数理解析研究所講究録
第 1781 巻 2012 年 76-96

単調正規空間と順序数の部分空間の積

神奈川大学 工学部　平田 康史 (Yasushi Hirata)
Faculty of Engineering, Kanagawa University
大分大学 教育福祉科学部　家本 宣幸 (Nobuyuki Kemoto)
Faculty of Education and Welfare Science, Oita University
神奈川大学 工学部　矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

概 要

単調正規空間と順序数の部分空間の積がオーソコンパクト, あるいは正規かつ長方形的になるための条件を, 閉集合に同相な定常集合の状態と, 空間の各点の近傍フィルターの性質によって特徴付ける.

1 はじめに

空間は正則な T_1 空間と仮定する.

定義 1. 非孤立点が高々 1 つしかない位相空間を**ほとんど離散**な空間とよぶ.

1.1 オーソコンパクト, 正規, あるいは長方形的積空間

本稿では, 次の問題に関して考察したい.

問題 1. 積空間 $X \times Y$ がオーソコンパクト, 正規, あるいは長方形的になるのはどのようなときか?

まずは, オーソコンパクトと, 長方形的積空間の定義を確認しておく.

定義 2.

- 空間の開集合族 $\mathcal{U}$ が**内部保存**であるとは, 任意の $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ に対して $\bigcap \mathcal{U}'$ が開集合になること.

- 空間が**オーソコンパクト**であるとは, 任意の開被覆が内部保存な開細分をもつこと.

開集合族について,

$\boxed{\text{有限} \Rightarrow \text{局所有限} \Rightarrow \text{点有限} \Rightarrow \text{内部保存}}$

なので, 空間については

$\boxed{\text{コンパクト} \Rightarrow \text{パラコンパクト} \Rightarrow \text{メタコンパクト} \Rightarrow \text{オーソコンパクト}}$

となる.

定義 3.

- 積空間 $X \times Y$ の部分集合族 $\mathcal{U}$ が**長方形的コゼロ** であるとは, $\mathcal{U}$ の各メンバーが, コゼロ集合 $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$ の積 $P \times Q$ の形をしていること.

- 積空間 $X \times Y$ が**長方形的**であるとは, $X \times Y$ の任意の有限コゼロ被覆が, σ-局所有限な長方形的コゼロ細分をもつこと.

長方形的積空間については次のようなことが知られている.

定理 1 (Terasawa 1972, see [2]). 任意の空間 X とコンパクトな空間 C の積空間 $X \times C$ は長方形的である.

定理 2 (Pasynkov 1975 [14]). 完全正則空間 X, Y の積空間 $X \times Y$ が長方形的ならば,

$$\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y.$$

順序数の部分空間の積に関しては, オーソコンパクト性, 正規性, あるいは長方形性の関係は次のようになっていることがわかっている.

定理 3 (Kemoto-Ohta-Tamao 1992 [5], Kemoto-Yajima 1992 [6], Kemoto-Yajima 2007 [8]). A と B は順序数の部分空間とする.

(1) 次は同値である.

  (a) $A \times B$ はオーソコンパクト.

  (b) $A \times B$ は正規かつ長方形的.

  (c) $A \times B$ は *shrinking* 性をもつ.

  (d) $A \times B$ は族正規.

  (e) $A \times B$ は正規.

(2) 次は同値である.

  (f) $A \times B$ は長方形的.

  (g) $A \times B$ は可算パラコンパクト.

(3) $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は長方形的であるが, 正規ではない.

1.2 単調正規空間

定義 4. 空間 X の各点 x とその開近傍 U に対して, 開集合 $H(x,U)$ を次の条件を満たすように割り当てることができるとき, 空間 X は**単調正規**であるという.

- $x \in H(x,U) \subseteq U$,
- $H(x_0,U_0) \cap H(x_1,U_1) \neq \emptyset$ ならば, $x_0 \in U_1$ または $x_1 \in U_0$.

単調正規な空間は順序数の部分空間, 距離空間, ほとんど離散な空間の共通の一般化になっている. いくつかの位相的性質間の一般的な強弱を図式にまとめておく.

順序数	$\Rightarrow$	LOTS
$\Downarrow$		$\Downarrow$
順序数の部分空間	$\Rightarrow$	GO-空間
		$\Downarrow$
		単調正規 +オーソコンパクト
		$\Uparrow$
距離空間	$\Rightarrow$	単調正規
ほとんど離散	$\Rightarrow$	+パラコンパクト

パラコンパクト	単調正規
$\Downarrow$	$\Downarrow$
shrinking + 族正規	
$\Downarrow$	$\Downarrow$
shrinking	族正規
$\Downarrow$	$\Downarrow$
正規	

shrinking		
$\Downarrow$		
正規+ 可算パラコンパクト	$\Rightarrow$	可算パラコンパクト
$\Updownarrow$		$\Downarrow$
正規+ 可算メタコンパクト	$\Rightarrow$	可算メタコンパクト

状況を限定して, 次のような問題を考えたい.

問題 2. X は単調正規空間, Y は特殊な空間とする, 例えば,

- 順序数の部分空間,
- コンパクトな空間,
- ほとんど離散な空間, など.

積空間 $X \times Y$ がオーソコンパクト, 正規, あるいは長方形的になるのはどんなときか?

1.3 定常集合に関する記法

単調正規空間 X の位相的性質には,

$\boxed{\text{正則非可算基数の定常集合 (stationay set) に同相な } X \text{ の閉集合}}$

が重要な影響を及ぼすことが多々ある. なので, この後の議論の便宜のため, いくつかの記法を用意しておきたい.

定義 5. 位相空間 X に対して,

$$\mathcal{S}(X) \overset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{l}\text{正則非可算基数の定常集合に同相な}\\ X \text{ の閉集合全体の族}\end{array}}$$

$$\mathcal{S}^o(X) \overset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{l}\text{正則非可算基数の定常集合で}\\ X \text{ の閉集合に同相なもの全体の族}\end{array}}$$

正則非可算基数 κ を明示して, 次のような書き方もする.

定義 6. 位相空間 X と正則非可算基数 κ に対して,

$$\mathcal{S}(X,\kappa) \overset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{l}\kappa \text{ の定常集合に同相な}\\ X \text{ の閉集合全体の族}\end{array}}$$

$$\mathcal{S}^o(X,\kappa) \overset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{l}\kappa \text{ の定常集合で}\\ X \text{ の閉集合に同相なものの全体}\end{array}}$$

X は空間, κ は正則非可算基数とする.

$$\begin{array}{ccccl}
 & \mathcal{S}^o(X) & & \mathcal{S}(X) & (\kappa \text{ を動かして}) \\
 & \cup\!| & & \cup\!| & \\
 & \mathcal{S}^o(X,\kappa) & & \mathcal{S}(X,\kappa) & (h \text{ を動かして}) \\
 & \Cup & & \Cup & \\
h: & S & \longrightarrow & E & ;\ \text{同相写像} \\
 & \cap\!| & & \cap\!| & \\
 & \kappa & & X & \\
 & \text{定常集合} & & \text{閉集合} &
\end{array}$$

単調正規空間の研究は, 次の画期的な結果によって一気に進歩したと言える.

定理 4 (Balogh-Rudin 1992 [1]). $\mathcal{U}$ は単調正規空間 X の開被覆とする．このとき，$\mathcal{U}$ の σ-素な開部分細分 $\mathcal{V}$ と，$\mathcal{S}(X)$ のメンバーからなる疎な族 $\mathcal{F}$ で，$X \setminus \bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{F}$ となるものが存在する．

この定理から，次の系が得られる．

系 1 (Balogh-Rudin 1992 [1]). 単調正規空間 X について，次は同値．

- X はパラコンパクト，
- X はメタコンパクト，
- $\mathcal{S}(X) = \emptyset$.

定義 7. $E \in \mathcal{S}(X)$ が $U \subseteq X$ に**ほとんど含まれる**とは，ある $\gamma < \kappa$ に対して $h[S \cap (\gamma, \kappa)] \subseteq U$ となることとする．ここで，S は正則非可算基数 κ の定常集合，$h : S \to E$ は同相写像．

次の補題も Balogh-Rudin の定理を使って示すことができる．

補題 1. 単調正規空間の開被覆 $\mathcal{U}$ が正規被覆になるためには，各 $E \in \mathcal{S}(X)$ が $\mathcal{U}$ のいずれかのメンバーにほとんど含まれることが必要十分である．

1.4 すでに知られている事実

順序数 κ について，$\kappa + 1$ はコンパクトであることはよく知られている．

定理 5 (Tamano 1960 [17], Kunen). 次は同値．

(a) X はパラコンパクト．

(b) 基数 $\kappa \geq w(X)$ について，$X \times (\kappa + 1)$ は正規．

定理 6 (Junnila 1979 [9], Junnila -Yajima 1998 [10]). 完全正則空間 X について，次は同値．

(a) X はメタコンパクト．

(b) 基数 $\kappa \geq w(X)$ について，$X \times (\kappa + 1)$ はオーソコンパクト．

系 2. チコノフ空間 X と基数 $\kappa \geq w(X)$ について，$X \times (\kappa + 1)$ が正規ならば，それはオーソコンパクトである．一般には逆は成り立たない．

以上の事実から，コンパクト空間 C に対して，$X \times C$ の正規性はオーソコンパクト性より強いのではないか，という予想が立てられそうであるが，実はそうはならないことがわかっている．特に X が単調正規空間の場合，$X \times C$ のオーソコンパクト性の方が正規性よりも強い．

定理 7 (Yajima 2011 [19]). X は単調正規空間, C はコンパクト空間とする.

(1) $X \times C$ がオーソコンパクトならば, それは正規である.

(2) 次は同値.

- $X \times C$ は *shrinking* 性をもつ (Lazarevic 1996 [12]).
- $X \times C$ は族正規.
- $X \times C$ は正規.

(3) C が濃度 ω_1 の離散空間の1点コンパクト化とすると, $\omega_1 \times C$ は正規だが, オーソコンパクトではない.

上の定理においては $X \times C$ は長方形的であることに注意せよ.

定義 8. *Telgársky* は次のような位相ゲーム $G(\mathrm{DC}, Y)$ を考案した.

Player I	$\mathcal{D}_0$		$\mathcal{D}_1$		$\mathcal{D}_2$		$\cdots$
Player II		F_0		F_1		F_2	$\cdots$

$F_{-1} = Y$ とする. 各 $n \in \omega$ に対し,

- *Player I* は F_{n-1} のコンパクトな部分集合からなる疎な族 $\mathcal{D}_n$ を選ぶ,
- *Player II* は $F_n \subseteq F_{n-1} \setminus \bigcup \mathcal{D}_n$ となるように Y の閉集合 F_n を選ぶ.

Player I が勝つのは $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$ となるとき.

ゲーム $G(\mathrm{DC}, Y)$ において Player I が必勝法をもつような空間は, コンパクト空間やほとんど離散な空間の一般化になっている.

定理 8 (Potoczny 1973 [15], Telgársky 1975 [16]). 空間 Y がコンパクト集合からなる σ-閉包保存な被覆をもつならば, $G(\mathrm{DC}, Y)$ において *Player I* は必勝法をもつ.

Y はコンパクト　　　Y はほとんど離散

$\Downarrow$　　　　　　$\Downarrow$

Y はコンパクト集合からなる σ-閉包保存な被覆をもつ

$\Downarrow$

$G(\mathrm{DC}, Y)$ において Player I が必勝法をもつ

$\Downarrow$

$\mathcal{S}(Y) = \emptyset$

定理 8 は次のように一般化される.

定理 9 (Yajima, to appear [20]). X は単調正規空間, Y はパラコンパクトな空間で, $G(\mathrm{DC}, Y)$ において *Player I* が必勝法をもつようなものとする.

(1) $X \times Y$ がオーソコンパクトならば, $X \times Y$ は正規で長方形的.

(2) $X \times Y$ が長方形的ならば, 次は同値.

- $X \times Y$ は *shrinking* 性をもつ.
- $X \times Y$ は族正規.
- $X \times Y$ は正規.

この場合, $X \times Y$ の正規性から長方形的であることが導かれないことは次の事実からわかる.

定理 10 (Ohta 1981 [13]). *X は正規だがパラコンパクトではない空間とする. このとき, ほとんど離散な空間 Y で, $X \times Y$ は正規だが, 長方形的ではないようなものが存在する.*

この定理を $X = \omega_1$ に適用すれば,

- ほとんど離散な空間 Y で, $\omega_1 \times Y$ が正規だが, 長方形的ではないようなものが存在する.

上の事実と対比して, 定理 3 でも述べたが, 次のことが成り立つことを再確認しておく.

- 順序数の任意の部分空間 A, B について, $A \times B$ が正規ならば, それは長方的である,
- $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は長方形的であるが, 正規ではない.

2 近傍に関する 4 つの性質

この節では, 積空間がオーソコンパクト, 正規, あるいは長方形的になるための必要条件について述べる.

2.1 定常集合との積

問題 3. *S は正則非可算基数 κ の定常集合, Y は位相空間とする. $S \times Y$ がオーソコンパクト, 正規, あるいは長方形的なとき, Y はどんな性質をもたなければならないか?*

この問題に答えるため, 近傍に関する 4 つの性質を定義したい. 定義を述べる前に, 記号と用語をいくつか準備をしておく.

定義 9. S は順序数の集合, $\mathcal{V} = \{V(\xi) : \xi \in S\}$ は集合族とする.

- 順序数 $\xi > 0$ は, 任意の $\gamma < \xi$ に対して, $\gamma < \alpha < \xi$ となる $\alpha \in S$ が存在するならば, S の**極限点**とよばれる,
- $\mathrm{Lim}(S)$ は S の極限点の全体の集合をあらわす,
- 各 $\xi_0, \xi_1 \in S$ について, $\xi_0 < \xi_1$ ならば $V(\xi_0) \supseteq V(\xi_1)$, となっているとき, $\mathcal{V}$ は**減少族** *(あるいは減少列)* であるという,
- $\mathcal{V}$ が減少族で, しかも, 各 $\xi \in S \cap \mathrm{Lim}(S)$ について $V(\xi) = \bigcap_{\zeta \in S \cap \xi} V(\zeta)$ となっているとき, $\mathcal{V}$ は**連続的減少族** *(あるいは連続的減少列)* であるという,

近傍に関する 4 つの性質を定義する.

定義 10. Y は位相空間, $q \in Y$, κ は正則基数, $S \subseteq \kappa$ とする.

- Y が q において **orthocaliber** κ をもつとは, q の近傍からなる任意の列 $\{V(\xi) : \xi \in \kappa\}$ に対して, q の近傍 V で, 共終的 *(cofinal)* に多くの $\xi \in \kappa$ に対して $V \subseteq V(\xi)$ となるようなものが存在すること.
- Y が q において **κ-dop 性** *(= κ-descending open preserving property)* をもつとは, q の近傍からなる任意の減少列 $\{V(\xi) : \xi \in \kappa\}$ に対して, $q \in \mathrm{int}_Y \bigcap_{\xi \in \kappa} V(\xi)$ となること.
- Y が q において **S-codecop 性** *(= S-continuously descending clopen preserving property)* をもつとは, q の *clopen* な近傍からなる任意の連続的減少族 $\{V(\xi) : \xi \in S\}$ に対して, $q \in \mathrm{int}_Y \bigcap_{\xi \in S} V(\xi)$ となること.
- Y が q において **S-docs 性** *(= S-descending open continuously shrinking property)* をもつとは, q の近傍からなる任意の減少族 $\{V(\xi) : \xi \in S\}$ に対して, q の閉近傍からなる連続的減少族 $\{F(\xi) : \xi \in S\}$ で, $F(\xi) \subseteq V(\xi)$ が各 $\xi \in S$ に対して成り立つようなものが存在すること.

Y がすべての点 $q \in Y$ において $***$ 性をもつときは単に, Y は $***$ 性をもつという.

Pressing Down Lemma を使って, 次のことがわかる.

補題 2. S は正則非可算基数 κ の定常集合, Y は位相空間とする.

(1) $S \times Y$ がオーソコンパクトならば, Y は *orthocaliber* κ をもつ.

(2) $S \times Y$ が正規かつ長方形的ならば, Y は κ*-dop* 性をもつ.

(3) $S \times Y$ が長方形的ならば, Y は S*-codecop* 性をもつ.

(4) $S \times Y$ が正規ならば, Y は S-*docs* 性をもつ.

$S \times Y$		Y
オーソコンパクト	$\Longrightarrow$	orthocaliber κ
正規かつ長方形的	$\Longrightarrow$	κ-dop 性
長方形的	$\Longrightarrow$	S-codecop 性
正規	$\Longrightarrow$	S-docs 性

2.2 積に関する条件

問題 4. 位相空間の積空間 $X \times Y$ がオーソコンパクト, 正規, あるいは長方形的のとき, X, Y, $X \times Y$ はどんな性質をもっていなければならないか?

補題 3 (Kemoto-Ohta-Tamao 1992 [5], Kemoto-Yajima 1992 [6], Kemoto-Yajima 2007 [8]). S と T は正則非可算基数 κ の定常集合とする. $S \times T$ が, オーソコンパクト, 正規, 長方形的, 可算パラコンパクトのいずれかならば, $S \cap T$ は κ において定常である.

定義 11. $X \times Y$ が**対角線定常積**であるとは, 任意の正則非可算基数 κ と, $S \in \mathcal{S}^o(X, \kappa)$, $T \in \mathcal{S}^o(Y, \kappa)$ について, $S \cap T$ が κ において定常になることとする.

E と F がそれぞれ, 位相空間 X, Y の閉集合とすると, $X \times Y$ がオーソコンパクト (resp. 正規かつ長方形的, 正規, 可算パラコンパクト) ならば, $E \times F$ もそうである. このことから次の補題 (3つ目の場合以外) が得られる.

補題 4. 以下の条件のいずれかが成り立てば, $X \times Y$ は対角線定常積である.

- $X \times Y$ はオーソコンパクト.
- $X \times Y$ は正規.
- X と Y は *GO*-空間で, $X \times Y$ は長方形的.
- $X \times Y$ は可算パラコンパクト.
- $\mathcal{S}(X) = \emptyset$ か $\mathcal{S}(Y) = \emptyset$.

上の補題の3つ目の場合がうまくいくことは, 次の事実による.

補題 5. X が *GO*-空間とする. 任意の非可算正則基数 κ と $S \in \mathcal{S}^o(X, \kappa)$ に対して, $C \subseteq S$ となるか, または, $S \cap C$ が X のレトラクトと同相になるようなクラブ集合 *(closed unbounded set)* $C \subseteq \kappa$ が存在する.

ここで, $E \subseteq X$ が X の**レトラクト**とは, 連続写像 $r : X \to E$ で, 各 $x \in E$ について $r(x) = x$ となるようなものが存在することである. E と F がそれぞれ, 位相空間 X, Y のレトラクトとすると, $X \times Y$ が長方形的ならば, $E \times F$ も長方形的である.

定義 12. *$X \times Y$ が* **orthocaliber 積** *(resp.* **dop 積***) であるとは, $X \times Y$ が対角線定常積であって, 次の 2 条件を満たすこととする:*

- $\mathcal{S}(X, \kappa) \neq \emptyset$ *となる任意の正則非可算基数 κ に対し, Y は orthocaliber κ (resp. κ-dop 性) をもつ,*
- $\mathcal{S}(Y, \lambda) \neq \emptyset$ *となる任意の正則非可算基数 λ に対し, X は orthocaliber λ(resp. λ-dop 性) をもつ.*

定義 13. *$X \times Y$ が* **codecop 積** *(resp.* **docs 積***) であるとは, $X \times Y$ が対角線定常積であって, 次の 2 条件を満たすこととする:*

- *各 $S \in \mathcal{S}^o(X)$ について, Y は S-codecop 性 (resp. S-docs 性) をもつ,*
- *各 $T \in \mathcal{S}^o(Y)$ について, X は T-codecop 性 (resp. T-docs 性) をもつ.*

定義 14. *$X \times Y$ が* **弱 codecop 積** *であるとは, 次の 2 条件を満たすこととする:*

- $\mathcal{S}(X, \kappa) \neq \emptyset$ *となる任意の非可算正則基数 κ について, Y は κ-codecop 性をもつ,*
- $\mathcal{S}(Y, \lambda) \neq \emptyset$ *となる任意の非可算正則基数 λ について, X は λ-codecop 性をもつ.*

これらの定義は, $\mathcal{S}(Y) = \emptyset$ の場合はもちろん, 次のようにずっと簡単になる.

補題 6. *X と Y が位相空間で $\mathcal{S}(Y) = \emptyset$ とする.*

(1) $X \times Y$ が orthocaliber 積 (resp. dop 積, 弱 codecop 積) になるためには, $\mathcal{S}(X, \kappa) \neq \emptyset$ となる任意の正則非可算基数 κ に対して, Y が orthocaliber κ (resp. κ-dop 性, κ-codecop 性) をもつことが必要十分である.

(2) $X \times Y$ が codecop 積 (resp. docs 積) であるためには, 各 $S \in \mathcal{S}^o(X)$ について, Y が S-codecop 性 (resp. S-docs 性) をもつことが必要十分である.

補題 2, 補題 4, と補題 5 から次の補題（３つ目の場合以外）が得られる.

補題 7. *X と Y は位相空間とする.*

(1) $X \times Y$ がオーソコンパクトならば, $X \times Y$ は orthocaliber 積である.

(2) $X \times Y$ が正規かつ長方形的ならば, $X \times Y$ は dop 積である.

(3) X と Y が単調正規空間で, $X \times Y$ が長方形的ならば, $X \times Y$ は弱 *codecop* 積である.

(4) X と Y が *GO*-空間で, $X \times Y$ が長方形的ならば, $X \times Y$ は *codecop* 積である.

(5) $X \times Y$ が正規ならば, $X \times Y$ は *docs* 積である.

$X \times Y$		$X \times Y$
オーソコンパクト	$\Longrightarrow$	orthocaliber 積
正規かつ長方形的	$\Longrightarrow$	dop 積
長方形的	$\Rightarrow_{(*)}$	弱 codecop 積
長方形的	$\Rightarrow_{(**)}$	codecop 積
正規	$\Longrightarrow$	docs 積

(*) 単調正規空間の場合, (**) GO-空間の場合

上の補題の３つ目の場合は, 次の事実による.

命題 1. X は単調正規空間で, Y は位相空間とする. $X \times Y$ が長方形的ならば, $\mathcal{S}(X, \kappa) \neq \emptyset$ となる任意の正則非可算基数 κ に対して, Y は κ-*codecop* 性をもつ.

2.3 近傍に関する４つの性質の比較

次の２つの補題は定義から容易に得られる.

補題 8. κ は正則非可算基数, S はその定常集合, Y は位相空間, $q \in Y$ とする.

(1) Y が q において *orthocaliber* κ をもてば, κ-*dop* 性をもつ.

(2) Y が q において κ-*dop* 性をもてば, S-*codecop* 性と S-*docs* 性をもつ.

(3) Y が q において S-*codecop* 性をもてば, κ-*codecop* 性をもつ.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{orthocaliber } \kappa & & \\
\Downarrow & & \\
\kappa\text{-dop 性} & \Longrightarrow & S\text{-codecop 性} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
S\text{-docs 性} & & \kappa\text{-codecop 性}
\end{array}
$$

補題 9. 位相空間の積について,

(1) *orthocaliber* 積は *dop* 積である.

(2) *dop* 積は *codecop* 積で, かつ, *docs* 積である.

(3) codecop 積は弱 codecop 積である.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{orthocaliber 積} & & \\
\Downarrow & & \\
\text{dop 積} & \Longrightarrow & \text{codecop 積} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{docs 積} & & \text{弱 codecop 積}
\end{array}
$$

補題 7, 補題 9 からわかることを図式にすると,

$$
\begin{array}{ccc}
X \times Y \text{ はオーソコンパクト} & & X \times Y \text{ は} \\
\Downarrow & & \text{dop 積} \\
X \times Y \text{ は} & & \Downarrow \\
\text{orthocaliber 積} & & X \times Y \text{ は} \\
 & & \text{(弱)codecop 積} \\
X \times Y \text{ は} & & (\Uparrow \text{ 単調正規}) \\
\text{正規かつ長方形的} & \Rightarrow & X \times Y \text{ は長方形的} \\
\Downarrow & & \\
X \times Y \text{ は正規で} & & X \times Y \text{ は shrinking 性をもつ} \\
\text{dop 積} & & \text{または} \\
\Downarrow & & \text{族正規} \\
X \times Y \text{ は dop 積} & & \Downarrow \\
\Downarrow & & \\
X \times Y \text{ は docs 積} & \Leftarrow & X \times Y \text{ は正規}
\end{array}
$$

3 単調正規空間と特殊な空間の積に関する定理

前の節では, $X \times Y$ がオーソコンパクト, 正規, 長方形的になるための必要条件を調べた. X と Y に更に条件を付加すれば, それらの条件が十分条件にもなることがある. この節ではそのようなケースに関する定理を述べていく. この節で扱われる積空間 $X \times Y$ は, 次のようなものである.

- X は単調正規空間,
- Y は順序数の部分空間, または, ゲーム $G(\mathrm{DC}, \mathrm{Y})$ において Player I が必勝法をもつようなメタコンパクト空間

3.1 単調正規空間と順序数の部分空間, あるいはゲームファクターをもつ空間の積

次の事実が成り立つことがわかった.

命題 2. X はオーソコンパクトな単調正規空間, Y は順序数の部分空間か, または, メタコンパクトで, $G(\mathrm{DC}, Y)$ において *Player I* が必勝法をもつような空間とする. $X \times Y$ が *orthocaliber* 積ならば, $X \times Y$ はオーソコンパクトである.

命題 3. X は単調正規空間, Y は順序数の部分空間か, または, パラコンパクトで, $G(\mathrm{DC}, Y)$ において *Player I* が必勝法をもつような空間とする.

(1) $X \times Y$ が *orthocaliber* 積ならば, $X \times Y$ は正規かつ長方形的である.

(2) $X \times Y$ が正規かつ *dop* 積ならば, $X \times Y$ は *shrinking* 性をもち, 族正規である.

命題 4. X は単調正規空間, Y は順序数の部分空間とする. あるいは, X はオーソコンパクトな単調正規空間, Y はパラコンパクトで, $G(\mathrm{DC}, Y)$ において *Player I* が必勝法をもつような空間とする. $X \times Y$ が *dop*-積ならば, $X \times Y$ は正規かつ長方形的である.

$X \times Y$ はオーソコンパクト		$X \times Y$ は
$\Downarrow\Updownarrow^{*3}$		dop 積
$X \times Y$ は		$\Downarrow$
orthocaliber 積		$X \times Y$ は
$\Downarrow^{*1}$		(弱)codecop 積
$X \times Y$ は		$(\Uparrow^{*1})$
正規かつ長方形的	$\Rightarrow$	$X \times Y$ は長方形的
$\Downarrow\Updownarrow^{*2}$		
$X \times Y$ は正規で	$\Rightarrow^{*1}$	$X \times Y$ は shrinking 性をもつ
dop 積		かつ/または
$\Downarrow\Updownarrow^{*2}$		族正規
$X \times Y$ は dop 積		$\Downarrow$
$\Downarrow$		
$X \times Y$ は docs 積	$\Leftarrow$	$X \times Y$ は正規

*1: X は単調正規空間で, Y は順序数の部分空間か, パラコンパクトで $G(\mathrm{DC}, Y)$ において Player I が必勝法をもつ空間.
*2: X は単調正規空間で, Y は順序数の部分空間. あるいは, X はオーソコンパクトな単調正規空間で, Y はパラコンパクトで $G(\mathrm{DC}, Y)$ において Player I が必勝法をもつ空間.
*3: X はオーソコンパクトな単調正規空間で, Y は順序数の部分空間か, メタコンパクトで $G(\mathrm{DC}, Y)$ において Player I が必勝法をもつ空間.

以上のことから, 次の定理が得られる.

定理 11. X は単調正規な空間, B は順序数の空でない部分空間とする.

(1) $X \times B$ がオーソコンパクトになるためには, X がオーソコンパクトで, $X \times B$ が *orthocaliber* 積であることが必要十分である.

(2) $X \times B$ が正規かつ長方形的になるためには, $X \times B$ が *dop* 積であることが必要十分である.

(3) $X \times B$ が正規かつ長方形的ならば, $X \times B$ は *shrinking* 性をもち, 族正規である.

定理 12. X は単調正規な空間, Y はメタコンパクトで, $G(\mathrm{DC}, Y)$ において *Player I* が必勝法をもつような空間とする. $X \times Y$ がオーソコンパクトであるためには, X がオーソコンパクトで, $X \times Y$ が *orthocaliber* 積であることが必要十分である.

定理 13. X はオーソコンパクトな単調正規空間, Y はパラコンパクトで $G(\mathrm{DC}, Y)$ において *Player I* が必勝法をもつような空間とする. $X \times Y$ が正規かつ長方形的になるためには, $X \times Y$ が *dop* 積であることが必要十分である.

定理 12, 定理 13, 補題 9 の系として, 定理 9 (1) が直ちに得られる.

3.2 GO-空間と順序数の部分空間の積

GO-空間とは, 全順序位相空間 (LOTS) の部分位相空間に同相な空間のことである. GO-空間はオーソコンパクトな単調正規空間であることはよく知られている. 更に, *GO*-空間においては, 近傍に関する 4 つの性質のうち 3 つまでが一致する.

補題 10. Y は *GO*-空間, $q \in Y$, κ は正則非可算基数とする. 次は同値になる.

(a) Y は q において *orthocaliber* κ をもつ.

(b) κ の すべての/いずれかの 定常集合 S に対して, Y は q において *S-docs* 性をもつ.

(c) $Y \subseteq L$ となる *LOTS* L において, q は Y の元からなる長さ κ の真に上昇する列の上限でもなければ, 真に下降する列の下限でもない.

空間 Y, 定常集合 $S \subseteq \kappa$ について一般に

$$\begin{array}{ccc}
\text{orthocaliber } \kappa & & \\
\Downarrow & & \\
\kappa\text{-dop 性} & \Longrightarrow & S\text{-codecop 性} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
S\text{-docs 性} & & \kappa\text{-codecop 性}
\end{array}$$

Y が GO-空間の場合

$$\begin{array}{ccc}
\text{orthocaliber } \kappa & & \\
\Updownarrow & & \\
\kappa\text{-dop 性} & \Longrightarrow & S\text{-codecop 性} \\
\Updownarrow & & \Downarrow \\
S\text{-docs 性} & & \kappa\text{-codecop 性}
\end{array}$$

X が GO-空間で, B が順序数の部分空間の場合		
$X \times B$ はオーソコンパクト		$X \times B$ は
$\Updownarrow$		dop 積
$X \times B$ is		$\Downarrow$
orthocaliber 積		$X \times B$ は
$\Updownarrow$		codecop 積
$X \times B$ は		$\Updownarrow$
正規かつ長方形的	$\Rightarrow$	$X \times B$ は長方形的
$\Updownarrow$		(= 可算パラコンパクト)
$X \times B$ は正規で	$\Leftrightarrow$	$X \times B$ は shrinking 性をもつ
dop 積		かつ/または
$\Updownarrow$		族正規
$X \times B$ は dop 積		$\Updownarrow$
$\Updownarrow$		
$X \times B$ は docs 積	$\Leftrightarrow$	$X \times B$ は正規

定理 11 と, 上の補題を使えば, 次の定理の (1) が得られる.

定理 14. *X は GO-空間, B は順序数の部分空間とする.*

(1) $X \times B$ について, 次は同値である. オーソコンパクト/正規かつ長方形的/shrinking 性をもつ/族正規/正規/orthocaliber 積/dop 積/docs 積.

(2) $X \times B$ について, 次は同値である. 長方形的/可算パラコンパクト/codecop 積.

この定理は, 定理 3 の一般化になっている.

順序数の部分空間の場合は, 補題 10 は次のようになる.

補題 11. *B は順序数の部分空間で, κ は正則非可算基数とする.*

(1) B が $\mu \in B$ において orthocaliber κ をもたなくなるためには, $\mathrm{cf}\,\mu = \kappa$ で $B \cap \mu$ が μ において共終であることが必要十分である.

(2) $\mathcal{S}(B, \kappa) \neq \emptyset$ となるためには, 順序数 $\mu \notin B$ で, $\mathrm{cf}\,\mu = \kappa$, かつ, $B \cap \mu$ が μ において定常になるようなものが存在することが必要十分である.

3.3 単調正規空間とコンパクト空間の積

次の補題は容易に示すことができる.

補題 12. Sが正則非可算基数κの定常集合, Yは点$q \in Y$において局所コンパクトな空間とすると, Yは点qにおいて*S-codecop*性をもつ. さらに, Yが*S-docs*性をもつならば, Yは*κ-dop*性をもつ.

空間Yと, 定常集合$S \subseteq \kappa$について一般に

$$\begin{array}{|lcc|}
\hline
\text{orthocaliber } \kappa & & \\
\quad\Downarrow & & \\
\kappa\text{-dop 性} & \Longrightarrow & S\text{-codecop 性} \\
\quad\Downarrow & & \Downarrow \\
S\text{-docs 性} & & \kappa\text{-codecop 性} \\
\hline
\end{array}$$

Yが局所コンパクト空間の場合

$$\begin{array}{|lcc|}
\hline
\text{orthocaliber } \kappa & & 0=0 \\
\quad\Downarrow & & \Updownarrow \\
\kappa\text{-dop 性} & \Longrightarrow & S\text{-codecop 性} \\
\quad\Updownarrow & & \Updownarrow \\
S\text{-docs 性} & & \kappa\text{-codecop 性} \\
\hline
\end{array}$$

さらに, 次の事実も成り立つ.

命題 5. Xが単調正規空間で, Cはコンパクト空間とする. $X \times C$が*dop*積ならば, $X \times C$は正規である.

Xが単調正規空間で, Cがコンパクト空間の場合		
$X \times C$はオーソコンパクト		
$\Downarrow\Updownarrow^*$		$0=0$
$X \times C$は		$\Updownarrow$
orthocaliber 積		$X \times C$は
$\Downarrow$		codecop 積
$X \times C$は		$\Updownarrow$
正規かつ長方形的	$\Rightarrow$	$X \times C$は長方形的
$\Updownarrow$		
$X \times C$は正規で	$\Leftrightarrow$	$X \times C$は shrinking 性をもつ
dop 積		かつ/または
$\Updownarrow$		族正規
$X \times C$は dop 積		$\Updownarrow$
$\Updownarrow$		
$X \times C$は docs 積	$\Leftrightarrow$	$X \times C$は正規
$*$はXがオーソコンパクトを仮定.		

以上より, 次の定理が得られる.

定理 15. Xは単調正規空間, Cはコンパクト空間とする. $X \times C$について, 次は同値. 正規かつ長方形的/*shrinking*性/族正規/正規/*dop*積/*docs*積.

系として 定理7が得られる.

3.4 単調正規空間とほとんど離散な空間の積

ほとんど離散な空間とは, 非孤立点が高々 1 つしかないような空間のことであった. q が唯一の非孤立点ならば, その近傍は常に clopen になるので, 次の補題が容易に得られる.

補題 13. *Y がほとんど離散な空間, $q \in Y$, κ は正則基数とする. Y が κ-codecop 性をもてば, Y は κ-dop 性をもつ.*

空間 Y と, 定常集合 $S \subseteq \kappa$ について一般に

$$\begin{array}{ccc} \text{orthocaliber } \kappa & & \\ \Downarrow & & \\ \kappa\text{-dop 性} & \Longrightarrow & S\text{-codecop 性} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ S\text{-docs 性} & & \kappa\text{-codecop 性} \end{array}$$

Y がほとんど離散な空間の場合

$$\begin{array}{ccc} \text{orthocaliber } \kappa & & \\ \Downarrow & & \\ \kappa\text{-dop 性} & \Longleftrightarrow & S\text{-codecop 性} \\ \Downarrow & & \Updownarrow \\ S\text{-docs 性} & & \kappa\text{-codecop 性} \end{array}$$

ほとんど離散な空間 Y はパラコンパクトな単調正規空間であり, ゲーム $G(\mathrm{DC}, Y)$ においては, Player I が必勝法をもつ. さらに, 次の定理が成り立つ.

定理 16. *X は単調正規空間, Y はほとんど離散な空間とする. $X \times Y$ が正規であるためには, $X \times Y$ が docs 積であることが必要十分である.*

X が単調正規空間で, Y がほとんど離散な空間の場合		
$X \times Y$ はオーソコンパクト		$X \times Y$ は
$\Downarrow\Updownarrow^*$		dop 積
$X \times Y$ は		$\Updownarrow$
orthocaliber 積		$X \times Y$ は
$\Downarrow$		(弱)codecop 積
$X \times Y$ は		$(\Uparrow)$
正規かつ長方形的	$\Rightarrow$	$X \times Y$ は長方形的
$\Downarrow\Updownarrow^*$		
$X \times Y$ は正規で	$\Rightarrow$	$X \times Y$ は shrinking 性をもつ
dop 積		かつ/または
$\Updownarrow$		族正規
$X \times Y$ は dop 積		$\Downarrow$
$\Downarrow$		
$X \times Y$ は docs 積	$\Leftrightarrow$	$X \times Y$ は正規
$*$ は X がオーソコンパクトであることを仮定する.		

積空間が正規であることと, 長方形的であることはどちらが強い条件だろうか? 定理 14 より, GO-空間 X と順序数の部分空間 B について, $X \times B$ が正規ならば,

$X \times B$ は長方形的であり, その逆は成り立たない. 実際, $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は長方形的だが, 正規ではない.

ところが, 意外なことに, 単調正規空間とほとんど離散空間の積においては, 正方形的であることの方が, 正規性より強い. 命題 1, 補題 13, 補題 8, 定理 16 を使えば, 次の定理が得られる.

定理 17. *X は単調正規空間, Y はほとんど離散な空間とする. $X \times Y$ が長方形的ならば, それは正規である.*

この定理の逆が一般には成り立たないことは, 1 節の最後で述べた通り, 定理 10 によりわかる.

4 例

4.1 dop 性をもつが, orthocaliber をもたない空間の例

定理 7 (3) の例を近傍に関する性質に着目して述べると, 次のようになる.

例 1. *Y は濃度 $\kappa > \omega$ の離散空間の 1 点コンパクト化とすると, 次が成り立つ.*

- *任意の非可算正則基数 λ について, Y は λ-dop 性をもつ.*
- *κ 以下の正則基数 λ については, Y は orthocaliber λ をもたない.*
- *Y の weight は κ である. よって, κ より大きい正則基数 λ については, Y は orthocaliber λ をもつ.*

特に, $\kappa \times Y$ は dop 積ではあるが othocaliber 積ではないので, 正規 (かつ長方形的) だが, オーソコンパクトではない (定理 12, 定理 13).

4.2 docs 性をもつが, dop 性をもたない空間の例

定理 10 で構成されている空間 Y は, 近傍に関する性質に着目すれば, 次のようなものになっている.

例 2 (Ohta 1981 [13]). *正則非可算基数 κ に対して, 次の条件をみたすほとんど離散な空間 Y が存在する.*

- *任意の非可算正則基数 λ について, Y は λ-docs 性をもつ.*
- *κ 以下の正則基数 λ については, Y は λ-dop 性をもたない.*

- Y の *weight* は κ である. よって, κ より大きい正則基数 λ については, Y は *orthocaliber* λ をもつ.

特に, $\kappa \times Y$ は *docs* 積ではあるが *dop* 積ではないので, 正規だが, 長方形的ではない *(定理 16, 補題 7)*.

[Ohta's example]

$[\kappa]^{<\omega} = \{r \subseteq \kappa : |r| < \omega\}$, $q \notin [\kappa]^{<\omega}$ とせよ, そして $Y = \{q\} \cup [\kappa]^{<\omega}$ は次のような位相をもってるものとせよ.

- $[\kappa]^{<\omega}$ の各点は Y の孤立点,
- $V \subseteq Y$ が q の近傍になるのは, ある $r_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して,

$$\{q\} \cup \{r \in [\kappa]^{<\omega} : r_0 \subseteq r\} \subseteq V$$

  となるとき.

4.3 単調正規空間とほとんど離散な空間の dop 積で長方形的にならないもの

定理 13 から, 直ちに次の系が得られる.

系 3. オーソコンパクトな単調正規空間 X と, ほとんど離散な空間 Y の積 $X \times Y$ が *dop* 積ならば, $X \times Y$ は正規かつ長方形的である.

この系において, $X \times Y$ の正規性を導くには X のオーソコンパクト性は不要である (定理 16) が, $X \times Y$ が長方形的であることを示すためには, その仮定は除去できない. 実際, そのような反例が存在する.

定義 15. X のレトラクト E が離散な残余をもつとは, $X \setminus E$ の各点が X の孤立点になっていることとする.

例 3. 正則非可算基数 κ に対して, オーソコンパクトではない単調正規空間 X と, ほとんど離散な空間 Y で, 次の条件をみたすようなものが存在する.

- κ は X に離散な残余をもつレトラクトとして埋め込める,
- 任意の非可算正則基数 λ について, Y は λ-*dop* 性をもつ
- $X \times Y$ は長方形的ではない.

特に, $X \times Y$ は dop 積であり, よって, 正規である.

構成: 集合として, $X = \kappa \times (\kappa + 1)$ と置き, 次のように位相を定める,

- $\kappa \times \kappa$ の各点は X の孤立点,
- 各 $\alpha < \kappa$ に対して, $V \subseteq X$ が $\langle \alpha, \kappa \rangle$ の近傍になるのは,

$$(\gamma, \alpha] \times (\delta, \kappa] \subseteq V$$

となる $\gamma \in \alpha \cup \{-1\}$ と $\delta < \kappa$ があるとき.

そうすると, X は単調正規だが, オーソコンパクトではなく, $E = \kappa \times \{\kappa\}$ は離散な残余をもつ X のレトラクトであり, $\kappa \ni \alpha \mapsto \langle \alpha, \kappa \rangle \in E$ は同相写像になる.

$S^\kappa_\omega = \{\xi \in \kappa : \operatorname{cf} \xi = \omega\}$, $Y' = \bigcup_{\xi \in S^\kappa_\omega} (\{\xi\} \times \xi)$, $q \notin Y'$, $Y = \{q\} \cup Y'$ とせよ. Y に次のように位相を定める.

- Y' の各点は Y の孤立点,
- Y において $V \subseteq Y$ が q の近傍になるのは,

$$\{q\} \cup \bigcup_{\xi \in S^\kappa_\omega} (\{\xi\} \times [\varphi(\xi), \xi)) \subseteq V$$

となる関数 $\varphi \in \prod_{\xi \in S^\kappa_\omega} \xi$ があるとき.

参考文献

[1] Z. Balogh and M .E. Rudin, *Monotone Normality*, Topology and Appl. **47** (1992), 115–127.

[2] T. Chiba and K. Chiba, *Q-paracompactness and closed mappings*, Sci. Rep. Tokyo Kyouiku Daigaku Sect. A **11** (1972), 159–162.

[3] R. Engelking, *General Topology.* Herdermann Verlag, Berlin (1989).

[4] F. Galvin and R. Telgársky, *Stationary strategies in topological games*, Topology and Appl. **22** (1986), 51–69.

[5] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology and Appl. **45** (1992), 245–260.

[6] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness in products*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 407–422.

[7] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness and normality of products with a cardinal factor*, Topology and Appl. **49** (1993), 141–148.

[8] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Topology Appl. **154** (2007), 758–770.

[9] H. J. K. Junnila, *Metacompactness, paracompactness and interior-preserving open covers*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 373–385.

[10] H. J. K. Junnila and Y. Yajima, *Characterizations of submetacompactness*, Topology and Appl. **82** (1998), 227–238.

[11] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam (1980).

[12] Z. Lazarevic, *Shrinking in perfect preimages of shrinking spaces*, Topology and Appl. **71** (1996), 167–178.

[13] H. Ohta, *On normal non–rectangular products*, Quart. J. Math. **32** (1981), 339–344.

[14] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.

[15] H. B. Potoczny, *Closure-preserving families of compact sets*, General Topology and Appl. **3** (1973), 243–248.

[16] R. Telgársky, *Spaces defined by tological games*, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.

[17] H. Tamano, *On paracompactness*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1043–1047.

[18] Y. Yajima, *A characterization of normal covers of a normal space II*, Glasnik Mate. **24** (1989), 401–403.

[19] Y. Yajima, *Normality of products of monotonically normal spaces with compact spaces*, Topology and Appl. **158** (2011), 2085–2089.

[20] Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games*, Topology and Appl. (to appear).