数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 57-63

有限群の両側 Burnside 環の表現論

Akihiko Hida
Faculty of Education, Saitama University
(飛田明彦　埼玉大学教育学部)

1 Introduction

p を素数, P を有限 p-群とします. P の両側 Burnside 環は有限両側 P-集合を基底とする環です. ここでは基礎体として正標数 p の体 k をとり, k 上の両側 Burnside 環 $A(P,P)$ の表現と P の cohomology との関連について考察します. この多元環 $A(P,P)$ は次のような性質を持っています.

(1) (完備化された) P の分類空間 BP について, 安定ホモトピー圏での BP から BP への射を記述している (これに関しては亀子正喜氏の解説 [3] を参照下さい).

(2) P 上の fusion system は, $A(P,P)$ の特殊な冪等元と対応している ([6]).

(3) $A(P,P)$ は $\mathrm{Out}(P)$ の群環 $k\mathrm{Out}(P)$ を含んでおり, $A(P,P)$ の表現は $\mathrm{Out}(P)$ のモデュラー表現と関連している ([1],[5]).

このように, ホモトピー論, 有限群論, モデュラー表現の 3 者に関わっている対象ですが, ここでは (3) の表現論的な見地から扱います. (1) からもわかるように $A(P,P)$ は cohomology 環 $H^*(P,k)$ に作用しますが, $H^*(P,k)$ の $A(P,P)$-module としての構造を調べることが目的です.

以下, 2 章では多元環 $A(P,P)$ を定義し, 3 章では simple $A(P,P)$-module に関する Benson-Feshbach [1] の結果を述べます. 4 章では cohomology 環への作用について考察し, 最後に 5 章では, $p=3$ として, 位数 27 の extraspecial 3-群の場合の具体的な計算結果を述べます.

位数 p^3, exponent p の extraspecial p-群 P と, P を Sylow 群に持つ有限群の cohomology については, 多くの結果が知られています ([4],[7],[8] 等). P の分類空間の stable splitting と cohomology については [10] で研究されており, [10] には非常に多くの結果が載っています. 講演時には, これらの結果に触れることができなかったことをお詫びします. 本稿の 5 章は [10] の中の $p=3$ の場合について, 次数が最も低い部分を具体的に取り出して述べたもの, ともいえます.

2 Burnside 環 $A(P,P)$

p を素数, P を有限 p-群, k を標数 p の体とする. 有限 (P,P)-両側集合 X が右自由であるとは, 任意の $x\in X$, $u\in P$, $u\neq 1$ に対して $xu\neq x$ となることである. 右自由な有限

(P,P)-両側集合の同型類を $[X]$ で表す. 右自由な有限 (P,P)-両側集合の同型類で生成され, 関係式

$$[X]+[Y]=[X\cup Y]\ \text{(disjoint union)}$$

$$[X][Y]=[Y\times_P X]$$

で定義される環を $A_{\mathbf{Z}}(P,P)$ とおく. ただし, $Y\times_P X=Y\times X/\sim$, $(yu,x)\sim(y,ux)$, $(y\in Y, x\in X, u\in P)$ である.

$$A(P,P)=k\otimes A_{\mathbf{Z}}(P,P)$$

とおく.

(P,P)-両側集合は作用 $(u,v)x=uxv^{-1}$ により $(P\times P)$-集合とみなすことができる. このようにみたとき, 右自由で可移な $(P\times P)$-集合は

$$P\times P/\Delta_{H,\varphi}$$

$$H\le P,\ \varphi:H\longrightarrow P$$

$$\Delta_{H,\varphi}=\{(x,\varphi(x))\mid x\in H\}$$

という形で与えられる.

$$[H,\varphi]:=[P\times P/\Delta_{H,\varphi}]$$

とおくと,

$$\{[H,\varphi]\mid H\le P,\ \varphi:H\longrightarrow P\ \text{(up to P-conj.)}\}$$

は $A(P,P)$ の k 上の基底である.

3 Simple $A(P,P)$-modules

部分群 $H,K,K'\le P$, 準同型写像 $\pi:H\twoheadrightarrow K$, $\psi:K\xrightarrow{\sim}K'$ に対して,

$$\gamma(H,\pi,\psi):=\sum \pi c_{x^{-1}}\psi\in k\mathrm{Out}(K)$$

とおく. $c_{x^{-1}}$ は共役写像 $c_{x^{-1}}(u)=x^{-1}ux$ であり, 和は

$$\begin{cases} x\in K'\backslash P/H \\ K'C_P(K')\le {}^xH \\ K'^x\cap\ker\pi=1\end{cases}$$

に渡るものとする. ただし,

$$K\xrightarrow{\psi}K'\subset {}^xH\xrightarrow{c_{x^{-1}}}H\xrightarrow{\pi}K$$

の合成を考えて $\pi c_{x^{-1}}\psi\in\mathrm{Out}(K)$ とみている.

Theorem 3.1 ([1],[5],[9]). simple (left) $A(P,P)$-module は (up to iso. で) , $K \le P$ と simple left $k\mathrm{Out}(K)$-module の組 (K,S) で, ある H,π,ψ に対して

$$\gamma(H,\pi,\psi)S \neq 0$$

をみたすものと一対一に対応する.

組 (K,S) に対応する $A(P,P)$-module を [1] では $L(P,K,S)$ と表し, K を $L(P,K,S)$ の vertex, S を $L(P,K,S)$ の source と呼んでいる. 部分群 K として P 自身をとり, S を simple $k\mathrm{Out}(P)$-module とする. P の恒等写像 id について, $\gamma(P,\mathrm{id},\mathrm{id})=1$ であるので $\gamma(P,\mathrm{id},\mathrm{id})S \neq 0$ となり, $L(P,P,S)$ が考えられる.

$$J = \sum_{\varphi(L)<P} k[L,\varphi]$$

とおく. (和は $L \le P$ と $\varphi : L \longrightarrow P$, $\varphi(L) \neq P$ に渡る.) この J は $A(P,P)$ のイデアルであり,

$$A(P,P)/J \simeq k\mathrm{Out}(P)$$

となる. vertex が P である simple module とは simple $A(P,P)/J$-module のことであり, $k\mathrm{Out}(P)$-module としては,

$$L(P,P,S) = S$$

となっている.

4 Cohomology 環 $H^*(P,k)$ への作用

$H^*(P,k) = \oplus H^n(P,k) = \oplus \mathrm{Ext}^n_{kP}(k,k)$ を cohomology 環とする. $H^*(P,k)$ への $A(P,P)$ の作用が自然に定義される. つまり $\zeta \in H^*(P,k)$, $P \supseteq H \xrightarrow{\varphi} P$, について,

$$\zeta \cdot [H,\varphi] = \mathrm{Tr}^P_H \varphi^*(\zeta)$$

$$H^*(P,k) \xrightarrow{\varphi^*} H^*(H,k) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} H^*(P,k)$$

と定義する. この作用により, $H^*(P,k)$ は right $A(P,P)$-module となっている.

ここでの目標は $H^n(P,k)$ の $A(P,P)$-module としての構造, 特にその composition factor について調べたいということである. 全ての simple module が $H^*(P,k)$ に現れる、ということは知られているが ([3] 参照), どの次数 n にどのように現れるか, ということを具体的に理解したい.

$()^* = \mathrm{Hom}_k(-,k)$ を k-dual とする. $L(P,K,S)^*$ は simple right $A(P,P)$-module である.

Lemma 4.1. (K,S) を simple $A(P,P)$-module $L(P,K,S)$ の vertex と source とする (つまり Theorem 3.1 の条件をみたしているとする). simple $A(K,K)$-module $L(K,K,S)^*$ が $H^n(K,k)$ の composition factor であるならば $L(P,K,S)^*$ は $H^n(P,k)$ の composition factor となっている.

この Lemma により, まず初めに, simple $k\mathrm{Out}(P)$-module S に対して, $L(P,P,S)^*$ がどの $H^n(P,k)$ に現れるか, という問題を考えることが必要となる. $L(P,P,S)^*$ が $H^n(P,k)$ の composition factor として現れる, という条件を具体的に書き上げてみると次のようになる.

Lemma 4.2. $H^n(P,k)$ の subspace $H^n(P,k) \supset M \supset N$ で次をみたすものがあるとする.
(a) M, N は $k\mathrm{Out}(P)$-submodule.
(b) $k\mathrm{Out}(P)$-module として $M/N \simeq S^*$.
(c) $H \leq P$, $\varphi : H \longrightarrow P$, $\varphi(H) < P \Rightarrow \mathrm{Tr}_H^P \varphi^*(M) \subseteq N$.
このとき M, N は $A(P,P)$-submodule であり $M/N \simeq L(P,P,S)^*$ である.

5 Extraspecial 3-group

ここでは $p = 3$ とし, 位数 27 の extraspecial 3-group を例として, 前節の Lemma 4.2 を適用する.

$$P = \langle a,b,c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1, [a,b] = c, [a,c] = [b,c] = 1\rangle$$

とする.

Proposition 5.1 ([2]). simple left $A(P,P)$-modules の次元, 構造は次のようになっている.

$K(\leq P)$	$\mathrm{Out}(K)$	simple $k\mathrm{Out}(K)$-module S	$\dim L(P,K,S)$	$\mathrm{Out}(P)$-module structure
P	$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$	arbitrary S	$\dim S$	S
$\langle a,c\rangle$	$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$	simple projective	4	$\mathrm{Ind}_B^G(\rho)$
$\langle a\rangle$	$\mathbf{F}_3^\times$	χ_0	4	$\mathrm{Ind}_B^G(k)$
$\langle a\rangle$	$\mathbf{F}_3^\times$	χ_1	2	simple
1	1	k	1	k

ただし, $\mathrm{Out}(\langle a\rangle) = \mathbf{F}_3^\times = \{\pm 1\}$, $\chi_i : \mathrm{Out}(Q) \longrightarrow \mathbf{F}_p^\times$ であり, χ_0 は自明な指標, χ_1 は非自明な指標である. また

$$G = \mathrm{Out}(P) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$$

$$B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

とする. $K = \langle a,c\rangle$ の場合 $\mathrm{Out}(K) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ であり, simple projective module は 2 種類あるが, 対応する ρ は

$$\rho : B \longrightarrow \mathbf{F}_3^\times$$

$$\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & v \end{pmatrix} \mapsto 1,\ s^2 v.$$

である.

P の真部分群 $Q < P$ については, 任意の simple $A(Q,Q)$-module が $H^*(Q,k)$ の composition factor となることは容易にわかる. 以下, $K = P$ として, simple kG-module S に対する simple $A(P,P)$-module $L(P,P,S)^*$ について考える.

まず simple kG-module については良く知られている. $k[x,y]$ を k 上の多項式環とし,

$$g = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in G$$

の作用を

$$g \cdot (x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$$

と定義する. $k[x,y]$ の次数が 1, 2 の斉次部分を $V_1 = kx + ky$, $V_2 = kx^2 + kxy + ky^2$ とおき, 行列式,

$$\det : G \longrightarrow k^\times$$

とすると, simple kG-modules は

$$k,\ V_1,\ V_2,\ \det,\ V_1 \otimes \det,\ V_2 \otimes \det\,.$$

で与えられる.

次に $H^*(P,k)$ の構造 ([4]) については, $\alpha_1, \beta_1 \in H^1(P,k) = \mathrm{Hom}(P,k)$ を,

$$\alpha_1(a) = 1,\ \alpha_1(b) = 0$$

$$\beta_1(a) = 0,\ \beta_1(b) = 1$$

と定義し, Bockstein 準同型で対応するものを $\alpha, \beta \in H^2(P,k)$ とおく.

$$\alpha, \beta \in \mathrm{Im}\ (\mathrm{Inf} : H^2(P/\langle c \rangle, k) \longrightarrow H^2(P,k))$$

でもあり, 関係式, $\alpha^3\beta - \alpha\beta^3 = 0$ をみたしている. 一方, $\nu \in H^6(P,k)$ で零因子ではないものが存在し, $G = \mathrm{Out}(P)$ の作用は,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\nu \cdot g = (\det g)\nu$$

となっている. cohomology 環 $H^*(P,k)$ の構造は非常に複雑であるが, α, β, ν で生成される部分環 $k[\alpha,\beta,\nu]$ は比較的考えやすいものと思われる.

$$M_n = \{f(\alpha,\beta) \mid f \in k[x,y]\text{: homog. deg } n\}$$

とおく. $M_1 = k\alpha + k\beta$, $M_2 = k\alpha^2 + k\alpha\beta + k\beta^2$ である.

Remark 5.2. (1) kG-module としては $M_1 \simeq V_1^*$ であるが, $A(P,P)$-module としては M_1 は $L(P,P,V_1)$ と同型ではない. $Q = \langle a \rangle$, $\varphi : P \twoheadrightarrow Q \leq P$ について,

$$\alpha[P,\varphi] = \alpha$$

であり M_1 は $A(P,P)/J$-module とはなっていない. 実際には,

$$M_1 \simeq L(P, \langle a \rangle, \chi_1)^*$$

である.
(2) kG-module としては $M_2 \simeq V_2^*$ であるが, M_2 は $H^4(P,k)$ の $A(P,P)$-submodule ではない. $E = \langle a, c \rangle$, $\mu \in H^4(E,k)$ で $\mathrm{Tr}_E^P(\mu) \notin M_2$ となるものが存在し,

$$M_2 + k\mathrm{Tr}_E^P(\mu) \simeq L(P, \langle a \rangle, \chi_0)^*$$

となっている.

Proposition 5.3. 次の $H^n(P,k) \supset M \supset N$ は Lemma 4.2 の条件をみたしている.

n	M	N	M/N(as a kG-mod)
6	$k\nu + M_3$	M_3	$\det^*$
8	νM_1	0	$(V_1 \otimes \det)^*$
10	νM_2	0	$(V_2 \otimes \det)^*$
12	$k\nu^2 + M_6$	M_6	k
14	$\nu^2 M_1 + \nu M_4$	νM_4	V_1^*
16	$\nu^2 M_2$	0	V_2^*

すなわち, M, N は $A(P,P)$-submodule であり, M/N は simple $k\mathrm{Out}(P)$-module S に対する $L(P,P,S)^*$ と同型である.

例えば, $n = 14$ の箇所では,

$$\nu M_4 \subset \nu^2 M_1 + \nu M_4 \subset H^{14}(P,k)$$

は $A(P,P)$-submodule の列であり,

$$(\nu^2 M_1 + \nu M_4)J \subset \nu M_4$$

となっている. M_1 の場合と異なり $\mathrm{res}^P_{\langle a \rangle} \nu^2 M_1 = 0$ であり, Remark 5.2 のときのようなことは起こらない. $p = 3$ なので $(\det)^2 = 1$ となり $k\mathrm{Out}(P)$-module としては,

$$(\nu^2 M_1 + \nu M_4)/\nu M_4 \simeq M_1 \simeq V_1^*$$

であり, $A(P,P)$-module としては

$$(\nu^2 M_1 + \nu M_4)/\nu M_4 \simeq L(P,P,V_1)^*$$

となる. またこの表より, vertex が P である simple $A(P,P)$-module はすべて $n \leq 16$ までの $H^n(P,k)$ に, composition factor として現れることがわかる.

References

[1] D. J. Benson and M. Feshbach, Stable splittings of classifying spaces of finite groups, Topology 31 (1992), 157-176.

[2] J. Dietz and S. Priddy, The stable homotopy type of rank two p-groups, Homotopy theory and its applications, Contemp. Math. 188 (1995), 93-103.

[3] 亀子正喜, Modular representation theory and stable decomposition of classifying spaces, 数理解析研究所講究録 1466 (2006), 9-20.

[4] I. J. Leary, The mod-p cohomology rings of some p-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 112 (1992), 63-75.

[5] J. Martino and S. Priddy, The complete stable splitting for the classifying space of a finite group, Topology 31 (1992), 143-156.

[6] K. Ragnarsson and R. Stancu, Saturated fusion systems as idempotents in the double Burnside ring, preprint, 2009.

[7] H. Sasaki, Mod p cohomology algebras of finite groups with extraspecial Sylow p-subgroups, Hokkaido Math. J. 29 (2000), 263-302.

[8] M. Tezuka and N. Yagita, On odd prime components of cohomologies of sporadic simple groups and the rings of universal stable elements, J. Algebra 183 (1996), 483-513.

[9] P. Webb, Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and decomposition of classifying spaces, J. Pure and Applied Algebra 88 (1993), 265-304.

[10] N. Yagita, Stable splitting and cohomology of p-local finite groups over the extraspecial p-group of order p^3 and exponent p, Geometry and Topology Monographs 11 (2007), 399-434.