数理解析研究所講究録
第1783巻 2012年 188-197

Berndtsson・米谷・山口理論から見た 等ケーラー複素変形と等複素ケーラー変形の一例

大沢健夫
(名大・多元数理)

はじめに----Berndtsson・米谷・山口理論---- ここで報告できる新しい結果といえば複素トーラスに関する二三の簡単な計算結果にすぎないので、せめて背景であるBerndtsson・米谷・山口理論(以下ではBMYと略す)の説明の中で、多少の雑学的な蘊蓄を傾けてみたい。BMYへの一つの糸口は楕円函数論の中に認められるので、ここから話をつなげていこう。

標準的な楕円関数として広く知られるWeierestrassの$\wp$関数は、周期という助変数に関して正則である。定義により明白なこの事実はいかなる楕円関数も周期に関して正則な変動をもつことの一例だが、たった一つの実例であるレムニスケート関数から出発したGaussの研究においては、この点こそが「苦心の存するところ」であったらしい(cf. [T, p.63])。Gaussはこれによって周期のみの関数であるモジュラー関数に到達したが、超幾何関数を出発点において楕円関数とモジュラー関数を論じ尽くす壮大な構想を果たせずに去ったという(cf. [T, p. 68])。これらの関数の関連は(少なくとも筆者には)今日なお明確ではないが、Riemannの写像定理とSchwarzの鏡像原理によるモジュラー関数の幾何学的構成は、泉下のGaussを頷かせるものの一つではなかったろうか。ちなみにこの事実はわが国初の複素解析のテキストである「函数論」[Yk]にも記されている。一方、$\wp$関数を用いたレベル2のモジュラー関数の構成はGaussが手を染めた仕事を徹底させている。これは現代の保型形式論に受け継がれ、テータ関数を用いて一般のモジュラー形式が構成されている。(cf. 数学辞典第4版 437A)。

楕円関数が助変数を持つのに応じて、定義域である楕円曲線の族が複素上半平面H上に生じる。この族の全空間の普遍被覆は$\mathbf{H}\times\mathbf{C}$であり、この空間上の保型形式であるJacobi形式は重さ半整数の保型形式やGauss和と深い関係にあることが知られている(cf. [E-Z]など)。

楕円曲線の族を一般化して閉リーマン面の解析族を考えたものがTeichmüller空間上の普遍曲線族である。これには豊かな双曲幾何的構造が内在していることが知られている(cf. [I-T])。楕円曲線の場合と異なり、この場合は全空間の普遍被覆は底空間とファイバーの普遍被覆との直積にはならない。しかしこれがシュタイン多様体であることや、これを複素数空間内の有界領域として実現できることなどが知られている。Bersの同時一意化の理論(cf. [I-T])がその根拠であるが、山口博史氏は[Y]においてBers理論とは独立の立場から、このシュタイン性

が普遍被覆に限らずSchottky被覆に対しても成立することを示した([H-1]も見よ)。これはリーマン面の族に対するRobin定数の変動を解析した結果であった。リーマン面がSchottky被覆であれば、それらを平面領域として実現したとき補集合の対数容量は正になるので、ポテンシャル論的な興味の対象になるのである。閉リーマン面族の被覆空間とは限らぬ一般の解析族についても、全空間のシュタイン性は要請すべき自然な条件である(e.g. [Nm], [Nn])。この立場から、山口氏と米谷文男氏は全空間がシュタインであるような開リーマン面の解析族におけるベルグマン核の変動について研究し、[M-Y]で次の結果を得た。

定理 0.1. 開円板 D 上の開リーマン面の解析族 R(t) $(t \in D)$ に対し、もし全空間 $\bigcup_{t\in D} R(t)$ がシュタインであれば、R(t)上のベルグマン核(の対角線への制限)を $K(t,\zeta)|d\zeta|^2$としたとき $\log K(t,\zeta)$ は多重劣調和である。

$\bigcup_{t\in D} R(t)$上のベルグマン核と区別する意味で、$K(t,\zeta)|d\zeta|^2$を相対ベルグマン核という。

より一般にR(t) $(t \in D)$ がn次元の複素多様体の解析族であるときも、$\bigcup_{t\in D} R(t)$ がシュタインであれば、R(t)上のベルグマン核 $K(t,\zeta)(d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n)\otimes(d\bar{\zeta}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_n)$ に対して $\log K(t,\zeta)$は多重劣調和になる。パラメータ空間 D が高次元の領域でも同様であり、$\bigcup_{t\in D} R(t)$上の半正なエルミート直線束を係数とする相対ベルグマン核についても同様である。これはBo Berndtsson氏によって、凸体の幾何におけるBrunn-Minkowski理論をヒントに、[B-1]で確立されたPrékopaの定理の複素版が示唆する独創的な方法により示された(cf. [B-2])。同氏はさらにこれを拡張し、[B-3]において次を示した。

定理 0.2. $\pi: \mathcal{X} \longrightarrow D$ はコンパクトなケーラー多様体の解析族であり、全空間 $\mathcal{X}$ はケーラー計量を持つとする。このとき $\mathcal{X}$ 上の半正なエルミート直線束 L に対し、L係数の相対ベルグマン核を$K^L(t,\zeta)(d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n)\otimes(d\bar{\zeta}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_n)$としたとき、$\log K^L(t,\zeta)$は多重劣調和になる。

簡単な言い方をすれば、複素多様体上のシュタイン族またはケーラー族において、半正な直線束を係数とする相対ベルグマン核は対数的多重劣調和である。この注目すべき結論を含む一連の理論がBMYである。濱野佐知子氏の仕事[H-2]などにより、BMYは現在もファイバー空間上のポテンシャル論として進化中である。

さて、素朴な疑問だが、定理 0.2におけるXのケーラー性は、相対ベルグマン核が対数的多重劣調和であるための必要条件だろうか。複素トーラスの場合にやってみるとわかるように、そうではない。つまり定理 0.2 からケーラー性の条件は落とせない。これが「等ケーラー複素変形」の計算結果である。これにより、複素トーラスの変形空間の芽において、ケーラー族が存在するような方向を集めてできる錐を決定した。これに類することが文献中には見当たらなかったのでもう少し詳しく調べる事にし、双対的な問題である「等複素ケーラー変形」も計算した。これらの断片的な結果を、藤木明氏にご教示いただいたCalabiの論文[C]なども参考にしてまとめてみたのがこの論説である。

1．トーラス族の非ケーラー性について　n次元複素トーラスとは、複素n次元アファイン空間を複素n次元ベクトル空間の(rank 2nの)格子部分群の平行移動による作用で割ってできる商空間をいうのであった。一つの格子群は2n個のベクトルで生成されるから、すべてのn次元複素トーラスを含む完全な族が(自明な仕方で)$2n^2$次元の複素領域上に作れることになる。しかしこの族は互いに同型な複素トーラスからなるn^2次元の自明な族が含まれるので、その方向を簡約して考えることが多くの目的に適っている。つまり一般線形群GL(n,C)の作用によって、格子群を生成する2n個のベクトルのうちのn個は一定のベクトルe_i (i=1,2,...,n)だとしてよい。残りのn個を $v_j := \Sigma Z_{ij} e_i$ (j=1,2,...,n) とするとき、n次行列 $Z = (Z_{ij})$ はn^2次元の複素数空間の開集合内を動く。

$$\Gamma(Z) = \sum_i Ze_i + \sum_j Zv_j$$

$$T(Z) = C^n / \Gamma(Z)$$

とおく。Zが領域 $\Omega := \{Z\, ;\, \det(\mathrm{Im}Z) > 0\}$ 上を動くとき、T(Z)が全てのn次元複素トーラスを尽くすことは明らかであろう。

命題 1.1.　$n \geq 2$ のとき Ω は擬凸ではない。

証明. $\Omega' = \{Z \in \Omega\, ;\, Z_{11} = Z_{22},\, Z_{12} = -Z_{21},\, Z_{ij} = \sqrt{-1}\,\delta_{ij}$ (i > 2 または j > 2)$\}$とおくとΩ'上では $\det(\mathrm{Im}Z) = (\mathrm{Im}\, Z_{11})^2 + (\mathrm{Im}\, Z_{12})^2$ となる。よって Ω' は$C^2 - R^2$と双正則同値であり、従って擬凸ではない。よってΩもそうである。

$\mathbf{Z}^{2n}$ の $\mathbf{C}^n \times \Omega$ への作用を

$$(m_1, \ldots, m_{2n})\cdot((z_1, \ldots, z_n), Z)$$

$$= ((z_1 + m_1 + \sum_{j=1}^{n} m_{j+n} Z_{1j}, \ldots, z_n + m_n + \sum_{j=1}^{n} m_{j+n} Z_{nj}), Z)$$

により定め、商空間 $\mathbf{C}^n \times \Omega/\mathbf{Z}^{2n}$ を $\mathcal{T}$ で表す。$\pi : \mathcal{T} \longrightarrow \Omega$ を自然な射影とする。

命題 1.2. $n \geq 2$ のとき $\mathcal{T}$ はケーラー計量を持たない。

証明. 解析族 $\pi : \mathcal{T} \longrightarrow \Omega$ の相対ベルグマン核は定義より明らかに $(\det(\mathrm{Im} Z))^{-1}(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)\otimes(d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n)$ である。従って、もし $\mathcal{T}$ がケーラー計量を持ったとすると、定理 0.2より $-\log(\det(\mathrm{Im} Z))$ は Ω 上多重劣調和でなければならない。ところが明らかにこの関数は $Z \to \partial\Omega$ のとき $+\infty$ に発散するので、Ω は擬凸であるということになる。これは命題 1.1に反する。

よく知られているように、Ω の部分多様体であるSiegel上半空間

$$\mathcal{H}_n := \{\, Z \,;\, {}^tZ = Z \text{ かつ } \mathrm{Im}Z \text{ は正定値} \,\}$$

の上では $\det(\mathrm{Im} Z)$ は定数倍とベキを除いて $\mathcal{H}_n$ のベルグマン核に一致し、従って $-\log(\det(\mathrm{Im} Z))$ は $\mathcal{H}$ 上で強多重劣調和になる。

問題 相対ベルグマン核とパラメータ空間上のベルグマン核がこのような関係にあるような解析族をすべて求めよ。

2. ケーラー的無限小変形 BMYに鑑み、コンパクトなケーラー多様体 M の複素多様体としての無限小変形のうち、Mがケーラー類を変えずに変形する方向を M 上のすべてのケーラー計量に亘って集めたものが、$H^1(M,\Theta)$ の中でどんな集合として記述できるかを調べたい。ここで Θ は M の正則接ベクトルの層を表し、$H^1(M,\Theta)$ は Θ を係数とする一次コホモロジー群を表す。この集合を記号 KID(M) で表す。(KID は*Kählerian infinitesimal deformations*の略。)

ケーラー変形の一般論が[F]や[S]にあるが、それには深入りせず複素トーラスについてだけ述べよう。

次元が２以上の複素トーラスTに対し、KID(T) が $H^1(T,\Theta)$ に一致しないことを Berndtssonの定理は教えてくれる。(Berndtssonの定理はトーラスの場合はGriffithsの古典的な結果に含まれるが。）実際、T の倉西族は相対ベルグマン核の逆数を相対標準直線束のファイバー計量として持ち、この曲率形式は容易に計算できて、その結果正負両方の固有値を持つことがわかる。とくにこの負固有値の方向は、Berndtssonの定理によれば「T上のいかなるケーラー計量に対してもケーラー変形を持たない」方向である。ケーラー性は擬凸性に様々な形で関連しているが、これもその一例である。

$H^1(T,\Theta)$ とn次複素正方行列全体の集合を自然に同一視することができ、この座標でKID(T)を求めてみると、相対ベルグマン核が対数的劣調和になる方向よりも真に狭いことがわかる。

定理 2.1.　$T= T(Z)$, $\det(\mathrm{Im}Z) > 0$, $\dim T \geq 2$ とすると

$$\mathrm{KID}(T) = \{\Xi \mid \text{正定値エルミート行列}H\text{が存在して}\Xi Y^{-1} H \text{は対称}\}.$$

従って、KID(T) は正定値エルミート行列Hのなす錐をパラメータ空間に持つ $n(n+1)/2$ 次元の複素部分空間の族で埋め尽くされる。定理 2.1 よりKID(T)が $H^1(T,\Theta)$ の領域であることもわかる。Hの集合は$\mathbf{C}^{n^2}$ 内で全実(totally real)だからである。さらにはKID(T)が$\mathbf{C}^*$作用を持つアファイン等質領域であることも明白である。このような領域の射影化は$\mathbf{P}^{n^2-1}$内の等質領域なのでよく知られたものだとは思うが、まだ個人的には特定できていない。n=2 のときは $\mathbf{P}^3$ 内の領域になり、これは$\mathbf{P}^2$で埋め尽くされるので擬凸ではあり得ず、Andreotti-Garuert[A-G]の意味でも３-凸でしかない。しかしその境界は滑らかで等質的である。一般にKID(T)は何凸だろうか？

定理 2.1 の証明は、調和写像によるケーラー形式の引き戻しの (2,0) 成分が 0 であるための条件を書き下すだけである。同様の計算によって次が得られる。

定理 2.2.　Tは２次元以上の複素トーラスとし、ηをT上の０でない(2,0)形式とする。このときT 上のいかなるケーラー形式ωおよびωを(1,1)型にするT上のいかなる複素構造に対しても、$\eta+\overline{\eta}$ は(1,1)型にならない。

定理 2.3. $\check{T}$は実トーラスで次元は４以上とし、ωは$\check{T}$上のシンプレクティック形式であるとする。このとき $H^2(\check{T},R)$ の元で、ωをケーラー形式とするどのような複素構造に関しても (1,1) 型にならないものが存在する。

このような方向では[Bm]も小論に関連する話である。

ちなみに、Calabi[C]によれば、複素トーラスT上の平行移動で不変なケーラー計量 g と、平行移動で不変な実 (1,1) 形式 σ で指数 j を持つものに対し、T上の複素構造で、g がエルミート的であり、かつσが (1,1) 型かつ指数 j であるものが「一般には」n!/(n-j)!j! 通り存在する。これはケーラー等長の条件下での複素構造の変形不変性(rigidity)を言っている。小論の「等ケーラー変形」はケーラー類を固定する話であったが、[C]との関連を念頭に置くなら、g とσ のうち片方だけを固定する変形について調べてみるのも面白いかもしれない。

引用文献

[A-G] Andreotti, A. and Grauert, H. Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France **90** 1962 193–259.

[Bm] Bartolomeis, P., Symplectic deformations of Kähler manifolds, J. Symplectic Geom. **3** (2005), 341–355.

[B-1] Berndtsson, B., Prékopa's theorem and Kiselman's minimum principle for plurisubharmonic functions, Math. Ann. **312** (1998), 785–792.

[B-2] ———, Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 6, 1633–1662.

[B-3] ———, Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations. Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 531–560.

[C] Calabi, E., Isometric families of Kähler structures, The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979), pp. 23–39, Springer, New York-Berlin, 1980

[E-Z] Eichler, M. and Zagier, D., Theory of Jacobi forms (Birkhauser, 1985)

[F] Fujiki, A., Coarse moduli space for polarized compact Kähler manifolds, Publ. RIMS. **20** (1984), 977–1005.

[H-1] Hamano, S., Variation formulas for L1-principal functions and application to simultaneous uniformization problem, Michigan Math. J. Volume **60**, Issue 2 (2011), 271-288.

[H-2] ———, C^1 subharmonicity of harmonic spans for certain discontinuously moving Riemann surfaces, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[I-T] Imayoshi, Y. and Taniguchi, M., An introduction to Teichmüller spaces, Translated and revised from the Japanese by the authors. Springer-Verlag, Tokyo, 1992. xiv+279 pp.

[M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H., Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces, Math. Ann. **330**, Number 3, (2004),477-489.

[Nm] Nishimura, Y., Immersion analytique d'une famille de surfaces de Riemann ouvertes, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 14 (1978), 643–654.
[Nn] Nishino, T., Nouvelles recherereches sur les fonctions entieres de plusieurs variables complexes (I), J. of Kyoto Univ., 7 (1969), 112-168.
[Oh] Ohsawa, T., On the deformations of tori with Kähler metrics, preprint.
[S] Schumacher, G., Moduli of polarized Kähler manifolds, Math. Ann. 269 (1984), 137–144.
[T] Takagi, T. (高木貞治), 近世数学史談, 岩波文庫 青939-1 1995.
[Y] Yamaguchi, H., Variations de surfaces de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 286 (1978), no. 23, A1121–A1124.
[Yk] Yoshikawa, J. (吉川實夫), 函数論, 冨山房 1913.

付録

1．ツイスターとペンローズ変換 R. Penrose [P] が時空の物理への洞察によりMinkowski空間から導いた、二重ファイバー構造を持つ３次元複素多様体上の理論がある。この理論において導入されたのが、ベクトル (vector)、テンソル(tensor)、スピノル(spinor)にちなんで命名されたというツイスター(twistor)であったが、次に述べるBaston-Eastwood[B-E]によるその定式化は、等ケーラー変形と等複素変形の関係に似た構造を基礎にしている。

X, Y, Zは複素多様体で、次の図式で結ばれているとする。

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ Z & & X \end{tikzcd}$$

ただしηとτはいたるところランクが極大な全射正則写像であり、対(η,τ)によりYは$Z\times X$の部分多様体になっているとする。τが同型射である場合にはYは写像$\eta\circ\tau^{-1}$のグラフであり、これによってZ上の関数をX上の関数に引き戻すことをペンローズ変換と呼んでいる。τが同型ではない場合には、Xの点はZの部分多様体の族を定め、XとZを入れ替えてもそうである。実際にはXとZについては対称でない状況を考える。つまりτのファイバーはすべてコンパクトであると仮定する。

EをZ上の正則ベクトル束とする。Eの正則断面の芽の層を$\mathcal{O}(E)$、ηによるその位相的逆像、解析的逆像をそれぞれ$\eta^{-1}\mathcal{O}(E)$、$\eta^{*}\mathcal{O}(E)$とし、$\eta^{*}\mathcal{O}(E)$を係数とする正則な相対p形式の層による$\eta^{-1}\mathcal{O}(E)$の分解を

$$0 \longrightarrow \eta^{-1}\mathcal{O}(E) \longrightarrow \Omega^{\bullet}_{Y/Z}(E)$$

とする。

定理1. ηのファイバーを保つホモトピーによって、ηのすべてのファイバーは可縮であるとする。このときスペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^0(X, \tau_*^q \Omega^p_{Y/Z}(E)) \Longrightarrow H^{p+q}(Z, \mathcal{O}(E))$$

が存在する。

一般のペンローズ変換は、このスペクトル系列を用いて$H^{p+q}(Z,\mathcal{O}(E))$ を X 上のある微分方程式の解空間に対応づける仕組みである。これによって、ゲージ場のヤン・ミルズ方程式やスピノル束の断面に対するディラック方程式の解が、ベクトル束やコホモロジー群を複素部分多様体の有限次の無限小近傍へと拡張できるための障害類と同等であることが示されるのだが(cf. [H-M]**)、それを本格的に論ずるには表現論からの準備が必要であり、詳しく解説することは残念ながら筆者の任ではない。

2. Weierstrass-Zappaの$\wp$関数 ツイスターの本性を、物理や表現論から離れて素朴な座標で垣間みることはできないだろうか。この意味でP. Zappaの仕事 [Z-1,2,3]*** は示唆に富むと思われるのでここで紹介したい。

Γ を $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 内の格子とし、$T(\Gamma)$で複素トーラス $\mathbb{C}^n/\Gamma$を表す。$\mathbb{C}^n - \Gamma$ 上の $(0,n-1)$型Γ 不変な$\bar\partial$ 閉形式 は、コホモロジー群 $H^{0,n-1}(T(\Gamma) - \{\Gamma\}, \mathcal{O})$ の元の代表元と自然に同一視できる。

次式によってΓ 不変な $\bar\partial$ 閉形式$\wp^i(z)$ を導入する。

$$\wp^i(z) = \varphi_i(z, 0) + \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq 0}} \varphi_i(z,\gamma) - \varphi_i(0,\gamma) .$$

*[B-E]には[A-G]しか引用されていないが、M.Eastwoodの初期の論文である[E-S]には[A-N-1]が引用されている。

**[H-M]では[A-N-2]が引用されている。

***2008年の函数論シンポジウム(於高知大) で阿部幸隆氏にご教示いただいた。

ただし

$$\varphi_i(z,\gamma)=-\frac{\partial}{\partial z^i}\psi(z-\gamma)$$

かつ

$$\psi(z)=\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{z}^k\,d\bar{z}^1\wedge\dots\wedge\widehat{d\bar{z}^k}\wedge\dots\wedge d\bar{z}^n}{\left(\sum_{j=1}^{n}|z^j|^2\right)^n}$$

とおく。

これはWeierstrassの$\wp$関数の多変数版である。さらに(n−1,n−1)形式$\wp^{ij}$を次式で定義する。

$$\wp^{ij}(z-p)=\frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}}(-1)^{j-1}\wp^i(z-p)\wedge dz^1\wedge\dots\wedge\widehat{dz^j}\wedge\dots\wedge dz^n\,.$$

$\wp^{ij}(z-p)$ が代表する $H^{n-1,n-1}(T(\Gamma)-\{p\})$ の元の性質が問題である。

$T(\Gamma)$が代数的なトーラスの場合、その主偏極に応ずるテータ関数をθ、テータ因子をΘとする。このとき次が成り立つ。

定理２．(cf. [Z-3])

$$\int_{\Theta}\wp^{ij}(z-p)=-\frac{\partial}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\log\theta\Big|_p+c^{ij}\,.$$

ただし c^{ij} は p に依存しない定数である。

引用文献

[A-G] Andreotti,A. and Grauert,H., Théorème de finitude pour des espaces complexes, Bull. Soc. Math. Fr. **90** (1962), 193-259.

[A-N-1] Andreotti,A. and Norguet,F., Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **20** (1966), 197-241.

[A-N-2] ———, La convexité holomorphe dans l'éspace analytique des cycles d'une variété algébrique, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **21** (1967), 31-80.

[B-E] Baston,R. and Eastwood,M., The Penrose transform, Clarendon Press Oxford, 1989.

[E-S] Eastwood,M. and Suria,V., Cohomologically complete pseudoconvex domains, Comment. Math. Helvetici **55** (1980), 413-426.

[H-M] Henkin,G. and Manin, Y., On the cohomology of twistor flag spaces, Compositio Math. **44** (1981), 103-111.

[P] Penrose,R., Twistor algebra, J. Math. Phys. (N.Y.) **8** (1967), 345-366.

[Z-1] Zappa,P., Osservazioni sui nuclei di Bochner-Martinelli, Att. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **67** (1979), 21-26.

[Z-2] ———, Sulle classi di Dolbeault di tipo (0,n-1) con singolarità in un insieme discreto, Att. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **70** (1981), 87-95.

[Z-3] ———, Su una generalizzazione della $\wp$ di Weierstrass, Bolletino U.M.I. **2**-A (1983), 245-252.