

# カンドル 3 コサイクルを使った結び目不変量 と Dijkgraaf-Witten 不変量

野坂 武史 (京都大学 数理解析研究所 博士課程 3 回)

## 概要

本報告書はプレプリント [N1] の紹介である。3 次カンドルコホモロジー群  $H_Q^3(X; A)$  の元が与えられた時、結び目の不変量が [CJKLS, CEGS] で定義されている。有限体  $\mathbb{F}_q$  上のアレクサンダーカンドル  $X$  においては、望月拓郎氏が  $H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  を生成元込みで全て計算している。主定理とは、任意の 3-コサイクル  $\phi \in H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  (但し 2 コサイクル型を除く) は、或るメタアーベル群の群の 3 コサイクル  $\theta_\phi$  から由来し、さらに  $\phi$  による結び目の不変量は、 $\theta_\phi$  による Dijkgraaf-Witten 不変量の或る  $\mathbb{Z}$ -同変部分と等しい事である。マッセイ積による  $\theta_\phi$  の解釈も与えた。

## 1 序文: カンドルの紹介と、結果

カンドルとは、分配側を満たす或る代数系の事である。例えば、有限体  $\mathbb{F}_q$  と  $\omega \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$  に対して、 $\mathbb{F}_q$  上に二項演算  $*_\omega$  を、 $\forall x, y \in \mathbb{F}_q, x *_\omega y := \omega x + (1 - \omega)y$  と定める。この組  $(\mathbb{F}_q, *_\omega)$  をアレクサンダーカンドルといい、本論ではこれを中心に扱う。

カンドル  $X$  に対しカンドルコホモロジー群  $H_Q^n(X; A)$  について紹介する。それは 99 年に論文 [CJKLS] で導入され、[CEGS] で局所係数版に拡張されたものである。さらにそのコサイクルを使い、次元結び目のカンドルコサイクル不変量が組合せ的に定義されている。その応用の為、望月拓郎氏 [Moc] は、上記の  $\mathbb{F}_q$  上のカンドルに対し、 $H_Q^2(X; \mathbb{F}_q)$  と  $H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  を生成元の表示込みで計算している。計算機で発見された些やかなコサイクルを除くと、望月氏のコサイクル以外いられていなかった。だが是までのカンドルの研究の殆どは、最も単純な  $q = p$  の場合のコサイクルが使われていた。そんな中、蒲谷祐一氏 [Kab] は  $q = p$  でコサイクル不変量と “Dijkgraaf-Witten” 不変量 (後述) との等価性を考察していた。

### 1.1 本稿で扱う群 $G_X$ と、Dijkgraaf-Witten 不変量

本節の目標は、望月氏 [Moc] による先述のカンドルコサイクルを群コホモロジーから解釈を与えた定理 1.1 の記述である。それは上述の蒲谷氏の結果 [Kab] の、有限体  $\mathbb{F}_q$  への一般化でもある。ここでは幾つか準備をする。

本稿全体で主に扱う群  $G_X$  を定義する (定義は Clauwens[Clau] による)。以下  $X = \mathbb{F}_q$  とし、上述のアレクサンダーカンドルとする。有限体  $X = \mathbb{F}_q$  を加法群  $(\mathbb{Z}_p)^h$  と同一視し、 $\omega \in \mathbb{F}_q \setminus \{0, 1\}$  を固定する。そこで次の集合

$$G_X := (\mathbb{Z}_p)^h \times \left( ((\mathbb{Z}_p)^h \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p)^h) / (x \otimes y - \omega y \otimes x)_{x, y \in \mathbb{F}_q} \right) \tag{1}$$

に、群演算を

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) := (a + b, a \otimes b + \alpha + \beta)$$

と定める\*1。その群構造  $G_X$  は、次の  $(\mathbb{Z}_p)^h$  の中心拡大として理解できる: 即ち

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}_p)^h \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p)^h / (x \otimes y - \omega y \otimes x)_{x, y \in \mathbb{F}_q} \longrightarrow G_X \longrightarrow (\mathbb{Z}_p)^h \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

\*1 (1) にある  $G_X$  の右辺の第 2 項は一見わかりづらいが 2 次カンドルホモロジー  $H_2^Q(X; \mathbb{Z})$  と一致することが知られている

また  $\mathbb{Z}$  を  $G_X$  に作用させる: つまり  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, \alpha) \in G_X$  に対し  $n \cdot (a, \alpha) = (\omega^n a, \alpha)$  とする. 結論を先走れば, この群  $G_X$  がカンドルコホモロジーを理解するには十分である事になる.

位相的な話に転じ, 群  $G_X$  に対する Dijkgraaf-Witten 不変量 [DW] を紹介する. 結び目  $K \subset S^3$  を置く. また  $M_K^{q-1}$  を,  $K$  に沿った  $S^3$  の  $(q-1)$ -重巡回分岐被覆とする (定義は [Kaw, 付録] 等参照). 閉 3 次元多様体  $M_K^{q-1}$  には  $\mathbb{Z}$  が被覆変換として作用する事に注意する. そこで,  $G_X$  の群 3 コサイクル  $\theta \in H_{\text{gr}}^3(G_X; A)$  に対し, 次を定めよう:

$$\text{DW}_{\theta}^{\mathbb{Z}}(M_K^{q-1}) := \sum_{f \in \text{Hom}_{\text{gr}}^{\mathbb{Z}}(\pi_1(M_K^{q-1}), G_X)} \langle f^*(\theta), [M_K^{q-1}] \rangle \in \mathbb{Z}[A]. \quad (2)$$

これは所謂 **Dijkgraaf-Witten 不変量** の  $\mathbb{Z}$  同変部分である. ここで,  $[M_K^{q-1}] \in H_3(M_K^{q-1}; \mathbb{Z})$  は基本類であり,  $\text{Hom}_{\text{gr}}^{\mathbb{Z}}(\pi_1(M_K^{q-1}), G_X)$  は “ $\mathbb{Z}$ -同変な” 群準同型  $\pi_1(M_K^{q-1}) \rightarrow G_X$  の集合である.

## 1.2 主結果: カンドルコサイクル不変量 = $\mathbb{Z}$ 同変 Dijkgraaf-Witten 不変量

今回の結果を述べる. 望月氏 [Moc] の  $H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  のカンドルコサイクルをその群  $G_X$  のコホモロジーからの解釈を与え, さらに, 上述の結び目  $K \subset S^3$  のカンドルコサイクル不変量  $\Phi_{\phi}(K)$  に (定義は付録参照), 位相的意味を与えたのである: 詳述すれば

**定理 1.1.** 上記のカンドル  $(\mathbb{F}_q, *_{\omega})$  を固定する. 任意のカンドル 3 コサイクル  $\phi \in H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  の元 (但し 2 コサイクル型を除く. 詳細は注意 6.3) に対し, 或る群 3 コサイクル  $\theta_{\phi} \in H_{\text{gr}}^3(G_X; \mathbb{F}_q)$  が存在し次を満たす. 任意の結び目  $K \subset S^3$  に対し, 次が成立する:

$$\Phi_{\phi}(K) = q \cdot \text{DW}_{\theta_{\phi}}^{\mathbb{Z}}(M_K^{q-1}) \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}_q].$$

(本稿の構成). 本稿の構成をのべる. 節 2 では, 定理 1.1 の意義や, 先行結果との比較について補記する. 節 3 以降では, 定理 1.1 の証明を紹介する: とりわけ, カンドルコサイクルを群コサイクルから取出す点を重点的に述べたい. 節 3 では, カンドルとそのホモロジーを復習する. 節 4 では, それを非斉次座標で考察する. 節 5 では, 証明の肝になる井上-蒲谷の鎖写像を復習する. 節 6 で, 定理 1.1 にある群コサイクルを構成し, さらに当の等式を満たす事を概証する. 付録 A では, 定義を端折ったカンドルコサイクル不変量を復習する.

## 2 定理 1.1 の意義

当定理の筆者の考える意義を 4 つ述べる: 以下カンドルは  $X = \mathbb{F}_q$  とする. カンドル理論・現状からも考察されている為, 興味のある小節のみ笑覧されても, 次節に飛ばされても支障はない.

### 2.1 意義 1: 群コホモロジーからのカンドルコホモロジーの解釈

まず問『望月氏が発見したカンドル 3 コサイクルは何なのか?』に一つの解答を得た事になる. 節 6.1 でその 3 コサイクルを詳述するが, それらは一見複雑な式であり, 何を意味する

か解りづらい。実際、その証明法は [Moc] のコサイクル条件をすべて (或る常微分方程式を通じ) 解くものであった。定理 1.1 の帰結として、『その複雑な式は、その群  $G_X$  の群 3 コサイクルをカンドルの引き戻したものだ』と一言二言でまとめられた事になる。

ここで「引き戻し」と述べたが、それは井上-蒲谷氏 [IK] で考察された鎖写像を使っている (節 5)。彼らは Chern-Simons 類をカンドルコサイクルとして理解する為に、その鎖写像を構成した。が、その井上-蒲谷氏の鎖写像は示唆に富み、今回は望月氏のカンドル 3 コサイクルへの解答を与えた事になる。さらにカンドル理論の今後の発展に役立つとも筆者は期待している。ちなみに、この鎖写像を“ $G$  族版アレクサンダーカンドル”に適用させることで、カンドルコサイクルを不変式論や Chern-Weil 理論から観察することも出来る [N4]。

## 2.2 意義 2 : 一般化の鍵・2 コホモロジーの障害の処理

定理 1.1 は、 $q = p$  かつ  $\omega = -1$  の時の 蒲谷氏 [Kab] により示されている。ここでは、定理 1.1 では任意の有限体に対し何故一般化できたかを述べる。蒲谷氏 [Kab] の議論では色々な仮定付きのカンドルに対して展開された。例えば、2 次ホモロジー  $H_2^Q(X; \mathbb{Z})$  が消える仮定をおいていた (その仮定では非可換群  $G_X$  は可換群  $(\mathbb{Z}_p)^h$  となる)。

定理 1.1 の帰結は「その仮定を抜くには、Clauwens [Cla] の定めた非可換群  $G_X$  を考えるが良い」である。実際、コホモロジーレベルにおいても、非可換群  $G_X$  でなければならない事を示した (補題 6.5)。さらに蒲谷氏の手法をモディファイする為に、先述の [IK] の鎖写像を中心拡大でリフトさせ、議論を進めた (節 5 の可換図式を参照)。このリフトが一般化の鍵である事を筆者の意義と考えている。

## 2.3 意義 3 : コサイクル不変量の位相的意味づけ

今、定理 1.1 が  $\mathbb{F}_q$  上のカンドルのコサイクル不変量に関する位相的意味を完結的に答えた事を説明する。

まず、なぜ 3 コサイクルに固執したかを述べる。実際、結び目のコサイクル不変量は一般の局所係数のコサイクルからでも定義され [CEGS], 幅広いものように見える。しかし、ホモトピー群の議論から次が示されていた:

定理 ([N2]). 標数は 2 以外とする。この時、 $(\mathbb{F}_q, *_{\omega})$  の任意の局所係数のコサイクルに対し、そのコサイクル不変量は、2 次と 3 次のコサイクル達のコサイクル不変量の線形和になる。

ここで注記することに、 $H_n^Q(X; \mathbb{Z})$  の任意の元は  $q = p^h$  倍で消える事が知られる [N3, 系 6.2]。ゆえに、コサイクルの係数は  $p$ -トーションで取るべきである。今の理由から、 $H_Q^2(X; \mathbb{F}_q)$  と  $H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  によるコサイクル不変量の位相的解釈を与えれば、このカンドル  $(\mathbb{F}_q, *_{\omega})$  から抽出できる不変量の意義が (捩れ部分以外は) 完了する事になる。

その位相的解釈の解答はこうである。まず 2 次コサイクルに関しては Eisermann[E] が、結び目の緯線を使って位相的解釈を与えた。他方、3 次コサイクルに関しては主定理 1.1 が、Dijkgraaf-Witten 不変量と分岐被覆空間を通じて解答を与えたことになる。

結論をまとめれば、カンドル  $(\mathbb{F}_q, *_{\omega})$  に関し、組合せ的に定義されたカンドルコサイクル不変量は、結び目の緯線や群のコサイクルや巡回分岐被覆を使う事によって、位相的意味が付けられた事になる (但し捩れ部分無視した)。

## 2.4 意義4 : カンドルコサイクル不変量を通じた Dijkgraaf-Witten 不変量の計算

Dijkgraaf-Witten 不変量は定義からして、多様体  $M$  の位相的不変量である。しかし、それを計算するとなると一筋縄ではいかない。一つの計算方法は  $M$  の三角形分割を与え、基本類を具体的に記述する方法である。従って、その具現化した基本類とコサイクルとのペアリングは原理的には計算可能である。しかし、それはレンズ空間の場合でも分割が大変であり、群コサイクル表示は一般にシンプルでないため計算も容易でない。他の方法として、群がアーベル群の場合は、多くの手法の計算方法が知られる：つまり、 $M$  のカップ積構造で当不変量は決定されるので、カップ積構造の換言が沢山あるという意味である。

しかしながら他方で、群コサイクルと比較し、望月氏の表示したカンドルコサイクルはシンプルな3変数多項式で表される(節6.1を見よ)。さらに付録Aにある通り、カンドルコサイクル不変量は比較的計算が楽なものである。

さて本題に戻り、定理1.1の等式の利点はこうである。即ち、計算しづらいDW不変量を、計算しやすい右辺を通じて計算できた点である。ただし和の全てではなく、 $\mathbb{Z}$ 同変部分しか成功していないが、非可換群の場合でも部分的計算を列挙したのは初めてである。譬えば、

**定理 2.1** ([N1]).  $m, n$  を互いに素な整数とする。球面  $S^3$  に埋め込まれた  $(m, n)$ -トーラスノットを考える。このとき、任意のカンドルコサイクル  $\phi \in H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  に対し、そのカンドルコサイクル不変量  $\in \mathbb{Z}[\mathbb{F}_q]$  を計算した。

このトーラスノットの巡回分岐被覆は、いわゆるプリスコーン多様体  $\Sigma(m, n, q-1)$  である。さらに、よいコサイクル  $\phi \in H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  に対し、定理1.1に登場した群3コサイクル  $\theta_\phi$  は  $H^3(G_X; \mathbb{F}_q)$  上でマッセイ積でかける事を筆者は示した(命題6.8)。従って、結論として定理2.1から、プリスコーン多様体のマッセイ積を係数群  $\mathbb{F}_q$  上で幾つか計算した事になった(一般に正標数上のマッセイ積は特異な振舞いをし計算し難い)。

## 3 カンドルと、カンドルホモロジーの復習

さてこの節以降からは、定理1.1の証明を概略する。特に、カンドルホモロジーが群ホモロジーにどう関係するかを重点的に説明していく。以下の議論は、Brownの教科書[Bro]の約百頁までの知識を少々要するが、定義から直接示せる議論ばかりである。その為、定義から説明していくことにする。

この節では、カンドルという代数系を復習し、[CJKLS]で導入されたカンドルホモロジーを復習する。本稿では、カンドルの性質を本質的に使わない為、次節にスキップされても構いません。

まずカンドルとは、集合  $X$  と二項演算  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  の組で次を満たすものである。

(Q1) 任意の  $x \in X$  に対し、 $x * x = x$ 。

(Q2) 任意の  $x, z \in X$  に対し、唯一つ  $y \in X$  が存在し、 $x * y = z$ 。

(Q3) 任意の  $x, y, z \in X$  に対し、分配則をみたす:  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ 。

例 3.1. 有限体  $\mathbb{F}_q$  の元  $\omega$  を固定する, 但し  $\omega \neq 0, 1$ . 集合  $X$  を  $\mathbb{F}_q$  とし, 二項演算を  $x *_\omega y := \omega(x-y) + y$  と定めるとカンドルになる. 有限体のアレクサンダーカンドルという.

例 3.2. 導入節の群  $G_X$  を思い出そう (1). その集合に, カンドル演算  $*_\omega$  を次で定める.

$$(x, \alpha) *_\omega (y, \beta) = (\omega(x-y) + y, \alpha + [x \otimes y - y \otimes x]).$$

この  $(G_X, *_\omega)$  は, カンドルの意味で, 例 3.1 の普遍中心拡大になっている事が知られている. カンドルを強調する際,  $(G_X, *_\omega)$  を  $(\tilde{X}, \tilde{*}_\omega)$  と書くことにする.

次にカンドル  $(X, *)$  に対し, ラックホモロジーとカンドルホモロジーを復習する. まず  $C_n^R(X)$  を,  $X^n$  の元で張られる自由  $\mathbb{Z}$ -加群とする. そして境界写像を次で定義する:

$$\partial_n^R(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i ((x_1 *_i x_i, \dots, x_{i-1} *_i x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)).$$

組  $(C_*^R(X), \partial_*^R)$  は複体をなす (講演ではカンドルの分類空間 (Rack 空間)[FRS] を紹介した. 今の複体はそのセル複体となっている). このホモロジーをラックホモロジーという.

さらに,  $C_n^R(X)$  の部分加群として, 何か  $i$  があり,  $x_i = x_{i+1}$  となる  $X^n$  の元  $(x_1, \dots, x_n)$  で張られる自由  $\mathbb{Z}$ -加群を,  $C_n^D(X)$  とする. これは部分複体になる. その商複体  $(C_*^R(X)/C_*^D(X), \partial_*^R)$  のホモロジーを, カンドルホモロジーといい,  $H_n^Q(X)$  と書く. また係数環  $A$  を固定した時, 双対をとれば,  $H_n^R(X)$  と  $H_n^Q(X)$  に対応するコホモロジーも定義できる.

しかしながら, 幾つかのカンドルでしかカンドルホモロジーは計算されていない. 実際, 群コホモロジーと比べ, 計算方法がほとんどない現状である. 例えば, 全次数の整ホモロジー  $H_n^Q(X; \mathbb{Z})$  が決定されているカンドル  $X$  は, 例 3.1 で素数位数  $q = p$  でのカンドルのみである [N3]. また 2 次に関し, 例 3.1 のカンドルの 2 次カンドルホモロジー  $H_2^Q(X; \mathbb{Z})$  は, 次となることが知られている [Cla]:

$$H_2^Q(X; \mathbb{Z}) \cong ((\mathbb{Z}_p)^h \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p)^h) / (x \otimes y - \omega y \otimes x)_{x, y \in \mathbb{F}_q},$$

(群  $G_X$  の定義にあった第二項と一致する). また 3 次に関しては, 序文で陳述した通り,  $X = \mathbb{F}_q$  上のアレクサンダーカンドルぐらいでのみ, カンドルコホモロジーの計算は成功していない [Moc].

#### 4 非斉次座標によるラックホモロジーと群ホモロジー

複体の定義を紹介したが, 境界写像は一見捉えづらい. 是節では, カンドル  $X$  が例 3.1 と 3.2 の時に, 境界写像を非斉次座標で見よう. すると群ホモロジーの類似が散見できる利点がある.

まず, (1) で定めた群  $G_X$  に対する, 非斉次での群の標準複体を復習する (see [Bro]). まず  $n$ -元  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in (G_X)^n$  で張られる自由  $\mathbb{Z}$  加群を  $C_n^{\text{gr}}(G_X)$  と書こう. その境界準同型  $\partial_n^{\text{gr}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in C_{n-1}^{\text{gr}}(G_X)$  は次で定義されるのであった:

$$(\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n) + (-1)^n (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}).$$

またさらに、序文に述べた通り、 $\mathbb{Z}$  が  $G_X$  によって作用するので、その coinvariant  $C_n^{\text{gr}}(G_X; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$  を用意しておく。

他方、例 3.2 で紹介したカンドル  $(\tilde{X}, \tilde{*}_{\omega})$  のラック複体を非斉次座標で観察する。 $\tilde{X}$  の元を  $(U, \alpha)$  という記号で表そう。まず、加群  $C_n^{Rv}(\tilde{X})$  を、前節の加群  $C_n^R(\tilde{X})$  のコピーとする。次に生成元  $(U_1, \alpha_1, \dots, U_n, \alpha_n) \in C_n^{Rv}(\tilde{X})$  に対し、境界写像  $\partial_n^{Rv}(U_1, \alpha_1, \dots, U_n, \alpha_n) \in C_{n-1}^{Rv}(\tilde{X})$  を次で定義する：

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i ((U_1, \alpha_1, \dots, U_{i-1}, \alpha_{i-1}, U_i + U_{i+1}, U_i \otimes U_{i+1} + \alpha_i + \alpha_{i+1}, U_{i+2}, \alpha_{i+2}, \dots, U_n, \alpha_n) - (\omega U_1, \alpha_1, \dots, \omega U_{i-1}, \alpha_{i-1}, \omega U_i + U_{i+1}, \omega U_i \otimes U_{i+1} + \alpha_i + \alpha_{i+1}, U_{i+2}, \alpha_{i+2}, \dots, U_n, \alpha_n)).$$

注意することに、集合として群  $G_X$  とカンドル  $\tilde{X}$  を同一視すれば、この和  $\sum$  の中の第 1 項目はまさに群ホモロジーの境界準同型であり、第 2 項目はその  $\omega$  倍になっている。ちなみに、前節の複体  $(C_*^R(\tilde{X}), \partial_*^R)$  と今の複体  $(C_*^{Rv}(\tilde{X}), \partial_*^{Rv})$  は、次の写像により鎖同形である：

$$(\tilde{X})^n \longrightarrow (\tilde{X})^n, \quad (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \longmapsto (\tilde{x}_1 \tilde{x}_2^{-1}, \dots, \tilde{x}_{n-1} \tilde{x}_n^{-1}, \tilde{x}_n).$$

最後に、カンドル  $X = \mathbb{F}_q$  でのラックホモロジーについても言及する。自然な射影  $\tilde{X}^n \rightarrow (\mathbb{F}_q)^n$  から射影  $C_n^{Rv}(\tilde{X}) \rightarrow C_n^{Rv}(\tilde{X})/(\alpha_i = 0)$  を誘導する。 $C_n^{Rv}(\tilde{X})$  上の境界写像  $\partial_n^{Rv}$  の定義より、 $C_n^{Rv}(\tilde{X})/(\alpha_i = 0)$  上の境界写像が誘導される。その複体は  $X = \mathbb{F}_q$  でのラック複体  $(C_n^R(X), \partial_n^R)$  を、非斉次座標で表記したものと一致する。

## 5 非斉次座標による井上-蒲谷の鎖写像

今から井上-蒲谷氏らによる鎖写像を考察する。原論文 [IK] では、斉次座標上で一般のカンドルに定義されていた。その場合シャッフル積を使った複雑な式になっており、またその写像の値域の複体が何を表すのか解りづらかった。が本稿ではカンドルを例 3.1, 3.2 に制限し、その鎖写像を非斉次座標によって記述する\*2。すると井上-蒲谷氏らの鎖写像は  $\tilde{\varphi}_n : C_n^{Rv}(\tilde{X}) \rightarrow C_n^{\text{gr}}(G_X)_{\mathbb{Z}}$  となる事を見る。

その為に、次の位数  $2^{n-1}$  の集合を用意しておく：

$$\mathcal{K}_n := \{\mathbf{k}_n := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_n = 0, 0 \leq k_{j-1} - k_j \leq 1\}.$$

すると  $\tilde{\varphi}_n$  は次のように定められる。生成元  $(U_1, \alpha_1, \dots, U_n, \alpha_n) \in C_n^{Rv}(\tilde{X})$  に対し、 $\tilde{\varphi}_n(U_1, \alpha_1, \dots, U_n, \alpha_n)$  を次で定義する：

$$\sum_{\mathbf{k}_n \in \mathcal{K}_n} (-1)^{k_1} (T^{k_1} U_1, \mathcal{A}_1, T^{k_2} U_2, \mathcal{A}_2, \dots, T^{k_{n-1}} U_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1}, U_n, 0) \in C_n^{\text{gr}}(G_X)_{\mathbb{Z}}, \quad (3)$$

ここで  $\mathcal{A}_j$  は  $\alpha_j - [U_j \otimes (U_{j+1} + \dots + U_n)]$  の一時的略記である。

**事実 5.1** ([IK, 定理 3.2]). この写像は  $\tilde{\varphi}_*$  は鎖写像である。

\*2 勿論、斉次座標の表示も意義がある。実際、論文 [IK] にある通り、斉次座標表示の鎖写像には幾何的意味が付けられる。

たとえば,  $n = 3$  でその写像を具体的に書こう:  $\tilde{\varphi}_3(a, \alpha, b, \beta, c, \gamma)$  は

$$(a, \alpha - [a \otimes (b + c)], b, \beta - [b \otimes c], c, \gamma) - (\omega a, \alpha - [a \otimes (b + c)], b, \beta - [b \otimes c], c, \gamma) \\ - (\omega a, \alpha - [a \otimes (b + c)], \omega b, \beta - [b \otimes c], c, \gamma) + (\omega^2 a, \alpha - [a \otimes (b + c)], \omega b, \beta - [b \otimes c], c, \gamma). \quad (4)$$

また前節の最後の部分と同様に, 自然な射影  $P_{\tilde{X}} : C_n^R(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow C_n^R(X; \mathbb{Z})$  を考える. 同様に射影  $G_X \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^h$  から鎖写像  $P_{G_X} : C_n^{\text{gr}}(G_X; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} \rightarrow C_n^{\text{gr}}((\mathbb{Z}_p)^h; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$  が誘導される. すると  $\tilde{\varphi}_*$  の定義より, それは鎖写像  $\varphi_* : C_n^{R_U}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_n^{\text{gr}}((\mathbb{Z}_p)^h; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$  が誘導される. よって次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} H_3^R(\tilde{X}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_3} & H_3^{\text{gr}}(G_X; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} \\ \downarrow (P_{\tilde{X}})_* & & \downarrow (P_{G_X})_* \\ H_3^R(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_3} & H_3^{\text{gr}}((\mathbb{Z}_p)^h; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} \end{array}$$

特にその鎖写像の双対により, カンドルコサイクルが群コサイクルから得られたことになる:

**命題 5.2.**  $\theta$  を  $G_X$  の  $\mathbb{Z}$ -不変な 3 コサイクルとする. その引戻し  $\tilde{\varphi}_3^*(\theta)$  は,  $\tilde{X}$  のラック 3 コサイクルである. 更にもし  $\theta(a, 0, b) = 0$  が任意の  $a, b \in G_X$  で満たせば<sup>\*3</sup>, 引戻し  $\tilde{\varphi}_3^*(\theta)$  は,  $\tilde{X}$  のカンドル 3 コサイクルである.

よって,  $G_X$  の  $\mathbb{Z}$ -不変な 3 コサイクル  $\theta$  を見つける事が重要である. 一応, そのコサイクル条件を書くと

$$\theta(b, c, d) - \theta(ab, c, d) + \theta(a, bc, d) - \theta(a, b, cd) + \theta(a, b, c) = 0,$$

$$\theta((\omega a, \alpha), (\omega b, \beta), (\omega c, \gamma)) = \theta((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)),$$

である. ここで  $\mathbf{a} = (a, \alpha)$ ,  $\mathbf{b} = (b, \beta)$ ,  $\mathbf{c} = (c, \gamma)$ ,  $\mathbf{d} = (d, \delta) \in G_X$ .

## 6 定理 1.1 の概証

この節では定理 1.1 の概証をする. まず定理 1.1 にある群コサイクルを見つける方針を述べよう. [Moc] により,  $H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  の基底が解っている. それをその前節の鎖写像から調べる. つまりその基底の逆像となりそうな,  $G_X$  の  $\mathbb{Z}$ -不変な 3 コサイクルを見つけていく. そこで節 6.1 では望月氏の 3 コサイクルを復習し, 節 6.2 ではその逆像を調べる. その後, その群コサイクルを使い, 定理 1.1 の等式の概証を与える.

### 6.1 望月氏の 3 コサイクル [Moc] の復習

望月拓朗氏は  $X = \mathbb{F}_q$  上のカンドルの 3-コサイクルを全て決定している [Moc]. ここではそのコサイクル表示を復習する. 但し表示が複雑のため, 全て覚える必要はなく, 定理 7.1 の

<sup>\*3</sup> この条件式は正規化条件と言われる. 任意の群コサイクルが正規化されたコサイクルとコホモロガスになる事は良く知られている.

雰囲気をつかむ感じで御読みください。まず次の  $\mathbb{F}_q$  上多項式を準備する ([Moc, §2.2]):

$$\chi(U_j, U_{j+1}) := \frac{(U_j + U_{j+1})^p - U_j^p - U_{j+1}^p}{p} = \sum_{1 \leq i \leq p-1} (-1)^{i-1} i^{-1} U_j^{p-i} U_{j+1}^i \in \mathbb{F}_q[U_j, U_{j+1}]$$

これを使いさらに、次の3変数多項式らを定義しよう:

$$F(a, b, c) := U_1^a \cdot U_2^b \cdot U_3^c,$$

$$E_0(a \cdot p, b) := (\chi(\omega U_1, U_2) - \chi(U_1, U_2))^a \cdot U_3^b, \quad E_1(a, b \cdot p) := U_1^a \cdot (\chi(U_2, U_3) - \chi(\omega^{-1} U_2, U_3))^b.$$

ここで、 $(U_1, U_2, U_3) \in X^3 = \mathbb{F}_q^3$  と思うことで、これらの3変数多項式を  $X^3$  の関数とみなそう。これらの多項式で張られる次の集合  $I_{q,\omega}^+$  を用意する:

$$I_{q,\omega}^+ := \{E_0(p \cdot q_1, q_2) \mid \omega^{p \cdot q_1 + q_2} = 1, q_1 < q_2\} \cup \{E_1(q_1, q_2 \cdot p) \mid \omega^{q_1 + p \cdot q_2} = 1, q_1 \leq q_2\} \\ \cup \{F(q_1, q_2, q_3) \mid \omega^{q_1 + q_2 + q_3} = 1, q_1 < q_2 < q_3\}. \quad (5)$$

ここで記号  $q_i$  は、 $p$  の冪で  $0 \leq q_i < q$  を満たすものとする。すると  $I_{q,\omega}^+$  の元はコサイクルである上に、次のようにコホモロジーの基底の一部をなす:

**定理 6.1** ([Moc]). 3次コホモロジー  $H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  の基底は、次の和集合\*4として代表される:

$$I_{q,\omega}^+ \cup \{\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4) \mid (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathcal{Q}_{q,\omega}\} \cup \{F(q_1, q_2, 0) \mid \omega^{q_1 + q_2} = 1, q_1 < q_2\}.$$

ここで記号  $q_i$  は、 $p$  の冪であり  $0 \leq q_i < q$  を満たすものとする。

今、記号  $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)$  と  $\mathcal{Q}_{q,\omega}$  を説明なしに使ったが、今から複雑だが復習する: まず  $\mathcal{Q}_{q,\omega}$  は、次を満たす quadruples  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  の集合である:

- $q_2 \leq q_3, q_1 < q_3, q_2 < q_4$ , で  $\omega^{q_1 + q_3} = \omega^{q_2 + q_4} = 1$ . ここで若し  $p = 2$  ならば  $q_2 \neq q_3$ .
- 次のうち一つを満たす:
  - Case 1**  $\omega^{q_1 + q_2} = 1$ .
  - Case 2**  $\omega^{q_1 + q_2} \neq 1$ , and  $q_3 > q_4$ .
  - Case 3** ( $p \neq 2$ ),  $\omega^{q_1 + q_2} \neq 1$ , and  $q_3 = q_4$ .
  - Case 4** ( $p \neq 2$ ),  $\omega^{q_1 + q_2} \neq 1, q_2 \leq q_1 < q_3 < q_4, \omega^{q_1} = \omega^{q_2}$ .
  - Case 5** ( $p = 2$ ),  $\omega^{q_1 + q_2} \neq 1, q_2 < q_1 < q_3 < q_4, \omega^{q_1} = \omega^{q_2}$ .

さらに各場合に応じ、その元  $(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathcal{Q}_{q,\omega}$  に付随する多項式  $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)$  が次で定義される\*5:

$$\text{Case 1} \quad \Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4) := U_1^{q_1} U_2^{q_2 + q_3} U_3^{q_4}.$$

$$\text{Case 2} \quad \Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4) := U_1^{q_1} U_2^{q_2 + q_3} U_3^{q_4} - U_1^{q_2} U_2^{q_1 + q_4} U_3^{q_3} \\ - (\omega^{q_2} - 1)^{-1} (1 - \omega^{q_1 + q_2}) (U_1^{q_1} U_2^{q_2} U_3^{q_3 + q_4} - U_1^{q_1 + q_2} U_2^{q_4} U_3^{q_3}).$$

\*4 原論文 [Moc, 定理 2.11] では null-cohomologous な余計な基底も含まれて記述されている。これは証明中の minor なミスによる。 ([N2, Remark 6.2] を見よ)

\*5 ここで Cases 3, 4, 5 では、原論文 [Moc] の  $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)$  の形と違う。それとコホモロジースなコサイクルを、簡約のため記述した。



**Case 3**  $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4) := U_1^{q_1} U_2^{q_3+q_4} U_3^{q_1}$ .

**Case 4 and Case 5**  $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4) := U_1^{q_3} U_2^{q_1+q_2} U_3^{q_4}$ .

**注意 6.2.** Case 3 (resp. 4 & 5) の  $\Gamma$  は, Case 1 のその添字を (1, 2, 3, 4) から (1, 3, 4, 2) へと (resp. (3, 1, 2, 4) へと) 変換したものである.

**注意 6.3.** アブストラクトや定理 1.1 で『2 コサイクル型を除く』と表現したが, 厳密には『定理 6.1 の 3 コサイクル  $F(q_1, q_2, 0) = U_1^{q_1} U_2^{q_2}$  を抜く』という意味である. 実際そのコサイクルは命題 5.2 から得られない.

## 6.2 群の 3 コサイクルから望月 3 コサイクルへ

このように望月 3 コサイクルは, 少々複雑な式で, 一見解り辛い. しかし, いまから望月 3 コサイクルが, 群のコサイクルから得られる事を順々に見ていく.

まず定理 6.1 にある基底の部分集合  $I_{q,\omega}^+$  を扱おう.

**補題 6.4.** 巡回群の  $h$ -直積  $G = (\mathbb{Z}_p)^h$  と  $\mathbb{F}_q$  を同一視する. この時,  $G$  の 3 次群コホモロジー  $H_{\text{gr}}^3(G; \mathbb{F}_q) \cong (\mathbb{F}_q)^{\frac{h(h+1)(h+2)}{6}}$  は, 次の群 3 コサイクルで生成される:

$$\begin{aligned} & \{ U_1^{q_1} U_2^{q_2} U_3^{q_3} \mid q_1 < q_2 < q_3 \} \cup \{ ((U_1 + U_2)^{q_1} - U_1^{q_1} - U_2^{q_1}) \cdot U_3^{q_2}/p \mid q_1 < q_2 \} \\ & \cup \{ U_1^{q_1} ((U_2 + U_3)^{q_2} - U_2^{q_2} - U_3^{q_2})/p \mid q_1 \leq q_2 \}, \end{aligned}$$

ここで記号  $q_i$  は,  $p$  の冪で  $0 \leq q_i < q$  を満たす全てを走っている.

さらに,  $\omega \in \mathbb{F}_q$  の倍を,  $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{F}_q$  への作用と見なそう. この時その不変部分  $H_{\text{gr}}^3(G; \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}}$  は,  $\omega^d = 1$  を満たす  $d$  次である上記の多項式たちで生成される.

この補題は色々な示し方がある. 例えば, カップ積構造と Bochner 作用素を調べれば解る.

さて, 補題 6.4 を, 節 5 の鎖写像  $\varphi_3$  に代入してみよう: 次式は直接計算ですぐわかる:

$$\begin{aligned} \varphi_3^*(U_1^{q_1} U_2^{q_2} U_3^{q_3}) &= (1 - \omega^{q_1})(1 - \omega^{q_1+q_2}) \cdot F(q_1, q_2, q_3), \\ \varphi_3^*((U_1 + U_2)^{q_1} - U_1^{q_1} - U_2^{q_1}) U_3^{q_2}/p &= (1 - \omega^{q_2}) \cdot E_0(q_1, q_2), \\ \varphi_3^*(U_1^{q_1} ((U_2 + U_3)^{q_2} - U_2^{q_2} - U_3^{q_2})/p) &= (1 - \omega^{q_1}) \cdot E_1(q_1, q_2). \end{aligned} \tag{6}$$

右辺が  $I_{q,\omega}^+$  の元と一致する事に注意しよう. 望月氏 [Moc] のコサイクルを導く議論は上議論と別個のものだったが, 鎖写像  $\varphi_3$  で綺麗に繋がる事は意外な発見である. さて結論を述べれば, その部分集合  $I_{q,\omega}^+$  の基底は, ちょうど補題 6.4 のアーベル群のコホモロジーと一致する事がわかった. つまり

**補題 6.5.**  $G$  を巡回群の  $h$ -直積  $(\mathbb{Z}_p)^h$  とする. 写像  $\varphi_3^*: H_{\text{gr}}^3(G; \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}} \rightarrow H_Q^3(X; \mathbb{F}_q)$  は単射である. さらにその像は, その部分集合  $I_{q,\omega}^+$  で張られる部分空間である.

さて次に, 定理 6.1 にある残りの基底  $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)$  を  $\tilde{\varphi}_3$  から取り扱おう (我々が非可換群  $G_X$  を取り上げた理由はこの  $\Gamma$  を処理するためである).

**補題 6.6.** 添字の略記  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathcal{Q}_{q,\omega}$  に対して,  $G_X$  の  $\mathbb{Z}$ -不変な群 3 コサイクルを代表する写像  $\theta_{\Gamma}^{\mathbf{q}}: (G_X)^3 \rightarrow \mathbb{F}_q$  が存在し, 次式を満たす (下の可換図式も見よ):

$$\tilde{\varphi}_3^*(\theta_{\Gamma}^{\mathbf{q}}) = P_{\tilde{X}}^*(\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)) \in C_R^3(\tilde{X}; \mathbb{F}_q).$$

**証明.** 以下, 添え字  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathcal{Q}_{q,\omega}$  に対し, 場合場合に応じて, 我々は群 3 コサイクル  $\theta_{\Gamma}^{\mathbf{q}}: (G_X)^3 \rightarrow \mathbb{F}_q$  を具体的に構成する. 以下,  $(G_X)^3$  の生成元を

$$(x, a \otimes b, y, c \otimes d, z, e \otimes f) \in (G_X)^3$$

と書こう. まず **Case 1** のとき  $\theta_{\Gamma}^{\mathbf{q}}(x, a \otimes b, y, c \otimes d, z, e \otimes f)$  を次で定義する:

$$(1-\omega)^{-q_2} \left( x^{q_1} y^{q_2+q_3} + x^{q_1+q_3} y^{q_2} - (1-\omega)^{-q_2} (\omega^{q_2} a^{q_1} b^{q_2} + a^{q_2} b^{q_1} - x^{q_1+q_2}) y^{q_3} \right. \\ \left. + (1-\omega)^{-q_1} (a^{q_1} b^{q_3} + \omega^{q_1} a^{q_3} b^{q_1} - x^{q_1+q_3}) y^{q_2} \right) z^{q_4} \in \mathbb{F}_q.$$

次に **Case 2** の際, 値  $\theta_{\Gamma}^{\mathbf{q}}(x, a \otimes b, y, c \otimes d, z, e \otimes f)$  を次で定める:

$$(1-\omega)^{-q_1-q_2} \left( x^{q_1} (y^{q_2+q_3} z^{q_4} + y^{q_2} z^{q_3+q_4}) - (x^{q_1+q_2} y^{q_4} + x^{q_2} y^{q_1+q_4}) z^{q_3} \right. \\ \left. + (1-\omega)^{-q_3} (x^{q_1+q_3} - \omega^{q_3} a^{q_1} b^{q_3} - a^{q_3} b^{q_1}) y^{q_2} z^{q_4} - (1-\omega)^{-q_4} (x^{q_2+q_4} - \omega^{q_4} a^{q_2} b^{q_4} - a^{q_4} b^{q_2}) y^{q_1} z^{q_3} \right) \in \mathbb{F}_q.$$

さらに **Case 3** (resp. 4 and 5), の場合は, **Case 1** の関数  $\theta_{\Gamma}^{\mathbf{q}}$  で添字  $(1, 2, 3, 4)$  を  $(1, 3, 4, 2)$   $\wedge$  (resp.  $(3, 1, 2, 4) \wedge$ ) と変えて定める (注意 6.2 を想起せよ). すると初等的な直接計算により,  $\theta_{\Gamma}^{\mathbf{q}}$  は群 3 コサイクルである事が解り, 目標の等式も解る.  $\square$

**注意 6.7.** すると補題 6.4 と 6.6 をまとめると次の可換図式になる:

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{gr}}^3(G_X; \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_3} & H_Q^3(\tilde{X}; \mathbb{F}_q) \\ \uparrow (P_{\tilde{X}})^* & & \uparrow (P_{\tilde{X}})^* \\ H_{\text{gr}}^3((\mathbb{Z}_p)^h; \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sim \varphi_3} & \text{Im}(\varphi_3) = \text{span}_{\mathbb{F}_q}\{E_0, E_1, F\} \subset H_Q^3(X; \mathbb{F}_q) \end{array}$$

(定理 1.1 の概証) まず, 補題 6.4 と 6.6 からカンドル 3 コサイクル  $\phi$  に対し,  $G_X$  の 3 コサイクル  $\theta_{\phi}$  があり,  $\tilde{\varphi}_3^*(\theta_{\phi}) = (P_{\tilde{X}})^*(\phi)$  となる.

定理の主張である等式はだいたい次のように示される.

まず右辺について分岐被覆  $M_K^{q-1}$  の 3 角形分割が, 結び目の 3 角形分割から構成する方法がある ([Kab, §3,4] を見よ). それにより基本類  $[M_K^{q-1}] \in H_3(M_K^{q-1}; \mathbb{Z})$  が構成される. 他方で, 左辺のカンドルコサイクル不変量は定義していないが, おおよそ, 結び目図式を四角形で分割し, カンドルコサイクル  $\phi$  とのペアリングの和と定義される. ただし和は “ $X$ -カラリング” というものでとる (詳細は付録 A 参照).

次に “ $\mathbb{Z}$  同変な” 群準同型  $\pi_1(M_K^{q-1}) \rightarrow G_X$  は, カンドル  $X$  における “ $X$ -カラリング” に一対一対応を示すことになる (これは付録 A にある, 一対一対応 (7) にあるアレクサンダー多項式の定義から示される).

あとは, その一対一対応に基づき, 群とカンドル上での二つのペアリングが等価である事を示せばよい. そのアイディアは蒲谷氏 [Kab] による. 氏は鎖写像  $\varphi_*$  に関しては, 上記の二

つの分割を結びつける写像となることが示されていた。今回は、それを持上げた鎖写像  $\tilde{\varphi}_*$  に議論がリフトすることを確認する (そのリフトする議論は 2,3 技術的な事が要る)。それにより証明が終わる。(詳しくは [N1] をご覧ください)□

さて最後になるが、補題 6.6 で使われた 3 コサイクルをマッセイ積により意味づける事を述べる。ここで写像  $f^{q_i} : G_X \rightarrow \mathbb{F}_q$  で  $(x, \alpha) \mapsto x^{q_i}$  となるものを考える。これは群の 1 コサイクルである。群 1-コサイクル  $f, g, h$  に対し、もしカップ積  $f \wedge g = g \wedge h = 0 \in H_{\text{gr}}^2(G_X; \mathbb{F}_q)$  と消えていた時、それらのマッセイ積を  $\langle f, g, h \rangle \in H_{\text{gr}}^2(G_X; \mathbb{F}_q)$  と書こう。

**命題 6.8.**  $m \neq 2$  とする。また  $(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathcal{Q}_{q, \omega}$  が §6.2 で説明した Case  $m$  を満たすとする。この時、補題 6.6 の証明で表示した 3 コサイクル  $\theta_\Gamma \in C_{\text{gr}}^3(G_X; \mathbb{F}_q)$  は、次のようにかける。まず  $m = 1$  のとき、

$$\theta_\Gamma = (1 - \omega^{q_2})^{-1} \langle f^{q_2}, f^{q_1}, f^{q_3} \rangle \wedge f^{q_4} \in H_{\text{gr}}^3(G_X; \mathbb{F}_q).$$

他に  $m = 3, 4, 5$  のときは、注意 6.2 に沿った添え字変換すれば、同様の等式が得られる。

これも基本的に直接計算で示される。

ちなみに、 $m = 2$  のときは、マッセイ積による意味づけがない。それは群が大きくなると、群コホモロジーがマッセイ積だけで生成されない理由による。

## 付録 A カンドルコサイクル不変量の定義

この付録ではカンドルコサイクル不変量の定義を紹介する。原論文は [CJKLS] であるが、本付録はカンドル 3 コサイクルによる定義を与える。一般の局所係数版は [CEGS] を参照。また結び目論に関し、説明が足りない部分は参考書 [Kaw] などで補って頂けると幸いです。

$K \subset S^3$  を向付き結び目とする。結び目図式  $D \subset S^2$  を一つとる (おおよそ、はめ込み  $S^1 \looparrowright S^2$  で、交点の上下情報をとったもの)。また  $X$  をカンドルとする。

いまからシャドーカラリングを復習する。まず図式  $D$  の  $X$ -カラリングとは、写像  $C : \{ D \text{ のアーク } \} \rightarrow X$  であって、 $D$  の各交点に対し、図 1 の左側の条件を満たす事である。さらに、シャドーカラリングとは、 $X$ -カラリング  $C$  と、 $D$  の補領域  $\pi_0(S^2 \setminus D)$  から  $X$  への写像  $\tilde{C}$  との組で次を満たすものである: もし二つの補領域  $\lambda, \lambda'$  がアーク  $\alpha$  で分離されたとき (図 1 の右側を見よ)、条件式  $\tilde{C}(\lambda) * C(\alpha) = \tilde{C}(\lambda')$  を満たす。

さて、 $D$  のシャドーカラリングの集合を  $\overline{\text{Col}}_X(D)$  と書くことにする。すると、集合の  $\overline{\text{Col}}_X(D)$  の基数は、図式の取り方によらない。つまりもし二つの図式  $D_1, D_2$  が“ライデマイスター移動”で移りあうのであれば、カンドルの定義より一対一対応  $\overline{\text{Col}}_X(D_1) \leftrightarrow \overline{\text{Col}}_X(D_2)$  が自然に作れる (詳細は [CJKLS, CEGS] を見よ)。特に、井上氏 [Ino] が示された事に、もし  $X$  が  $\mathbb{F}_q$  上のアレクサンダーカンドルであるとき、次の全単射がある

$$\overline{\text{Col}}_X(D) \longleftrightarrow (\mathbb{F}_q)^2 \oplus \bigoplus_{i=1} \mathbb{F}_q[T]/(T - \omega, \Delta_i(K)/\Delta_{i+1}(K)), \quad (7)$$

ここで  $\Delta_i(K)$  は“結び目  $K$  の  $i$  番アレクサンダー多項式  $\in \mathbb{Z}[T^\pm]$ ”である。その多項式の定義は [Kaw] を参照するとして、言いたい事は、 $\overline{\text{Col}}_X(D)$  は結び目理論で身近な位相不変量である事である。

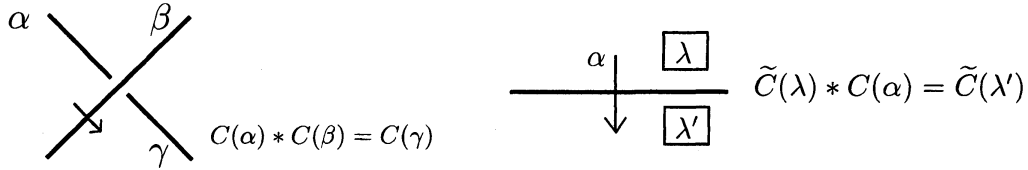


図1 各交点と、各アーク上でのカラリング条件式.

そこで次に、この不変量に重みをつけ、さらに細かしたのがカンドルコサイクル不変量である。今からそれを復習する(節3で説明した複体の定義を使う)。まずシャドールカラリング  $S \in \overline{\text{Col}}_X(D)$  を固定する。そして図2のように交点  $\tau$  に対し、 $\tau$  の重みを、 $\epsilon_\tau(x, y, z) \in C_3^R(X; \mathbb{Z})$  と定義する。ここで  $\epsilon_\tau \in \{\pm 1\}$  を  $\tau$  の符合とする(つまり  $\tau$  が正交点 (resp. 負交点) であれば、+1 (resp. -1) とする)。さらに、すべての交点に対し、重みを足し上げよう。つまり、次を定義する:

$$[S] := \sum_{\tau: \text{交点}} \epsilon_\tau(x, y, z) \in C_3^R(X; \mathbb{Z}).$$

これは、 $C_3^R(X; \mathbb{Z})$  の中で3-サイクルである事が知られている。さて次に、カンドル3-コサイクル  $\phi \in C_3^Q(X; A)$  をとり、それとのペアリング  $\langle \phi, [S] \rangle \in A$  を考える。但し、ここでペアリングはカンドルの複体  $\phi \in C_3^Q(X)$  に一度おとしてから取っている。

すると、(3-コサイクル  $\phi \in C_3^Q(X; A)$  による)  $K$  のカンドルコサイクル不変量とは、それらカラリング全体で形式的に足しあげ、群環  $\mathbb{Z}[A]$  に値を持たせたものである。厳密には次式で定義される。

$$\Phi_\phi(K) := \sum_{S \in \overline{\text{Col}}_X(D)} 1_{\mathbb{Z}}\{\langle \phi, [S] \rangle\} \in \mathbb{Z}[A].$$

これは実際に、図式  $D$  の取り方によらない。その理由はおおむね、カンドルコサイクル  $\phi \in C_3^Q(X; A)$  のコサイクル条件式が、ライデマイスター移動に綺麗に対応することによる。



図2 正交点と負交点での、 $x, y, z \in X$  の取り方.

以上が定義である。この組合せ的な定義が或る DW 不変量と一致する事(定理 1.1)は、非自明であるように思われる。また他方で、シンプルなカンドル3-コサイクル  $\phi$  の表示を得られれば、コサイクル不変量は定義からして比較的計算可能である。特に節 6.1 で紹介した望月氏のコサイクル  $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)$  は扱いやすい表示であり、実際計算できる。

参考文献

[Bro] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87, Springer-Verlag, New York, 1994.

- [CEGS] J. S. Carter, J. S. Elhamdadi, M. Graña, M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005), 499–541.
- [CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [Cla] F.J.-B.J. Clauwens, *The adjoint group of an Alexander quandle*, arXiv:math/1011.1587.
- [DW] R. Dijkgraaf, E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990) 393–429.
- [FRS] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995) 321–356.
- [E] M. Eisermann, *Knot colouring polynomials*, Pacific Journal of Mathematics **231** (2007) 305–336.
- [Ino] A. Inoue, *Quandle homomorphisms of knot quandles to Alexander quandles*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001) 813–821.
- [IK] A. Inoue, Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, arXiv:math/1012.2923.
- [Kab] Y. Kabaya, *Cyclic branched coverings of knots and quandle homology*, arXiv:math/1012.3729v2
- [Kaw] 河内 明夫 編著, 結び目理論, シュプリンガー・フェラーク東京 1990.
- [Moc] T. Mochizuki, *The 3-cocycles of the Alexander quandles  $\mathbb{F}_q[T]/(T - \omega)$* , Algebraic and Geometric Topology. **5** (2005) 183–205.
- [N1] T. Nosaka, *Quandle cocycle invariants of links using Mochizuki’s 3-cocycles and Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds*, arXiv:1103.3839.
- [N2] ———, *Quandle homotopy invariants of knotted surfaces*, arXiv:math/1011.6035.
- [N3] ———, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, to appear Trans. Amer. Math. Soc.
- [N4] ———, *G-families of Alexander quandles and invariant theory*, preprint

E-mail address: nosaka@kurims.kyoto-u.ac.jp