数理解析研究所講究録
第 1783 巻 2012 年 126-154

ケーラー多様体内のレヴィ非平坦擬凸領域について

大沢健夫
(名大・多元数理)

はじめに----Hartogs型の拡張定理----　解析接続は、関数の多価性を解消しながら固有の定義域を確定させたり、一つの関数の相異なる表現を結びつけたりする際に重要である。多変数複素解析においては、種々の幾何学的接続現象に少なからぬ理論的興味が存する。その中でもっとも基本的なものはHartogs[H]による拡張定理である。これは$\mathbf{C}^n$内の任意の多重円板を

$$S = \{(z',z_n) \,;\, z' \in S',\, z_n \in \sigma\},\quad z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$$

で表し、pをS'の点、Uを$(\{p\}\times\sigma)\cup(S'\times\partial\sigma)$の近傍、fをU上の正則関数とするとき、つねにS上の正則関数$\tilde{f}$が存在して$\tilde{f}|U\cap S = f|U\cap S$となるというものである(cf.「数学辞典第４版」 291C)。

有理型関数や有理型写像に関してもこの型の拡張定理が知られている(cf. [Sa], [I])。さらに、写像に限らず、解析集合や解析的連接層などの対象に対しても類似の拡張定理が知られている(cf. [R-S], [Si-2])。

Hartogsの拡張定理は、複素多様体の構造層$\mathcal{O}$やその商体の層であるところの有理型関数の芽の層$\mathcal{M}$について、それらの連結成分がすべて局所的に擬凸であることを教えてくれる。この逆として「複素多様体上のリーマン領域$\mathcal{R}$が局所的に擬凸なら$\mathcal{R}$は$\mathcal{O}$または$\mathcal{M}$の一つの連結成分と同型か」という問題が生ずる。これをLevi問題という(cf. [L], [Li])。

周知のように$\mathbf{C}^n$や$\mathbf{CP}^n$上のLevi問題は岡潔らによって肯定的に解かれた。Grauert[G-1,2]は岡理論の着想の一部を一般化しながら多様体内の強擬凸領域上でLevi問題の解を得たが、その一方で、擬凸だが正則凸ではない領域の例を２次元の複素トーラス内で構成した(cf.[G-3])。この例においては領域は**Levi平坦**である。すなわちその境界は滑らかな実超曲面であり、そのLevi形式はすべての点で退化している。この領域は正則凸でないので複素トーラスの構造層$\mathcal{O}$の連結成分ではないが、$\mathcal{M}$の連結成分ではある[G-3, Satz 5]。このように、多様体上でLevi問題が解けるか否かはその多様体の性質にもよるし、問題をどの層について考えるかによっても変わりうる。(より詳しくは [Di], [Li], [Oh-6], [Si-3] などを参照されたい。)

Hartogsの拡張定理自身についても同様の事情がある。つまり、関数等の定義域を上記のUから多様体内の同種の領域へと変更した場合、拡張定理の成立不成立は多様体の種類にもよるし、何を拡張したいかによっても変わってくる。

Rothstein[Rt]は解析集合の接続の研究のため、擬凸性の概念を拡張した。Grauertは[G-1]において強擬凸領域の正則凸性を層係数1次コホモロジー群の有限次元性から導いた後、より高次のコホモロジー群の有限次元性の（幾何学的な）根拠を、このRothsteinの意味での拡張された擬凸性に求め、Andreotti-Grauert理論[A-G]においてq-凸性およびq-完備性の概念を導入してシュタイン空間上の層係数コホモロジー論を一般化した。さらに[G-R]においては超q-凸性(hyper-q-convexity)を導入することにより、小平型消滅定理の精密化を果たした。シュタイン空間の概念が岡の原理の幾何学的根拠を理解するために考案されたことを思えば、これは新たな方向への展開であった。

[A-G]を受けてなされた研究は数多くある。実際、2011年8月23日現在のmathscinetによれば、Grauertの著作の2000年以後の被引用件数1018のうち、論文としては[A-G]がトップで103である(2012/1/16には何と122になった)。その中で筆者が最近関心を寄せているのは[A-N-1,2]や[A-W]を経てサイクル空間上の関数論を目指す方向(cf.[Oh-11])、[G-R]および[Oh-1](筆者の修士論文)の精密化にあたる[Oh-2]、J. Merker氏とE. Porten氏による最近の労作[M-P-1,2]などである。[Oh-2]はコホモロジー類に関する拡張定理であり、葉層構造への応用がある(cf. [Oh-7,8,9,10])。[M-P-1,2]ではMorse関数の定数面を横切る局所的なHartogs型拡張を繰り返すことによって、(n−1)-完備空間上の拡張定理が得られている。なおこれらの結果において、拡張定理は「相対コンパクトな領域の境界(の近傍)からの拡張」という形で定式化されている。

以上をふまえ、[Oh-12,13]ではKähler多様体内の局所擬凸領域上で正則関数に対するHartogs型の拡張定理を論じ、二三の結果を得た。小論の目的はそれらの概要の報告である。

1．主結果----Kähler多様体上の拡張定理---- 一般に、(複素)解析空間Xにおいて、有界(=相対コンパクト)な連結成分を含まず補集合がコンパクトであるような開集合の上で定義された正則関数がつねにX上に解析接続できるとき、X上で(正則関数に対する）**Hartogs型拡張定理が成立する**という。Mをn次元の連結な複素多様体、ΩをM内の領域とする。$X=\Omega$に対してHartogs型拡張定理が成立するなら、明らかにΩの境界$\partial\Omega$は連結でなければならない。

このHartogs型拡張定理に関する主結果は次の通り。

定理1.1. (cf. [Oh-12, Theorem 3.2])　MはKähler計量をもち、$\partial\Omega$は局所擬凸なC^2級の実超曲面であり、かつLevi平坦でない点を含むとする。このときΩ上でHartogs型拡張定理が成立し、特に$\partial\Omega$は連結である。

以下ではΩはつねに局所擬凸であるとする。

定理1.1と[Di-Oh]の結果を合わせると次の結果が得られる。

定理1.2.　Mは２次元のKähler多様体、$\partial\Omega$は実解析的な実超曲面であり、かつLevi平坦でない点を含むとする。このとき$\partial\Omega$は連結で、Ωは正則凸であり、Ωの縮約となるシュタイン空間が存在する。

ただし解析空間Xの縮約とは、全ての極大な例外集合を各々1点につぶして得られる解析空間をいう。例外集合の定義は[G-2]によるが、端的には、同次元の解析空間への適正(proper)な双有理型正則写像の孤立臨界値の逆像になりうる連続体のことである。(縮約を持たない解析空間もある。また、定理1.2の文脈では、縮約はいわゆるRemmert quotientと同義である。)

MのKähler性を仮定せず、その代わり$\partial\Omega$の連結性を仮定して同様の仮定から同様の結論を導いたのが[Di-Oh]であった。ちなみに定理1.2におけるようなΩで$\partial\Omega$がM内のコンパクトな複素曲線を含む例が、いわゆるDiederich-Fornaessのワーム領域(cf. [Di-F])に倣って[Di-Oh]で構成された。ワーム領域はBergman射影が関数の境界正則性を保たない例としても有名だが(cf.[C])、[Di-Oh]の例や、その後の[Oh-3]に記されたLevi平坦な境界をもつ２次元シュタイン領域についても、正則関数の空間が非自明であることをふまえた作用素論的な方面からの研究がある(cf.[B])。定理1.2も何かの一端であると思われる。

境界が実超曲面でなく複素余次元が１の解析的集合の場合にも、Levi非平坦性に相当する自然な条件がある。この場合、拡張定理の成立条件は法ベクトル束の曲率を使って書ける。

定理1.3. (cf. [Oh-13, Theorem 0.2])　MがコンパクトなKähler多様体であり、$\partial\Omega$が余次元が１の複素解析的集合であるとき、もし$\partial\Omega$を台とする正因子Dがあり、直線束[D]のファイバー計量で、その曲率形式が$\partial\Omega$のZariski接空間上で半正かつ恒等的に0でないものがあるとすれば、Ω上でHartogs型拡張定理が成立する。特にこのとき$\partial\Omega$は連結である。

これとは独立に、定理1.2に相当する次の命題を示すことができる。

定理1.4. 2次元のコンパクトな複素多様体M上に正因子Dがあり、Dは連結で自己交点数 $D\cdot D$ が正だとする。このときD(の台)の補集合の縮約が存在し、アファイン代数多様体となる。

以下の証明からも分かるように、これは複素解析曲面論における一つの独立した演習問題である。

定理1.4の証明(cf. [Oh-14, §4])： $D=\sum_{i=1}^{m} n_i D_i$ とおく。ただし D_i は既約で $n_i \in \mathbb{N}$ とする。$\Delta=(\Delta_{ij})=(D_i\cdot D_j)$ とおいて条件 $D\cdot D>0$ を書き直すと

(1.1) $$\sum_{i,j} \Delta_{ij} n_i n_j > 0$$

となる。Δ の対称性と(1.1)より

(1.2) $$\Delta((0,\infty)^m) \cap (0,\infty)^m \neq \emptyset$$

である。したがって D_i の係数を適当に付け替えて、Dと同一の台をもつ基点のない(base point freeな)巨大因子(big divisor)が得られる。これが示すべきことであった。

以下では定理1.1と定理1.3の証明のあらましを述べたい。定理1.1の方は純正の擬凸領域論に収まり定理1.3はAndreotti-Grauert理論の世界の話になるのだが、両者の証明はいずれもコホモロジー消滅定理によるので、まず消滅定理とHartogs型拡張定理との関連について述べ、その後に必要となるL^2コホモロジー消滅定理とその証明を述べよう。

2．コホモロジーの消滅とHartogs型拡張

MとΩは上の通りとする。Ω上でHartogs型拡張定理が成立するための必要十分条件を層係数コホモロジーの言葉で述べるなら、自然準同型

$$H_c^1(\Omega,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{O})$$

の単射性となる。ただし$H(\cdot,\cdot)$はコンパクト台のp次コホモロジー群を表す。この条件をLefschetz型同型の帰結と解釈したのが[Oh-2]だった。現実に問題となる状況下では$H^1_c(\Omega,\mathcal{O})$自身が$\{0\}$になることが知られており、[G-R]ではさらに高次のコホモロジー群$H^{n-q}_c(\Omega,\mathcal{O})$ $(q < n-1)$が消えるための条件が調べられていたのだが(超q凸性)、Hartogs型の拡張定理を正則p形式や(p,q)型コホモロジー類にまで拡げて考えるなら[Oh-2]の解釈が生きてくる。

しかしここでは話を正則関数の拡張に限っているので[G-R]の路線をそのまま継承し、$H^1_c(\Omega,\mathcal{O})$が消えるための条件を問題にしよう。

ちなみにΩ上の任意の解析的連接層$\mathcal{F}$に対して$H^n(\Omega,\mathcal{F})$はつねに0または有限次元だから(cf. [Si-1], [Oh-4])、Serreの双対性定理により$H^1_c(\Omega,\mathcal{O})\cong H^{n-1}(\Omega,\mathcal{K})$となる。ただし$\mathcal{K}$で標準層を表す。このことと竹腰見昭氏[T]によるGrauert-Riemenschneider理論の拡張を用いると、コホモロジー的に(n−1)-完備な純n次元の正規解析空間上でHartogs型拡張定理が成立することがいえる(cf.[C-R])。

３．L^2コホモロジー消滅定理 (M,g) で連結なn次元エルミート多様体、(E,h) でM上の正則エルミートベクトル束を表す。$\bar\partial$ (または∂) で (0,1)型 (または(1,0)型)の複素外微分作用素を表し、$\partial_h = h^{-1}\circ\partial\circ h$ とおく。ここでは ファイバー計量 h をベクトル束$\mathrm{Hom}(E,\overline{E^*})$の断面と見なしている。$\vartheta_h$ (または $\bar\vartheta$) を $\bar\partial$ (または ∂_h) の g および h に関する形式的随伴作用素 とする。ω を g の基本形式とし、外積によってωを他の微分形式にかける作用素の随伴作用素をΛで表す。Mの点xを固定し、xのまわりの局所座標$(w_1,\dots,w_n)$およびEの局所枠を適当にとって、xの近傍上の任意のC^∞級E値(n,n)形式

$$u = u_0\,dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n\wedge d\bar w_1\wedge\cdots\wedge d\bar w_n$$

に対して、xにおいて

$$(3.1)\qquad \bar\partial\vartheta_h u = \sqrt{-1}\,\Theta_h\Lambda u + \Sigma\Big(\frac{\partial^2 u_0}{\partial w_i\partial\bar w_i} + u_0\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\bar w_i}\det(g_{j\bar k})\Big)dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n\wedge d\bar w_1\wedge\cdots\wedge d\bar w_n$$

$$(3.2)\qquad \partial_h\bar\vartheta u = \Sigma\Big(\frac{\partial^2 u_0}{\partial w_i\partial\bar w_i} + u_0\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\bar w_i}\det(g_{j\bar k})\Big)dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n\wedge d\bar w_1\wedge\cdots\wedge d\bar w_n$$

が成立する (uの型に注意) 。 ただし Θ_h で h の曲率形式を表し、これを左側から外積によりベクトル値の微分形式にかける作用素と同一視する。

これはg がKähler計量でなくても$\det(g_{j\bar k})$のxでの微分が消えるようにwが選べ

るからである。

(3.1) と (3.2) より直ちに

(3.3) $$(\bar\partial\vartheta_h - \partial_h\bar\vartheta)u = \sqrt{-1}\,\Theta_h\,\Lambda u \qquad (\text{ただし}u\text{は}(n,n)\text{型})$$

が得られる。u, vをC^∞級で台がコンパクトなE-値微分形式とするとき、 (u,v) でそれらのL^2内積を表し $\|u\|$ で u のL^2ノルムを表す。

このときストークスの公式と(3.3)により

(3.4) $$\|\vartheta_h u\|^2 - \|\bar\vartheta u\|^2 = (\sqrt{-1}\,\Theta_h\,\Lambda u, u)$$

となる。

M上の任意のC^∞級実関数ψと(n,m)-形式 v に対し、$\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi\,\Lambda v$ の局所表示を求めよう。Mの正則余接ベクトル束の局所枠 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ を適当にとって、$\omega = \sqrt{-1}\,\Sigma\,\sigma_i\wedge\bar\sigma_i$ かつ $\partial\bar\partial\psi = \Sigma\,\lambda_i\,\sigma_i\wedge\bar\sigma_i$ $(\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n)$ が成り立つようにする。このときλ_i は局所枠の取り方によらず、M上の連続関数である。v の局所表示を $v = \Sigma\, v_K\,\sigma_*\wedge\bar\sigma_K$ とする。ただしσ_*で $\sigma_1\wedge\cdots\wedge\sigma_n$ を表し、 $K = (k_1, \ldots, k_m)$ に対して$\sigma_K = \sigma_{k_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{k_m}$とおいた。

すると

(3.5) $$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\psi\,\Lambda v = \Sigma\,\lambda_K\,v_K\,\sigma_*\wedge\bar\sigma_K \quad (\lambda_K := \lambda_{k_1} + \cdots + \lambda_{k_m})$$

が成立する。$\lambda_{(1,2,\cdots,n)}$を単にλ^*で表す。

(3.4) と (3.5) を定義から直ちに従う公式 $\Theta_{he^{-\psi}} = \Theta_h + \mathrm{Id}_E\otimes\partial\bar\partial\psi$と合わせると、台がコンパクトな$C^\infty$級のE-値微分形式 u に対して、変形されたファイバー計量 $h_\psi := h\exp(-c\psi)$ に関する評価式

(3.6) $$\|\vartheta_{h_\psi}u\|^2 \ge \|u\|^2$$

が成立するための条件を書くことができる。(3.6)が成り立った上でさらに g が完備な計量であれば、Hahn-Banachの定理またはRieszの表現定理を適用して$\bar\partial$方程式 $\bar\partial u = v$ をL^2評価つきで解くことができる (cf. [A-V])。

以上をまとめて次のL^2消滅定理が得られる。

定理3.1. (M,g)が完備なn次元エルミート多様体であり、関数ψとエルミートベクトル束(E,h)について、λ^* の下限が正でΘ_h が有界であれば、 ある

$c_0 \in \mathbf{R}$ に対して、 $c > c_0$ なる全ての c と、計量 g と $h\exp(-c\psi)$に関して2乗可積分なM上の任意のE-値(n,n)-形式 v に対し、g と $h\exp(-c\psi)$ に関して2乗可積分な E-値 (n,n−1)-形式 u で $\bar{\partial}u = v$ を満たすものが存在する。

Mが非コンパクトならば、(E,h)を任意に与えたときgと ψ を適当にとって上の条件が満たされるようにできる。実際、Θ_h が有界になるような完備計量はいつでも存在し、非コンパクトな任意のリーマン多様体上には狭義劣調和な皆既関数(exhaustion function)が存在するからである(cf. [G-W], [Oh-4], [Dm])。

4．定理1.1の証明　$\Omega \subset M$ は（元通り）C^2級の擬凸境界をもつ有界領域とする。M上のKähler計量 g を固定する。Ωの定義関数ρを適当に選んで、ρはΩ上C^∞級かつ $-1/2 < \rho < 0$ であり、 $g_A := Ag + \partial\bar{\partial}(1/\log(-\rho))$ は十分大きな正の数Aに対してΩ 上の完備Kähler計量であるようにできる。これは

$$(4.1)\quad \partial\bar{\partial}(1/\log(-\rho)) = -\rho^{-1}(\log(-\rho))^{-2}\partial\bar{\partial}\rho + \rho^{-2}\left((\log(-\rho))^{-2} + 2(\log(-\rho))^{-3}\right)\partial\rho\wedge\bar{\partial}\rho$$

より明白である。$\psi = 1/\log(-\rho)$ に対して定理3.1を用いて次を得る。

命題4.1.　(M,g) と $\Omega \subset M$、および g_A は上の通りとし、(E,h) はM上の任意の正則エルミートベクトル束とする。このときΩ上の任意のE-値L^2 (n,n)-形式 v に対し、Ω上のE-値 L^2 (n,n−1)-形式 u で $\bar{\partial}u = v$ を満たすものが存在する。

$H^{p,q}_{(2)}(\Omega, E)$ で Ω の (g_A, h) に関する (p,q) 型 E-値 L^2 $\bar{\partial}$-コホモロジー群を表すことにすれば、命題4.1の結論は $H^{n,n}_{(2)}(\Omega, E) = \{0\}$ と簡単な形になる。

余談ながら、命題4.1をふまえて極限移行の議論(例えば[Oh-6])を用いれば、変形前の計量 g に関しても(n,n)型L^2コホモロジー群は0になることがいえる。

一方、(3.6)はEの双対束のC^∞級断面 s で台がコンパクトなものについての評価式

$$(4.2)\qquad \|s\| \le \|\bar{\partial}s\|$$

と等価だから、(E,h)の任意性と g_A の完備性より次を得る。

命題4.2.　$H^{0,1}_{(2)}(\Omega, E)$ はハウスドルフ空間である。

次の議論は以上の一般的な結果をふまえたものである。

定理1.1の証明： $\partial\Omega$はLevi平坦でないから、$\partial\Omega$のある点 x の M における近傍 U が存在し、$U\cap\partial\Omega$上でρのLevi形式のランクはいたるところ正である。M上の非負C^∞ 級関数 χ を $x\in \mathrm{supp}\,\chi\subset U$ であるようにとる。

このとき十分小さい正の数 ε を選ぶと、前節における(M,g)として(Ω,g_A)を、ψとして$1/\log(-\rho)+\varepsilon\chi$をとったとき、関数$\lambda_{(1,\cdots,n-1)}$が$\Omega$上いたるところ非負であり、かつ $\Omega\cap\mathrm{supp}\,\chi$ 上で正であるようにできる。特にどのようなC^∞ 級(広義)増加凸関数τに対しても、$\partial\bar\partial\tau(1/\log(-\rho)+\varepsilon\chi)$をエルミート形式と見たときのn − 1個の固有値の和はいたるところ非負である。τとして特に$(0,\infty)$上では狭義単調増加であるが $(-\infty,0]$ 上 では0 に等しい関数をとり

$$\Psi=\tau(1/\log(-\rho)+\varepsilon\chi)$$

とおく。 すると台がコンパクトなC^∞級(0,1)形式 u に対し、計量 g_A と自明束のファイバー計量$\exp\Psi$に関して(3.1)と(3.2)から前節と同様に導かれるL^2評価式は

$$(cu,u)\le\|\bar\partial u\|^2 \tag{4.3}$$

という形をしている(中野の等式を用いた計算)。ただしcは恒等的には0でない非負連続関数である。

評価式(4.3)とAronszajnの一致の定理[A]を合わせると、(0,1)型 L^2調和形式が0であることがいえる(ここで再び g_A の完備性を用いる)。これと命題4.2より$H^{0,1}_{(2)}(\Omega)=\{0\}$ が従う。

一方(4.1)より明らかなように、Ωのコンパクト集合Kに対し、$\Omega-K$ が有界な連結成分を含まない限り、g_A に関して2乗可積分な$\Omega-K$上の正則関数は0に限る。これは自然準同型 $H^{0,1}_c(\Omega)\longrightarrow H^{0,1}(\Omega)$ の単射性を意味するから、結局 $H^{0,1}_c(\Omega)=\{0\}$ も言え、従ってDolbeault同型より$H^1_c(\Omega,\mathcal{O})=\{0\}$ となる。これが示すべきことであった。

問題 定理1.1の状況で、$\partial\Omega$上の任意のCR関数はΩ上に解析接続されるか。

5．定理1.3の証明について [Oh-13]では定理1.3の証明を二通り与えたが、それらの相違点は$H^1_c(\Omega,\mathcal{O})=\{0\}$ をいうためにどのようなL^2消滅定理を用いる

かであって、本質的には定理1.1の証明と同様の部分である。したがって、ここでは問題をいかにしてL^2消滅定理が使えそうな状況にまで持って行くかを論じた部分に限って述べよう。そのためにq-凸性(q-convexity)について復習する。

Ωをn次元複素多様体M内のC^2級の実超曲面を境界に持つ領域とする。(有界とも擬凸とも限っていない。)Ωの定義関数ρを一つとって固定する。ρは$\partial\Omega$の近傍U上のC^2級実関数で、$\Omega\cap U = \{x\in U\,;\ \rho(x) < 0\}$であり、かつ$d\rho$は$\partial\Omega$上でいたるところ非退化である。

$T(\partial\Omega)$で$\partial\Omega$の接ベクトル束を表す。$T(\partial\Omega)$をMの接ベクトル束の部分集合とみなし

$$(5.1)\qquad T^{1,0}(\partial\Omega) = \{\, v \in T^{1,0}M \cap (T(\partial\Omega)\otimes \mathbf{C})\ ;\ \partial\rho(v) = 0\},$$

とおく。ただし$T^{1,0}M$はMの正則接ベクトル束を表す。$\partial\rho$は$d\rho$の(1,0)-成分であった。以下でも$\partial\bar\partial\rho$とρの複素ヘシアンを混同して用いる。

x を$\partial\Omega$の点とし、x における$\partial\Omega$の**Levi符号数**をエルミート形式

$$\begin{array}{ccc} T^{1,0}(\partial\Omega)\times T^{1,0}(\partial\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \cup\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\cup \\ (v,w) & \longmapsto & \partial\bar\partial\rho(v,\bar w) \end{array}$$

(以下では$\partial\bar\partial\rho$と略記)の正固有値の個数と負固有値の個数の順序対として定義する。固有値を定義するには$T^{1,0}(\partial\Omega)$上のエルミート計量が必要だが、Levi符号数が計量や定義関数の取り方によらないことは明らかであろう。

$\partial\Omega$の Levi符号数 (s,t) が いたるところ $s \geq n-q$ (または $t \geq n-q$)を満たすとき、$\partial\Omega$ は q-凸 (または q-凹)であるという。$\partial\Omega$のある近傍上にKähler計量 g があり、$\partial\Omega$の各点で g に関する$\partial\bar\partial\rho$の固有値から任意に選んだq 個の和が正(または負)であるとき、$\partial\Omega$ は 超q-凸 (または超q-凹)であるという。Ω についてもこれらの用語を流用する。

M 上のC^2級実関数φが点 x で q-凸であるとは、x で φのLevi形式

$$\begin{array}{ccc} T^{1,0}M\times T^{1,0}M & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \cup\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\cup \\ (v,w) & \longmapsto & \partial\bar\partial\varphi(v,\bar w) \end{array}$$

が$n-q+1$ 個以上の正固有値を持つことをいう。Mがq-完備であるとは、いたるところq-凸な皆既関数を持つことをいう。q-凸でない点の集合がコンパクトであ

るような皆既関数をもつ複素多様体はq-凸であるという。以下ではφのLevi形式を$\partial\bar{\partial}\varphi$と略記する。

最大値の原理より次は明白。

命題5.1.　Ω が有界で(n−1)-凹なら、Ω上の正則関数は定数に限る。

DをM上の正因子でコンパクトな台をもつものとし、直線束[D]上に定理1.3の仮定をみたすファイバー計量 h があるとする。δでDの台を表しδ'でその非特異部分を表す。仮定より、曲率形式Θ_h のδ'への(微分形式としての)制限$\Theta_h \mid \delta'$は、ある点 $x_0 \in \delta'$で 0 でない。x_0 を含むδの連結成分を δ_0 で表す。

命題5.2.　δ_0 は(n−1)-凹な近傍系をもつ。

証明のスケッチ：　Dは既約かつ非特異と仮定する。一般にも広中の特異点解消定理よりこの場合に準ずる議論で証明ができる。

Step 1.　$D - \{x_0\}$ は（いたるところ）(n−1)-凸な関数をもつ(cf. [G-W])。それを一つとり、νとする。

Step 2.　D上のC^∞級非負関数 η　で次の a), b) をみたすものをとる。

a)　x_0 のある近傍上で $\eta \equiv 1$ である。

b)　suppη 上で $\Theta_h \mid D$ は零点を持たない。

Step 3.　D上のC^∞級関数 ξ を

$$\xi(x) = \begin{cases} (1-\eta(x))\,\nu(x) & x \in D - \{x_0\} \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

により定義すると、[D]のファイバー計量 $h_\varepsilon := h\exp(-\varepsilon\xi)$ $(\varepsilon > 0)$ の曲率形式をDに制限したものは、簡単な計算でわかるようにεが十分小さければいたるとこ

ろ正固有値をもつ。

Step 4.　[D]の標準断面を s とし、h に関する s の長さを $|s|_\varepsilon$ で表すと、集合

$$\{ z \in M ; -\infty \leq \log |s(z)|_\varepsilon < -R \}$$

の D を含む連結成分は、εが十分小でRが十分大なら D の (n−1)-凹な近傍になる。

定理1.3の証明のスケッチ:　仮定より、[D]はKähler錐の閉包に入り、しかも曲率の条件より、Dが代表する$H^2(M,\mathbf{Z})$の元の2乗はMのコホモロジー環において零でない。したがってDemailly-Peternellの消滅定理(cf. [D-P])より、

$$(5.2) \qquad H^{0,1}(M, [-D]) = \{0\}$$

である。

この先、まず D が連結な場合を片付ける。この時は命題5.1と命題5.2より δ の(連結な)近傍上で定数でない正則関数は存在しないから、(5.2)から所期の目的であった$H^1_c(\Omega,\mathcal{O}) = \{0\}$ が従う。

一般の場合、δのある連結成分上で Θ_h が恒等的に0になる可能性を検討しなければいけない。(その場合以外は上と同様。) このような連結成分があるとし、それをδ"とする。すると [D] はδ"上で位相的に自明になるので、δ"の近傍上の正則関数はδ" の近くで定数かまたはコンパクトな定値集合を持つ。したがってこの関数はMのKähler性よりM全体に解析接続され、従って δ_0 の近傍上で定数になるから、一致の定理によりもともと定数である。この理由により、一般にも(5.2)の帰結として$H^1_c(\Omega,\mathcal{O}) = \{0\}$ が得られる。(5.2)の代わりに定理1.1の証明に用いたものと類似のL^2消滅定理を使うこともできるが、その詳細は[Oh-13]に譲る。

6．未解決問題　　すでに注意したように、解析空間X上で正則関数に対するHartogs型拡張定理が成立するなら、有界な連結成分を含まず補集合がコンパクトな開集合は連結になる。ところがこのような状況以外でも、Hartogs型の拡張現象はごくありふれた形で存在する。たとえば、$\mathbf{CP}^3$内の二つの複素直線L_1, L_2が交点を持たなければ $\Omega = \mathbf{CP}^3-(L_1 \cup L_2)$ 上ではHartogs型拡張定理は当然成

立しない。しかし、CP^3上ではLevi問題が肯定的に解けているから、 Ωの任意のコンパクト集合Kに対し、$\Omega-K$の非コンパクトな連結成分の一つの上で有理型関数を与えると、それがCP^3全体へと解析接続されることがわかる。この現象は[H-M]において代数幾何の観点からも解析されているが、次の形では未解決のようである。

問題.　Mはn次元の連結な$(n-1)$-凸多様体、KはMのコンパクト集合とする。このときM$-$Kの任意の非コンパクトな連結成分上の全ての有理型関数はM上に解析接続できるか。

$(n-2)$-凸多様体上の$(0,1)$型Dolbeaultコホモロジー類については、これに類する拡張定理は成立しない(cf.[G-R])。

引用文献

[A-G]　Andreotti, A. and Grauert, H.　Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,　Bull. Soc. Math. France **90** 1962 193–259.

[A-N-1]　Andreotti, A. and Norguet, F.　Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie,　Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20** (1966), 197–241.

[A-N-2]　————　Cycles of algebraic manifolds and $\partial\bar{\partial}$-cohomology,　Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **25** (1971), 59–114.

[A-V]　Andreotti, A. and Vesentini, E.　Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds,　Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25** (1965), 81–130.

[A]　Aronszajn, N.　A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order,　J. Math. Pures Appl. (9) **36** (1957), 235–249.

[A-W]　Atiyah, M. F. and Ward, R. S.　Instantons and algebraic geometry,　Comm. Math. Phys. **55** (1977), 117–124.

[B]　Barrett, D. E.　Biholomorphic domains with inequivalent boundaries,　Invent. Math. **85** (1986), 373–377.

[C]　Christ, M.　Global C^∞ irregularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem for worm domains, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996),1171–1185.

[C-R]　Colţoiu, M. and Ruppenthal, J.　On Hartogs' extension theorem on (n−1)-complete complex spaces,　J. Reine Angew. Math. **637** (2009), 41–47.

[Dm]　Demailly, J.-P.　Cohomology of q-convex spaces in top degrees,　Math. Z. **204** (1990), 283–295.

[Dm-P]　Demailly, J.-P. and Peternell, T.　A Kawamata-Viehweg vanishing theorem on compact Kähler manifolds,　J. Differential Geom. **63** (2003),

231–277.
[Di] Diederich, K. Some aspects of the Levi problem: recent developments, Geometric complex analysis (Hayama, 1995), 163–181, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
[Di-F] Diederich, K. and Fornaess, J. E. Pseudoconvex domains: an example with nontrivial Nebenhülle, Math. Ann. **225** (1977), 275–292.
[D-Oh] Diederich, K. and Ohsawa, T. A Levi problem on two-dimensional complex manifolds, Math. Ann. **261** (1982), 255–261.
[G-1] Grauert, H. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 460–472.
[G-2] ——— Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. **146** (1962), 331–368.
[G-3] ——— Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten, Math. Z. **81** (1963), 377–391.
[G-R] Grauert, H. and Riemenschneider, O. Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper-q-konvexem Rand, Problems in analysis (Lectures Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), pp. 61–79. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.
[G-W] Greene, R. E. and Wu, H. Embedding of open Riemannian manifolds by harmonic functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25** (1975), 215–235.
[H] Hartogs, F. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrer unabhängiger Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, Math. Ann. **62** (1906), 1-88.
[H-M] Hironaka, H. and Matsumura, H. Formal functions and formal embeddings, J. Math. Soc. Japan **20** (1968) 52–82.
[I] Ivashkovitch, S. The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kähler manifolds, Invent. Math. **109** (1992), 47–54.
[L] Levi, E. E., Sulle ipersuperficie della spazi a 4 dimensioni che possono essere frontiena del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, Ann. Mat. Pura Appl. **18** (1911), 69-79.
[Li] Lieb, I. Le problème de Levi, Gaz. Math. **115** (2008), 9–34.
[M-P-1] Merker, J. and Porten, E. A Morse-theoretical proof of the Hartogs extension theorem, J. Geom. Anal. **17** (2007), 513–546.
[M-P-2] ——— The Hartogs extension theorem on (n−1)-complete complex spaces, J. Reine Angew. Math. **637** (2009), 23–39.
[Oh1] Ohsawa, T. Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 853–870.
[Oh-2] ——— Addendum to: "A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kähler manifolds" [Invent. Math. **63** (1981), 335--354], Invent. Math. **66** (1982), 391–393.
[Oh-3] ——— A Stein domain with smooth boundary which has a product structure, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 18 (1982), 1185–1186.
[Oh-4] ——— Completeness of noncompact analytic spaces, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 683–692.

[Oh-5] ———— Vanishing theorems on complete Kähler manifolds, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 21–38.

[Oh-6] ———— 複素解析幾何と$\bar{\partial}$方程式 培風館 2007

[Oh-7] ———— On the complement of Levi-flats in Kähler manifolds of dimension ≥ 3, Nagoya Math. J. **185** (2007), 161–169.

[Oh-8] ———— A remark on pseudoconvex domains with analytic complements in compact Kähler manifolds, J. Math. Kyoto Univ. **47** (2007), 115–119.

[Oh-9] ———— A reduction theorem for stable sets of holomorphic foliations on complex tori, Nagoya Math. J. **195** (2009), 41–56.

[Oh-10] ———— 複素葉層の安定集合の幾何と$\bar{\partial}$方程式 葉層の微分幾何とベルグマン核 RIMS共同研究報告集 数理解析研究所講究録 **1661** (2009), 87-98.

[Oh-11] ———— 上空移行からツイスター原理へ ---- 一つの夢想, 研究集会「複素解析とその発展」(2009/01/24-26), 講演原稿

[Oh-12] ———— L^2 vanishing for certain $\bar{\partial}$-cohomology of pseudoconvex Levi nonflat domains and Hartogs type extension, preprint.

[Oh-13] ———— On the complement of effective divisors with semipositive normal bundle, to appear in Kyoto J. Math.

[Oh-14] ———— Hartogs Type Extension Theorems on Some Domains in Kähler Manifolds, to appear in Ann. Polo. Math.

[R-S] Remmert, R. and Stein, K. Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Ann. **126** (1953), 263–306.

[Rt] Rothstein, W., Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen. Die Fortsetzung analytischer Mengen in Gebieten mit analytischen Schlitzen, Math. Ann. **133** (1957), 400–409.

[Sa] Sakai, E. Meromorphic or holomorphic completion of a Reinhardt domain, Nagoya Math. J. **38** (1970), 1–12.

[Si-1] Siu, Y. T. Analytic sheaf cohomology groups of dimension n of n-dimensional noncompact complex manifolds. Pacific J. Math. **28** (1969), 407–411.

[Si-2] ———— Techniques of extension of analytic objects, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 8. Marcel Dekker, Inc., New York, 1974, iv+256 pp.

[Si-3] ———— Pseudoconvexity and the problem of Levi, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 481–512.

[T] Takegoshi, K. Relative vanishing theorems in analytic spaces, Duke Math. J. **52** (1985), 273–279.

付録

Grauertは何を見たか — 岡と小平の後で

大沢健夫（名古屋大学多元数理）

多変数関数論冬セミナー(2011/12/17 広島大学東千田キャンパス)における講演原稿に基づく

はじめに　このたびの講演依頼を頂いたのは今年の7月、多変数複素解析京都シンポジウムで[Oh-3, 4]と[Oh-7]について報告した後で、こんな大それた題で話をしようなどとは思ってもみない頃のことでした。冬には後者を少し進めて話ができればと思ってお引き受けしたのです。ところが９月15日になって、ご出席のほとんどの皆様と同様、宮嶋公夫氏からのメイルでHans Grauert先生(以下敬称略)が他界されたことを知りました。享年81才(1930/2/08~2011/9/04)、私にとって、30余年の間つねに仰ぎ見つつ目標とし、その謦咳に接するたびに触発され敬愛の念を募らせてきた、偉大な英雄の死でした。

そのあと11月半ばまでかけて上の計画を変更したのは、もちろんこの出来事の影響によりますが、そこには多少の委細がありますので簡単に述べさせて頂きます。

9月の上旬、[Oh-3, 4]の査読意見が立て続けに送られて来ました。意見の内容から査読者は明らかに別人のようなのでどこか腑に落ちないものを感じていましたが、Grauertの訃報に接して謎が解けたような気がしました。拙論は一方が他方の続きになっているのですが、いずれもGrauertの有名な仕事に関係していたからです。そこで、査読意見が完全には否定的ではなかったこともあり、予定を変更して講演の際はこの２つをまとめ、未解決問題を加えるなどして新鮮味を加えてみようと思いつきました。

ところが10月にあった研究集会で、(ネタが少ない悲しさで)ついついその形にまとめた話をしたところ、次はもう一つ論文ができてからでないと話せないという、どうにも引っ込みのつかない自縄自縛の状態に陥ってしまいました。

そんなわけで再度予定を変更し、今度はGrauertの仕事の中から材料を選んで一つの風景を描き、最近の結果については軽くふれるだけにしようと考えました。具体的にはGrauert自選の論文集[G-10]の第２部と第５部に的を絞り、Grauert自身による解題を拠り所としていくつかの有名な理論にふれ、その延長上に[Oh-3, 4]を位置づけようということです。

そこでGrauertの自注を話の糸口にしましたが、そのため屋上に屋を架したり、場所によっては「評の評」ともとられかねないところがあるかもしれません

が、決してGrauert批判ではありませんのでご了解ください。

講演題目についてですが、これは6年前に出た「ナッシュは何を見たか — 純粋数学とゲーム理論」[N]という本にあえてかぶせました。その理由は、Grauertが順像定理[G-6]の証明のアイディアを述べた箇所で、コサイクルに対する平滑化における考え方がNash-Moserの陰関数定理のものと似通っていることを指摘しているからです。これらの仕事が互いに独立であることと、Nash (1928-)とGrauertが同世代でもあることから、このような題もあろうかと思ったわけです。

「岡と小平の後で」は第２部と第５部の内容からですが、[N]の原題である"The Essential John Nash"のニュアンスに近い意味もあります。ここを「Levi問題と層コホモロジー」にしても数学的内容はほとんど同じですが、話の流れがかなり変わります。(急流を一気に下る感じになってしまうでしょう。)

で、本題に入る前に、Grauertが多変数関数論を「どう見ていたか」を押さえておきたいと思います。

Grauertの次の言葉は、P.Thullen(1907-1996)の80才を祝う会(於Fribourg)での講演をもとにした論説(cf.[G-9])のまえがきにあるものです。

> *Complex analysis* (of several complex variables) is rather a special kind of geometry than an analysis of properties of functions.

皆様がこの見方に賛同されるかはともかく、本日の私の話はできるだけこれと矛盾しないように心がけたいと思います。

Grauertの全貌をとらえたわけではもちろんなく、オマージュとしても中途半端な出来でしょうが、こういう事情ですのでご辛抱いただければ幸いです。

§1．岡の後で — Stein多様体から有限性定理へ　Grauertの仕事のうち、最も有名で広汎な影響があったものは、[G-4]におけるStein多様体の特徴付け

> **皆既的(exhaustive)な強多重劣調和関数 (strictly plurisubharmonic function)を持つ複素多様体はSteinである。**

だと思います。(皆既は「みなつくす」と訓読みできます。) これに出会ったとき、我が目を疑ったのは私だけではないはずです。この基本的命題が得られたのは、複素多様体上のLevi問題が「**強擬凸領域は正則凸である**」という形で解けた結果でもありました。

Grauertがここに至る過程をたどってみるため、"Levi Problem and Pseudoconvexity"と題された[G-10]の第２部を見てみましょう。その解題は次の文章で始まっています。

The most important papers of this section are [4] and [19].

いかにも単刀直入な書き出しですが、[19]が[G-4]です。番号は発表順になっているので、[4](以下では[G-2])は初期の論文になります。したがって、Grauertにとって[G-4]への第一歩は概ね[G-2]であったろうと思えます。この[G-2]はStein空間の関数環的特徴付けで、これよりとくに、$\mathbf{C}^n$上の分岐リーマン領域に対しては「正則凸ならばStein」がいえます。

このあたりの文章は極めて率直です。たとえばGrauertはK. Stein(1913-2000)の論文[S](Regularitätsgebieteの名でStein多様体を導入)に言及するやいなや、

Stein had too many axioms.

とばっさりやってしまいます。[G-2]の主結果はこれでほぼ言い尽くされています。そして、証明はK. Oka(岡潔 1901-78)の方法によったと述べたあと

A much more direct and simpler proof was given in [65].

と書いています。[65]は[G-R-2]で、『シュタイン空間論』(宮嶋公夫訳　2009 シュプリンガー数学クラシックス）です。

この調子で、「岡[O-3]が$\mathbf{C}^n$上の不分岐リーマン領域に対してついにLevi問題を解いた」に続いて

Oka's methods are very complicated.

という言葉が飛び出します。もっともこれはすぐにフォローされていて、Grauertは親しかったSiegel(1896-1981)を引き合いに出しながら

C. L. Siegel nevertheless did not like it: Oka's method is constructive and this one is not!

と付け加えています。

Grauertが岡をたいへん尊敬していたことは、私の先輩諸氏が口を揃えて言っ

ています。ちなみに岡もGrauertを高く評価していたそうで、有名な「自分は一本のロープで川を渡り、後の人が立派な橋を作った」という述懐には、[G-4]への賞賛が込められているような気がします。

そこで[G-4]の立派なところですが、それは単に岡理論を一般化して証明を単純化したというだけでなく、解析空間上の層係数コホモロジーについて、有限性定理という新たな理論を開拓したことにあると私は思います。

特にその中の「コホモロジー類の解析接続」という問題意識に独自性が認められます。たとえばDが複素多様体M内の強擬凸領域であれば、M上の解析的連接層を係数とするD上のq次コホモロジー類は、$q \geq 1$ ならDの閉包の近傍へと一意的に拡張できますが、これはD上のq次コホモロジー群$(q\geq 1)$の有限次元性を意味します。コサイクルを定める関数系の定義域をコバウンダリーを法として拡げるところが議論のポイントです(bumps lemma)。

この考えは[G-6]で用いられましたが[A-G]でも一般化され、サイクル空間上の関数論に光を当てました(cf. [A-N-1, 2], [B])。その結果、コホモロジー類の積分で定まる関数を決定する問題や、そのクラスの関数空間の性質について、幾つかの場合に調べられています(cf.[Oh-2])。そこにどんな“special geometry”があるかということが、Grauertの立場からは一つの問題でしょう。[A-G]は第５部に入っています。

1次コホモロジーの有限次元性を用いるとDの正則凸性が簡単に示せます。この発見は、やはり第２部所収の有名な[G-7]において、例外集合の特徴付けへと展開しました。

例外集合(exceptional set)は代数多様体の双有理幾何の理論には例外なく登場する基本的対象で、適正(proper)な双有理的正則写像の孤立臨界値の逆像となりうる連続体をいいます。とくに２次元複素多様体内の複素曲線に対しては、それが例外集合であるための必要条件として自己交差行列が負定値であることがMumford[M-1]によって知られていましたが、[G-7]ではそれが十分条件であることが示されました。それは

2次元複素多様体内で、C_k $(1\leq k\leq m)$を既約成分とするコンパクトかつ連結な複素曲線$C = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$ に対し、C_i とC_j の交点数を第(i,j)成分とする行列が負定値なら、Cは例外集合である。つまりCは1点につぶせる。

というものです。このような基礎の上に、複素曲面の特異点に関してより詳しい研究が積み重ねられて来たことはご承知の通りです。ちなみに2012/01/20現在のmathscinetによれば、[G-7]はGrauertの全著作中で最も被引用度数の多いものです。

さて、Grauertがたどった道が岡の開いたものだったことは論を待たないとして、上のようなコホモロジー類の接続という観点がどこから来たかを探るため、彼の初期の仕事に目を向けてみましょう。

我が師中野茂男(1923-1997)作の『岡潔頌』という長歌の中に、

世の人挙(こぞ)り　優秀と　推すをば措きて　最先(いやさき)に
我が意えたるは　第一の　作なりけりと　高らかに
述べてけりとは　我が師なる　秋月大人(うし)の　伝へたる
言(こと)にてありけり

という一節があります。これは岡が旧友の秋月康夫(1902-84)にむけて自分の業績について語ったとき、代表的業績とされる「不定域イデアルの理論」[O-2]よりも、第一論文の「上空移行の原理」[O-1]の方に深い愛着を示したことを言っています。

Grauertの処女作への思いはどうだったでしょう。論文リストを見ますと、1954年にComptes Rendus に出された[G-1]が目に留まります。これは[G-2]の後に出た彼の学位論文である[G-3]の速報です。

[G-3]は第２部の最後で、コメントは

The paper [5] was my thesis.

で始まっています([5]=[G-3])。どこか「それ以上でもそれ以下でもない」という感じですが、ともかく主結果の要約は次のように述べられています。

１．複素多様体上のHermite計量がKähler計量であるためにはすべての局所解析集合が(体積に関して)極小集合であることが必要十分条件である。

２．C^n 上の不分岐なリーマン領域で滑らかな実解析的境界を持つものについては、擬凸であることと完備なKähler計量を持つことは同値である。

このあとで後者を受けた諸結果の紹介がありますが、冒頭の高い調子に比べるとどこかさめています。

実際には論文の中身はたいへん濃く、２で実解析性の条件を落とした時の反例とか、L. Kronecker(1823-1891)に由来する問題の部分的解答である

n次元Stein空間の解析集合は高々n+1個の正則関数の共通零点集合である。

(後にForster-Ramspott[F-R]がn個で十分なことを証明)が含まれていて、触発されるところが多かった私は「そんなに遠慮しなくてもよいのに」と、じれったささえ覚えます。

その一方、嚇々たる[G-4]に比べればここでの結果はそこへの瀬踏みと思えることも確かです。また、序文に書かれた

どんなKähler計量をもつ多様体がSteinか？

という問い自体は本格的なのですが、残念ながらこれには現在でも決定的な解答が得られていないのです。この論文が第２部のしんがりに置かれるのも宜なるかなといえましょう。

しかしこの時点でGrauertの目にはいくつもの山頂がはっきりとらえられていたような気がします。

実際、完備Kähler多様体についての新しい結果が1980年代になってからあちこちで得られ出し、ここでGrauertに言及されたものの他にも、Greene-Wu[G-W-1]による$\mathbf{C}^n$の特徴付けやDorfmeister-Nakajima[D-N]による等質Kähler多様体の二重ファイバー構造の解明など、顕著なものがあります。

前者はユークリッド計量に"近い"完備なリーマン計量についての間隙定理(gap theorem)へと変貌し(cf.[G-W-2])、後者はLie群の表現論において一つの幾何学的手段を提供することになりました(cf. [Lis], [I])。また、最近のことですが、リッチ平坦な完備Kähler計量に関して小林亮一氏による意欲的な研究があります(cf. [Kb])。この先もたいへん奥が深そうです。

ちなみにGrauertが完備Kähler多様体をテーマに選んだのは、彼がスイスのETH(チューリッヒ工科大学)に滞在中のことで、B.Eckmann (1917- 2008) の影響を受けてのことだと言われます。EckmannはGrauertの師匠のH. Behnke (1898-1979)とは違って複素解析の専門家ではありませんでしたので、彼に向かって岡の仕事を解説するのは、Grauertにとってもやや骨が折れる仕事だったかもしれません。

Cartan-Thullenの名作[C-T]から説き起こした[G-3]の序文には

Wir verdanken dann K. Oka die wesentliche Einsicht, daß die Existenzgebiete von holomorphen Funktionen auch durch *lokale Randeigenschaften* charakterisiert werden können. Ein Beispiel einer solchen lokalen Randeigenschaft ist die pseudokonvexität des Randes nach LEVI-KRZOSKA.

という一節がありますが、これは話をP. Lelong(1912-2011)による多重劣調和関数の研究から完備Kähler計量へと持って行くための前置きです。Levi問題への新しいアプローチですが、「幾何学的接続現象は多様であろう」というおおらかさが感じられます。

ETHには当時トポロジーの大家であるH. Hopf (1894-1971)もいました。彼は初めて非Kähler多様体を世に出したことでも有名です(cf. [H])。[G-3]の方法で$\mathbb{C}^n-\{0\}$上に完備なKähler計量が構成できますが、これはHopfを大いに驚かせたようです(cf.[Re])。

Grauertはあるとき門弟（たち？）に「私の学位論文の意味が理解されるには四半世紀はかかるだろう」と語ったそうですが、これを「今に見ていろボクだって」と解し、Grauertの処女作への愛着の証と見ることもあながち無理ではないでしょう。実は、私はおこがましくもこの予言は当たったと思っていました。

というのも、Andreotti-Vesentini[A-V]やHörmander[Hö]による$\bar{\partial}$方程式のL^2理論を勉強した後で[G-3]を読み、これに刺激を受けて書いた拙論[Oh-1]は、結論こそ上の２の実解析性の仮定をC^1級に弱めただけのことで、いわば[G-3]の忠実な後追いですが、その手法はまったく異なり、L^2理論のSkoda[Sk]やPflug[P]による応用に触発されたものだからです。

この方法の発見により、私の研究は後にL^2拡張定理[Oh-T]へとつながりました。1980年の夏、Göttingen大学のセミナーで[Oh-1]を話す機会がありましたが、それを聞き終えたGrauertは満足げにドイツ流の拍手(机をコンコンと叩く）をしてくれました。

ちなみにL^2理論は分岐被覆上の正則関数の構成にも使えます(cf.[Dt])。そこから振り返って見れば、解析空間論[G-R-1]の主定理がBergman核を用いても証明できることを指摘した河合良一郎の仕事[Ka-1]は、たいへん先見性があったことになります。ちなみに1960年、河合はインドのホテルで毎朝Grauertと一緒に食事をし、「私が今日あるのは全く岡潔先生の研究があったからだ」という言葉を聞いています(cf. [Ka-2])。

ところで1954年にAmsterdamで開かれたICM(国際数学者会議)で、24才のGrauertはこの論文について30分の講演をしています。ネタはもちろん[G-1, 3]です。そのときのフィールズ賞受賞者は小平邦彦(1915-1997)とJ.-P. Serre (1926-)でした。よく知られているように、小平の主要な受賞理由は射影的代数多様体の微分幾何的特徴付け[K-1, 2]であり、

コンパクトな複素多様体M上の正直線束Lは豊富である。すなわちLの十分高い正ベキの正則断面の連比でMは射影空間に埋め込める。

というものでした(小平の埋め込み定理)。この証明には正直線束に対するコホモロジー消滅定理(小平の消滅定理)が用いられます。

今日の多変数複素解析では[K-2]と[G-3]は一つの立場から俯瞰できるようにもなりましたが(例えば[T])、[G-4]がそのきっかけを初めて与えたと思います。具体的には、Grauertはこの論文で小平の埋め込み定理を正規なコンパクト解析空間へと一般化していますが、それは強擬凸領域上の有限性定理から例外集合上の小平型消滅定理を導くことによったのです。

数学では、本質的でないものを取り去ることによって、遠くのものがよく見えるようになります。

Grauertの仕事からも、そのことがよくわかります。

§2．小平の後で — 消滅定理への回帰　Grauert-Riemenschneiderの消滅定理[G-Ri-1, 2]は小平の消滅定理の一般化のうちでも特に重要なもので、Ramanujam[Rm-1,2]を経て非常に応用の広い「川又-Viehwegの消滅定理(cf. [Km-1,2], [V])」へとつながりました。一続きの[G-Ri-1, 2]のうち、[G-Ri-1]は[A-G]を補完する意味がありますので、[A-G]と[G-Ri-2]が[G-10]の第5部である"q-Convexity and Cohomology"に入っています。このように、[G-Ri-1, 2]の[A-G]に対する関係は[G-7]と[G-4]の関係に似ています。そこでまず[A-G]について述べてみたいと思います。

[A-G]の主結果はq-凸空間やq-凹空間上のコホモロジー有限性定理です。q-凸性は、解析集合の接続の理論のためにRothstein[R]が導入したものが元になっていますが、強擬凸領域を一方の端に置き、一点穴あき解析空間を他方に置いて、その間を仕切るための指標です。

具体的には、Xを解析空間としてq-凸関数、q-凸性、q-凹性を次のように定義します。X上の関数ψがq-凸(q=1,2,3,...)であるとは

Xの各点に対し、その近傍U、Uを解析集合として含む領域 $G \subset \mathbf{C}^N$ およびG上のC^∞級関数ψがあって、$\psi|U = \psi$ かつ　$\partial\bar{\partial}\psi$ (ψの複素Hesse行列と同一視)はG上いたるところ $N - q + 1$ 個の正固有値をもつ

ことをいい、Xがq-凸(またはq-凹)であるとは、コンパクト集合 $K \subset X$ および X 上のC^∞級関数ψがあって

i) $\psi\,|(X-K)$ は q-凸

かつ

ii) ある $b\in \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ (または $c\in \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$)に対し $\psi: X\to[\inf\psi, b)$
(または $\psi: X\to(c, \sup\psi]$) は適正

となることをいいます。Kとして空集合がとれるq-凸空間をq-完備空間といいます。q-凹の場合はこれに対応するものはありません(最大値原理より)。
q-凸な(またはq-凹な)空間 X と $\sup\psi<d$ (または $\inf\psi>d$) なる d に対し、

$$X_d=\{x\in X \mid \psi(x)<d\} \quad (\text{または } X_d=\{x\in X \mid \psi(x)>d\})$$

とおきます。解題は

Assume always that X is a reduced complex space (the assumption "reduced" is actually not necessary) . . .

で始まり、flabby resolution(軟弱分解)によるコホモロジー群H (X,$\mathcal{S}$)の定義、上記のq-凸関数やq-凸空間等の定義と続き、その後で次の二つの定理が紹介されています。(定理の番号は筆者によります。)

定理1. Xがq-凸ならば、$H^{\mu}(X_d,\mathcal{S})$ ($\mu\geq q$) のすべてのコホモロジー類は$H^{\mu}(X,\mathcal{S})$の要素へと接続しうる。$\mu>q$ ならばこの接続は一意的である。

定理2. Xがq-凹で $0<\mu<\operatorname{codh}(\mathcal{S})$ ($\operatorname{codh}(\mathcal{S})$は$\mathcal{S}$のホモロジー的余次元) の場合、$H^{\mu}(X_d,\mathcal{S})$ ($\mu\geq q$) のすべての要素は一意的に$H^{\mu}(X,\mathcal{S})$まで接続できる。

[A-G]の主結果は$\dim H^{\mu}(X,\mathcal{S})$の有限性ですが、それはこのような形のコホモロジー類の接続定理の帰結です。有限性定理の前に接続不能性についての興味深い結果[G-8]が紹介されます。それはある種のHartogs領域においては側面を除いた境界が自然境界になりうるという例です。

定理1と定理2に応じた有限性定理は次の通りです。

定理3． dim $H^{\mu}(X,\mathcal{S})$は、X がq-凸(またはq-完備)で $\mu \geq q$ ならば有限(または0)であり$\mu >$ dimXならば 0 である。

定理4． Xがq-凹で$\mu <$ codh$(\mathcal{S})$ − q ならば dim $H^{\mu}(X,\mathcal{S}) < \infty$ である。

この続きを読むと、定理２の元ネタが解析集合の接続をコホモロジー類の接続についてのG. Schejaの論文[Sch]であったことが推測できます。実際、[A-G]の速報にあたる[G-5]ではq-凸空間の場合だけが述べられていますので、[Sch]がヒントになってプロジェクトA-Gが完成したと思われます。Schejaはq-凸とは別の方向に進み、可換代数で成果を挙げました。

Andreotti-Grauert理論の位置づけですが、ここは専門家によって意見が分かれるようです。たしかに強擬凸領域上の理論は岡の思想圏であり意味ははっきりしていますが、q-凸やq-凹への拡張の意味を説明するには「解析接続」だけでは足りないかもしれません。そもそも層係数コホモロジー群の次元というものは解析空間の不変量としてもっとも基本的なものなので、その有限性条件を明快な幾何学的形式で与えた定理３、定理４の価値は高いはずですが、それらの真の価値を私たちはまだ理解しきっていないような気もします。一方、有限性定理に比べると消滅定理の方の意味はまだ分かり易いといえるでしょう。つぎに述べるのは[A-G]や[G-7]に続いて出された[G-Ri-1,2]についてですが、これらは消滅定理に関するものです。

Grauertの高弟であるI.Liebは機知に富んだ人物で、それはLevi問題のサーベイである[Li]を一読しただけでもわかりますが、時折吐く警句にはハッとさせられるものがあります。あるとき茶飲み話の中で出た「消滅定理は有限性定理とは本質的に異なる」という彼の言葉は私にとっては非常に印象的でした。

事実、[G-Ri-1]において$\bar{\partial}$方程式のKohn理論を用いて得られた消滅定理

(非コンパクトな)強擬凸多様体Xとその標準層K_Xに対して
$H^{\nu}(X,K_X) = 0$ $(\nu \geq 1)$ である。

は、まったく[A-G]が示す方向には見えません。つまり、これはコホモロジーの接続だけではカバーしきれない現象です。Serreの双対性を用いると、逆にこの定理からHartogs型の接続定理が従います。

小平の消滅定理がこの消滅定理の系になってしまうことも思い出しておきましょう。この理論がq-完備でないq-凸空間に対してどこまで一般化しうるかにつ

いては、[G-Ri-1]の中で反例も含めて調べられています。O.RiemenschneiderもGrauertの門弟の一人で、特異点の理論で成果を挙げました(cf. [Ri])。

[G-Ri-2]では、解析空間上の標準層を用いて小平の消滅定理のMoishezon空間上への拡張がなされました。さらにその証明法からの自然な類推で、小平の埋め込み定理の類似が問題となり、次の形で提出されました。

コンパクトな複素多様体M上に正則エルミート直線束があり、その曲率が半正かつある点で正ならば、MはMoishezon多様体か。

この予想は14年間未解決でしたが、ついにY.-T. Siu [Si-1, 2]によって肯定的に解決されました。Siuの方法は直線束の高次のベキに対してコホモロジー群の次元を評価する、いわば「漸近的消滅定理」とでも呼ぶべきもので、J.-P. Demailly の有名なMorse不等式はその精密化にあたります(cf. [Dm])。

L^2拡張定理[Oh-T]の証明もここから一つのヒントを得ています。純正の消滅定理の方は、[G-Ri-2]以後、Mumford[M-2]の"covering lemma"にヒントを得たRamanujamの仕事をきっかけに川又-Viehwegの消滅定理へ、そして最近のDemailly-Peternellの消滅定理[Dm-P]へと発展して行きました。

ここまでをまとめますと、一つの豊かな流れに沿って、Levi問題から接続定理、有限性定理へ、有限性定理から消滅定理を経て漸近的消滅定理へ、そして消滅定理のさらなる展開へとつながる景観の変化を追えたように思います。

大江（たいこう）東に去り、浪は淘（あら）い盡くせり、千古風流の人物を
(蘇軾作「念奴橋」の冒頭部)

岡、小平、Grauertという英雄たちの武勲の地も、幾久しく、訪れる人々の感慨を呼び覚ますことでしょう。

§3．Kähler多様体上の解析接続　最後に拙論[Oh-3, 4]の結果を紹介します。消滅定理の帰結として解析接続をとらえたとき、Grauert-Riemenschneiderの消滅定理に意味のある拡張があるという話です。

Mを複素多様体とし、ΩはM内の局所擬凸な有界領域とします。このようなΩの全体を[A-G]式に眺めたとき、一方の端には強擬凸領域が見えますが、その反対側はどうでしょう(クイズです)・・・。

$M-\{p\}$ $(p\in M)$と答えた方は不正解です。$\dim M \geq 2$ ならこれらは局所擬凸ではないからです。正解となる領域は、境界がLevi平坦な実超曲面だったり、余次元

が1の解析的集合だったりするのです。この最果ての地から解析接続の現象を眺めてみましょう。

$\mathcal{O}$をΩの構造層とし、$H^k_c(\Omega,\mathcal{O})$で台がコンパクトなΩの$\mathcal{O}$係数k次コホモロジー群を表します。

$H^1_c(\Omega,\mathcal{O})=0$ ならば自然な制限写像

$$\rho : H^0(\Omega,\mathcal{O}) \longrightarrow \lim_{K\subset\subset\Omega} H^0(\Omega-K,\mathcal{O})$$

は全射であり(コホモロジー完全列)、従って$\partial\Omega$は連結でなければならないことに注意しましょう。

定理　MがKähler計量をもつとき、次のどれかが満たされれば $H^1_c(\Omega,\mathcal{O})=0$ である。

Case I.　$\partial\Omega$はLevi非平坦なC^2級実超曲面である。

Case II.　$\partial\Omega$はM内のコンパクトかつ余次元が1の解析集合であり、Ω上のC^∞級皆既関数φおよびM上のC^∞級 (1,1)形式ωが存在して、$\omega|\Omega=\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi$、$\omega|\partial\Omega\geq 0$、かつ $\omega|\partial\Omega\not\equiv 0$ となる。($\omega|\cdot$ は微分形式としてのωの制限を表す。)

Case Iが[Oh-3]、Case IIが[Oh-4]です。[Oh-3]の行く末はまだ微妙です。なお[Oh-5]や[Oh-6]にも証明の概略を書きました。

引用文献

[A-G] Andreotti, A. and Grauert, H.,　Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90 1962 193–259.

[A-N-1]　Andreotti,A. and Norguet,F.,　Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie,　Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 20 (1966), 197-241.

[A-N-2]　———,　La convexité holomorphe dans l'éspace analytique des cycles d'une variété algébrique,　Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21 (1967), 31-80.

[A-V] Andreotti, A. and Vesentini, E.,　Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.　25 (1965), 81–130.

[B]　Barlet,D.,　Convexité de l'espace des cycles.　Bull. Soc. Math. France 106 (1978), 373--397.

[C-T]　Cartan, H.　and Thullen, P.,　Zur Theorie des Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen,　Math. Ann. 106 (1932), 617-647.

[Dm]　Demailly, J.-P.,　Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la $\bar\partial$-cohomologie,　Annales de

l'institut Fourier, 35 (1985), 189-229.
[Dm-P] Demailly, J.-P., and Peternell, T., A Kawamata-Viehweg vanishing theorem on compact Kähler manifolds, J. Differential Geom. 63 (2003), 231–277.
[Dt] Dethloff, G.-E., A new proof of a theorem of Grauert and Remmert by L^2-methods, Math. Ann. 286 (1990), 129–142.
[D-N] J. Dorfmeister and K. Nakajima, The fundamental conjecture for homogeneous Kähler manifolds, Acta Math. 161 (1988), 23-70.
[F-R] Forster, O. and Ramspott, K., Singularitätenfreie analytische Raumkurven als vollständige Durchschnitte, Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. 1965 1965 Abt. II, 1–10 (1966).
[G-1] Grauert, H., Métrique kaehlérienne et domaines d'holomorphie, C. R. Acad. Sci. Paris 238, (1954). 2048–2050.
[G-2] ————, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Ann. 129, (1955). 233–259.
[G-3] ————, Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik , Math. Ann., 131 (1956), 38--75.
[G-4] ————, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. Math., (2) 68 (1958), 460-472.
[G-5] ———, Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes, Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 341-350.
[G-6] ———, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 5 1960 64 pp.
[G-7] ———, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331–368.
[G-8] ———, Kontinuitätssatz und Hüllen bei speziellen Hartogsschen Körpern, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 52 (1982), 179–186.
[G-9] ———, The methods of the theory of functions of several complex variables, Miscellanea mathematica, 129–143, Springer, Berlin, 1991.
[G-10] ————, Selected Papers I. and II., Springer-Verlag, 1994.
[G-R-1] Grauert, H. and Remmert, R., Komplexe Räume, Math. Ann. 136 1958 245–318.
[G-R-2] ————, Theorie der Steinschen Räume, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 227. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. xx+249 pp.
[G-Ri-1] Grauert, H. and Riemenschneider, O., Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper-q-konvexem Rand, Problems in analysis (Lectures Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), pp. 61–79. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.
[G-Ri-2] ————, Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Invent. Math. 11 (1970), 263–292.
[G-W-1] Greene, R. E. and Wu, H., Function theory on manifolds which possess a pole, Lecture Notes in Mathematics, 699. Springer, Berlin, 1979. ii+215 pp.
[G-W-2] ————, On a new gap phenomenon in Riemannian geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 79 (1982), no. 2, 714–715
[H] Hopf, H., Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, Interscience Publishers, Inc., New York, pp. 167–185.
[Hö] Hörmander, L., L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$ operator, Acta Math. 113 1965 89–152.
[I] Ishi, H., Unitary holomorphic multiplier representations over a homogeneous bounded domain, to appear in Adv. Pure Appl. Math.
[Ka-1] Kawai, R., On the construction of a holomorphic function in the neighbourhood of a critical point of a ramified domain, 1960 Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960) pp. 115–132 Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[Ka-2] ———, personal communication (a letter dated 2011/11/30).
[Km-1] Kawamata, Y., On the cohomology of Q-divisors. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 56 (1980), no. 1, 34–35.
[Km-2] ———, A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem, Math. Ann. 261 (1982), 43–46.
[Kb] Kobayashi, R., Asymptotically conical Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds, preprint.
[K-1] Kodaira, K., On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 39 (1953), 865-872.
[K-2] ———, On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties). Ann. of Math. 60, (1954). 28--48.
[Li] Lieb, I., Das Levische Problem, Bonner math. Schr. 387 (2007), 1-34.
[Lis] Lisiecki, W., A classification of coherent state representations of unimodular Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 25, Number 1 (1991), 37-43.
[M-1] Mumford, D., The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 9 1961 5–22.
[M-2] ———, Pathologies. III. Amer. J. Math. 89 1967 94–104.
[N] Nash, J., , The Essential John Nash edited by Kuhn, H.W. and Nasar, S., Princeton University Press, 2002. ナッシュ著 H.W.クーン編 S.ナサー編 落合卓四郎・松島斉訳『ナッシュは何を見たか：純粋数学とゲーム理論』シュプリンガー・フェアラーク東京（2005）
[Oh-1] Ohsawa, T., On complete Kähler domains with C^1-boundary, Publ. RIMS, Vol. 16 (1980), 929–940.
[Oh-2] ———, An interpolation theorem on cyles spaces for functions arising as integrals of $\bar{\partial}$-closed forms, Publ. RIMS Kyoto Univ. 43 (2007), 911-922.
[Oh-3] ———, L^2 vanishing for certain $\bar{\partial}$-cohomology of pseudoconvex Levi nonflat domains and Hartogs type extension, preprint.
[Oh-4] ———, On the complement of effective divisors with semipositive normal bundle, to appear in Kyoto J. Math.
[Oh-5] ———, Hartogs type extension theorems on some domains in Kähler manifolds, to appear in Ann. Polon. Math.
[Oh-6] ———, ケーラー多様体内のレヴィ非平坦擬凸領域について，数理研講究録「ポテンシャル論とファイバー空間」(2012)（この論説の本文）
[Oh-7] ———, On the cone of Kählerian infinitesimal deformations for complex tori, in preparation.
[Oh-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z. 195 (1987), 197-204.
[O-1] Oka, K., Sur les fonctions des plusieurs variables I: Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles, J. Sci. Hiroshima Univ. 6 (1936), 245-255.
[O-2] ———, Sur les fonctions des plusieurs variables VII: Sur quelques notion arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), 1-27.
[O-3] ———, Sur les fonctions des plusieurs variables IX: Domaines finis sans point critique intérieur, Japanese. J. of Math. 27 (1953), 97-155.
[P] Pflug, P., Holomorphiegebiete, pseudokonvexe Gebiete und das Levi-Problem, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 432. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1975). vi+210 pp.
[Rm-1] Ramanujam, C. P., Remarks on the Kodaira vanishing theorem, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 36 (1972), 41–51.
[Rm-2] ———, Supplement to the article "Remarks on the Kodaira vanishing theorem" (J. Indian Math. Soc. (N.S.) 36 (1972), 41–51). J. Indian Math. Soc. (N.S.) 38 (1974), no. 1, 2, 3, 4, 121–124 (1975).
[Re] Remmert, R., Complex analysis in the golden fifties, in K. Diederich (ed.) : Complex analysis. Dedicated to Hans Grauert on the occasion of his sixtieth birthday (1990), pp. 258-263, Vieweg 1991.

[Ri] Riemenschneider, O., The monodromy covering of the versal deformation of cyclic quotient surface singularities, Complex analysis in several variables—Memorial Conference of Kiyoshi Oka's Centennial Birthday, pp. 275–282, Adv. Stud. Pure Math., 42, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[Sch] Scheja, G., Riemannsche Hebbarkeitssatze fur Cohomologieklassen, Math. Ann. 144(1961), 345-360.

[Si-1] Siu, Y.-T., Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semi-positive case, Arbeitstagung, 1984.

[Si-2] ———, Asymptotic Morse inequalities for analytic sheaf cohomology. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86. Astérisque No. 145-146 (1987), 5, 283–297.

[Sk] Skoda,H., Applications des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 5 (1972), 545-579.

[S] Stein, K., Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem, Math. Ann. 123 (1951), 201–222.

[T] Takayama, S., Adjoint linear series on weakly 1-complete Kähler manifolds. I. Global projective embedding, Math. Ann. 311 (1998), 501–531.

[V] Viehweg, E., Vanishing theorems, J. Reine Angew. Math. 335 (1982), 1–8.