京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.90–105, 2009