数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 119-134

自由群の自己同型群の ねじれ係数コホモロジーについて

東京理科大学理学部第二部数学科　佐藤 隆夫 (Satoh, Takao)
Department of Mathematics, Faculty of Science Division II,
Tokyo University of Science

Abstract

本研究集会の講演では，筆者がこれまで行ってきた，自由群の自己同型群の低次元ねじれ係数コホモロジーに関する survey talk を行った．本稿はその要約である．

Contents

1　ねじれ係数コホモロジー群

一般に，自由群の自己同型群は，曲面の写像類群や組み紐群の研究と関連して位相幾何学的な背景の下，1910 年代頃から Dehn, Nielsen, Magnus らによって研究され始めた群である．古典的には，Nielsen や Magnus らによって，自由群の自己同型群自身を対象

とした，群の表示や群の表現などの研究が行われた．一方，近年では，曲面の写像類群の研究で発展した理論の類似物を構築する研究が盛んであり，特に，1980 年代後半から始まった，Culler, Vogtmann, Hatcher らによる Outer space の幾何を用いた有理自明係数ホモロジー群の計算や，森田茂之, Hain らによる Johnson 準同型を用いた IA-自己同型群の研究など，代数的にも位相幾何学的に活発な研究がなされている群である．

本稿では特に，森田茂之によって研究されてきた曲面の写像類群のねじれ係数コホモロジーの対応物として，自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーがどのような振る舞いをするのかということに焦点を置いた解説を行う．

以下，階数 n の自由群 F_n の自己同型群を $\mathrm{Aut}\,F_n$ と表すことにする．また，特に断らない限り曲面といえば，種数が $g \geq 2$ で，境界成分の個数が 1 であるような向きづけられたコンパクトな曲面 $\Sigma_{g,1}$ を意味するものとする．

記号について

群 G と G の元 x, y に対して，x と y の交換子積を $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$ と表す．また，群 G の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,G$ の，群 G への作用は右作用とし，$\sigma \in \mathrm{Aut}\,G$ の $x \in G$ への作用を x^σ と表す．$\mathbb{Z}$ 加群 A に対して，係数環を有理数体 $\mathbb{Q}$ に拡大した $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $A_{\mathbb{Q}}$, $A^{\mathbb{Q}}$ などと添え字をつけて表し，同様に $\mathbb{Z}$ 加群の間の線形写像 $f: A \to B$ を $\mathbb{Q}$ 上で考えたもの $f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ を $f_{\mathbb{Q}}$, $f^{\mathbb{Q}}$ などと表す．

1.1 自由群の自己同型群の有限表示

我々の，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の 1, 2 次元コホモロジーの計算においては，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の有限表示を用いる．そこで，この小節では $\mathrm{Aut}\,F_n$ の有限表示について復習する．

$\mathrm{Aut}\,F_n$ の有限表示を最初に与えたのは Nielsen である．彼は [26] において，以下で定義される 4 種類の自己同型 P, Q, S, U を導入した：

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
P	x_2	x_1	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
Q	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n	x_1
S	x_1^{-1}	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
U	x_1x_2	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n

これらは，Nielsen 自己同型と呼ばれ，一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ における基本行列の "非可換版" に相当するものである．さらに彼は，$\mathrm{Aut}\,F_n$ はこれらで生成され，以下の有限個の関係式による有限表示を持つことを示した．即ち，

定理 1.1 (Nielsen [26]). $n \geq 3$ に対して，$\mathrm{Aut}\,F_n$ は P, Q, S, U で生成され，その間の関係式は以下で与えられる．

(R1): $P^2=1$,
(R2): $(QP)^{n-1}=Q^n=1$,
(R3): $[P, Q^{-i}PQ^i]=1, \quad (2 \leq i \leq [n/2])$,
(R4): $S^2=1$,
(R5): $[S, Q^{-1}PQ]=[S, QP]=1$,
(R6): $(PS)^4=(PSPU)^2=1$,

(R7): $[U, Q^{-2}PQ^2] = [U, Q^{-2}UQ^2] = 1, \quad (n \geq 4)$,
(R8): $[U, Q^{-2}SQ^2] = [U, SUS] = 1$,
(R9): $[U, QPQ^{-1}PQ] = [U, PQ^{-1}SUSQP] = 1$,
(R10): $[U, PQ^{-1}PQPUPQ^{-1}PQP] = 1$,
(R11): $PUPSU = USPS$,
(R12): $(PQ^{-1}UQ)^2UQ^{-1}U^{-1}QU^{-1} = 1$.

一方，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の有限表示についてはその後も McCool によっても研究され，彼は [17] において，Whitehead 自己同型を用いた $\mathrm{Aut}\,F_n$ の有限表示を得ている．さらに，Gersten は McCool の表示を利用して以下のような有限表示を得ている．

まず，$X^{\pm 1} = \{{x_1}^{\pm 1}, \ldots, {x_n}^{\pm 1}\} \subset F_n$ を文字の集合とし，$a \neq b^{\pm 1}$ なる $a, b \in X^{\pm 1}$ に対して $E_{ab} \in \mathrm{Aut}F_n$ を

$$a \mapsto ab, \quad c \mapsto c, \quad c \neq a^{\pm 1}$$

によって定める．E_{ab} は Nielsen 自己同型に外ならない．さらに，$a \neq b^{\pm 1}$ なる $a, b \in X^{\pm 1}$ に対して，$w_{ab} = E_{ba}E_{a^{-1}b}E_{b^{-1}a^{-1}}$ とおく．また，$\tau \in \mathrm{Aut}F_n$ を

$$x_1 \mapsto x_1^{-1}, \quad x_i \mapsto x_i, \ i \geq 2$$

によって定める．このとき，以下が成り立つことが知られている．

定理 1.2 (Gersten [8]). $n \geq 2$ に対して，$\mathrm{Aut}F_n$ は E_{ab}, $(a \neq b^{\pm 1})$ 及び，τ で生成され，その間の関係式は以下で与えられる．

(G1): ${E_{ab}}^{-1} = E_{ab^{-1}}$,
(G2): $[E_{ab}, E_{cd}] = 1, \quad a \neq c, d^{\pm 1}, \quad b \neq c^{\pm 1}$,
(G3): $[E_{ab}, E_{bc}] = E_{ac}, \quad a \neq c^{\pm 1}$,
(G4)': $w_{ab}E_{cd}w_{ab}^{-1} = E_{c^\sigma d^\sigma}$, σ は w_{ab} が定める $X^{\pm 1}$ 上の *monomial* 写像,
(G5): ${w_{ab}}^4 = 1$,
(G6): $\tau E_{ab} \tau = E_{a^\tau b^\tau}$,
(G7): $\tau^2 = 1$.

1.2 IA-自己同型群

F_n のアーベル化を $H := H_1(F_n, \mathbb{Z})$ とおく．自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,F_n$ は H に自然に作用し，従って，準同型写像

$$\rho : \mathrm{Aut}\,F_n \to \mathrm{Aut}(H) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$$

を誘導する．$\mathrm{Aut}\,F_n$ の Nielsen 生成系の像を調べることで ρ が全射となることが分かる．いま，ρ の核を IA_n と書いて自由群の **IA-自己同型群**と呼ぶ．IA_n は自由群の非可換性を色濃く反映する群である．

Nielsen [25] により IA_2 は F_2 の内部自己同型群 $\mathrm{Inn}\,F_2$ に一致することが知られているが，一般に IA_n は $\mathrm{Inn}\,F_n$ よりはるかに大きい．実際，互いに相異なる添え字 $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，

$$K_{ij} : \begin{cases} x_i & \mapsto x_j^{-1}x_ix_j, \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}, \quad K_{ijk} : \begin{cases} x_i & \mapsto x_ix_jx_k{x_j}^{-1}{x_k}^{-1}, \\ x_l & \mapsto x_l, \quad (l \neq i) \end{cases}$$

なる自己同型が定まるが，Magnus [16] により，IA_n はこれら有限個の元で生成されることが知られている．さらに，Cohen-Pakianathan [4, 5]，Farb [7]，及び河澄響矢 [12] の最近の独立した仕事により，IA_n のアーベル化の構造も完全に決定されており，

$$H_1(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z}) \cong H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H$$

となることが知られている．ここで，$H^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z})$ である．特に，$H_1(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ は上記の Magnus 生成系を基底とする自由アーベル群であることが分かる．

一方，$n \geq 3$ に対して IA_n の群の表示はまだ未解明であり，特に $n = 3$ の場合は Krstić-McCool [15] によって有限表示不可能であることが知られている．さらに，$n \geq 4$ の場合は有限表示可能かどうかさえも解っておらず，IA_n は組み合わせ群論的にも非常に複雑な群である．

1.3 曲面の写像類群

この小節では，曲面の写像類群と自由群の自己同型群の関係について復習する．一般に，与えられた（未知の）群の構造を調べようとするとき，その群が作用するような幾何学的対象を用意して，作用の様子を考察することは極めて自然なことであり，云わば常套手段である．このことは曲面の写像類群とて例外ではない．

写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ は定義より，曲面 $\Sigma_{g,1}$，従ってその基本群 $\pi_1(\Sigma_{g,1}) \cong F_{2g}$ に自然に作用する．ここで，$\Sigma_{g,1}$ の基点は境界上に取るものとし，標準的な同型 $\pi_1(\Sigma_{g,1}) \cong F_{2g}$ を 1 つ固定する．すると，この作用によって群準同型写像

$$\varphi : \mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}\, F_{2g}$$

が得られる．Dehn-Nielsen の古典的な結果により，この φ は単射であることが知られている．より正確には以下のことが成り立つ．

定理 1.3 (Dehn and Nielsen). 各 $g \geq 1$ に対して，

$$\varphi(\mathcal{M}_{g,1}) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\, F_{2g} \mid \zeta^\sigma = \zeta\} \subset \mathrm{Aut}\, F_{2g}$$

となる．ここで，$\zeta = [x_1, x_{2g}][x_2, x_{2g-1}] \cdots [x_g, x_{g+1}] \in F_{2g}$ である．即ち，幾何学的には，ζ は曲面の境界に平行な単純閉曲線のホモトピー類を表す語である．

この定理によって，写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ を自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}\, F_{2g}$ の部分群とみなすことができる．このような状況の下，$\mathcal{M}_{g,1}$ と IA_{2g} の共通部分

$$\mathcal{I}_{g,1} := \mathcal{M}_{g,1} \cap \mathrm{IA}_{2g}$$

を考える．$\mathcal{I}_{g,1}$ は曲面 $\Sigma_{g,1}$ の **Torelli 群**と呼ばれる．即ち，$\mathcal{I}_{g,1}$ は，基本群のアーベル化 $\pi_1(\Sigma_{g,1})^{\mathrm{ab}} = H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbb{Z})$ に自明に作用するような写像類たちのなす部分群のことである．以下，記号の乱用により，$H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbb{Z})$ についても H とかくことにする．

よく知られているように，自然な写像 $\rho : \mathrm{Aut}\, F_{2g} \to \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z})$ による写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の像はシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ であり，以下の可換図式（2 つの群の拡大を含

む）が成り立つ．

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{IA} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\,F_{2g} & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}(2g,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 1 \\ & & {\scriptstyle \varphi|_{\mathcal{I}_{g,1}}}\uparrow & & {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{g,1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{g,1} & \xrightarrow{\rho|_{\mathcal{M}_{g,1}}} & \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1}$ のアーベル化については，Dennis Johnson [11] がその先駆的な仕事の中で決定しており，

$$H_1(\mathcal{I}_{g,1},\mathbb{Z}) = \Lambda^3 H \oplus (2\text{-torsions})$$

と記述される．即ち，$\mathcal{I}_{g,1}$ のアーベル化の自由部分は $\Lambda^3 H$ である．

ここで，森田茂之氏による，曲面の写像類群の低次元ねじれ係数コホモロジーの計算結果を簡単にまとめておく．

定理 1.4. (1) *(Morita, [23])* $g \geq 2$ に対して，$H^1(\mathcal{M}_{g,1}, H) = \mathbb{Z}$.

(2) *(Morita, [22])* $g \geq 9$ に対して，$H^2(\mathcal{M}_{g,1}, H) = 0$.

(3) *(Morita, [24])* $g \geq 9$ に対して，$H^2(\mathcal{M}_{g,1}, \Lambda^3 H) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$.

Poincaré 双対性により，$\mathcal{M}_{g,1}$ 加群として，H とその双対加群 $H^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,\mathbb{Z}) = H^1(\Sigma_{g,1},\mathbb{Z})$ は自然に同型であることにも注意しておく．

1.4 自然表現とその双対表現

$\mathrm{Aut}\,F_n$ が作用する最も基本的でかつ，重要な加群として H とその双対加群 H^* がある．一般に，有限表示が与えられた群の 1 次元コホモロジーは機械的に計算が可能である．筆者は修士論文の一部で，Gersten による有限表示を用いて $\mathrm{Aut}\,F_n$ の上記の作用に関する 1 次元コホモロジーを計算し，以下のような結果を得た．

定理 1.5 (S. [30]). $n \geq 2$ に対して，

$$H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, H) = \mathbb{Z}, \quad H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, H^*) = 0$$

この結果により，$\mathrm{Aut}\,F_n$ 加群として，H と H^* は同型でないということも分かる．これは写像類群と自由群の自己同型群の比較において，その差を理解できる最も簡単な例のうちの一つである．

また，筆者は $H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, H) = \mathbb{Z}$ の生成元について以下のような考察を行った．まず，上述の森田氏による写像類群の結果において，森田氏は $H^1(\mathcal{M}_{g,1}, H) = \mathbb{Z}$ の生成元が Magnus 表現を用いて構成できることを示した．筆者はこれに対応する類似の議論を行うことで，$H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, H) = \mathbb{Z}$ の生成元についても Mugnus 表現を用いて構成可能であり，従って，Dehn-Nielse 埋め込み $\mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,F_{2g}$ は同型写像

$$H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, H) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathcal{M}_{g,1}, H)$$

を誘導することが分かる．

次に，筆者は博士論文の一部で，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の $H_{\mathbb{Q}}$, $H^*_{\mathbb{Q}}$ への作用に関する 2 次元ホモロジー群を計算し，次の結果を得た．

定理 1.6 (S. [32]). $n \geq 6$ に対して,

$$H_2(\mathrm{Aut}\,F_n, H_{\mathbb{Q}}) = 0, \quad H_2(\mathrm{Aut}\,F_n, H_{\mathbb{Q}}^*) = 0.$$

一般に，群に有限表示が与えられたとしても，その2次元ホモロジー群決定することは甚だ困難である．しかしながら，上からの評価を与えることは可能である．従って，2次元ホモロジーが消える場合や，精確な下からの評価が与えられている場合などについては群の表示を用いて2次元ホモロジーを計算することが可能である．筆者は Gersten による有限表示を用いて上の計算を行った．Gersten の表示を用いる理由は，関係子たちの表記が Nielsen の表示と比べて対称性が高く，比較的容易に関係子たちを変形しやすいことが挙げられる．詳細は [32] を参照されたい．

上記の結果に加えて，ねじれ係数（コ）ホモロジーの明示的な計算結果としては，Hatcher-Wahl らによる以下の結果が知られていることに注意する．

定理 1.7 (Hatcher-Wahl [9]). *For* $n > 3i + 9$,

$$H_i(\mathrm{Aut}\,F_n, H) = 0.$$

1.5 IA-自己同型群のアーベル化への作用

前小節では，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の H, 及び H^* 係数に関するねじれ係数コホモロジーを考察したが，一般に，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 加群 V に対して，全射準同型写像 $\mathrm{Aut}\,F_n \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ を通して V を $\mathrm{Aut}\,F_n$ 加群とみなすとき，$\mathrm{Aut}\,F_n$ のねじれ係数 (コ) ホモロジー $H^*(\mathrm{Aut}\,F_n, V)$ の構造は，IA-自己同型群の整係数コホモロジー $H^*(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ と深い関係があることから分かる．これは，群の拡大

$$1 \to \mathrm{IA}_n \to \mathrm{Aut}\,F_n \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \to 1$$

に付随する Lyndon-Hochshild-Serre スペクトル系列を考えれば明らかである．特に，$H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, V)$ の構造には $U := H^1(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ が密接に関係しており，$U \cong H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H$ が自然に H を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 加群として含むので，$H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, H)$ が非自明であることが分かる．そこで，U そのものを係数としたきに，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の非自明コホモロジー類が detect 出来るのではないかという問題は，至極自然である．これに対する結果が以下である．

定理 1.8 (S. [34]). *For* $n \geq 5$,

$$H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, U) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}.$$

抑々，これと同様なことが森田茂之氏によって写像類群に対して考えられており（定理 1.4 の (3) を参照.），これはそれらの自由群の自己同型版である．

論文 [34] では，$H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, U)$ の生成元の自然な構成についても考察し，森田茂之氏による Magnus 表現を用いた構成による crossed homomorphism と，河澄響矢氏による Mgnus 展開を用いた構成による crossed homomorphism によって $H^1(\mathrm{Aut}\,F_n, U)$ が生成されることも示した．

1.6 さらなる展開

自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーに関しては，上述以外の明示的な計算結果は殆どない．今後も，自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーがどのような構造を持つかを継続して研究し，その独特な現象を観察していく必要があると思われる．特に，以下のような問題が重要であると考えられる．

(1) どのような $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 加群 V に対して，$H^*(\mathrm{Aut}\,F_n, V)$ が非自明となるか．

(2) ねじれ係数の場合について（コ）ホモロジー安定性は成り立つか．

(3) 非安定域（（コ）ホモロジーの次元に比べて，自由群の階数 n が小さい場合）において非自明な（コ）ホモロジー類を detect する方法を考察せよ．

これらの問題は，有理自明係数の場合にはかなり研究が進み多くのことが解明されてきているが，ねじれ係数の場合はまだまだ有力な道具が揃っていないというのが現状である．しかしながら，上記の問題 (1) に関しては，河澄響矢氏 [12] の Magnus 展開を用いた手法により，次のことが知られている．

定理 1.9 (Kawazumi [12])**.** $p \geq 1$ に対して，$H^p(\mathrm{Aut}\,F_n, H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes(p+1)})$ は非自明である．

2 Johnson 準同型写像

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 加群 V に対して，ねじれ係数 (コ) ホモロジー $H^*(\mathrm{Aut}\,F_n, V)$ を考えるとき，$H^*(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ の構造を調べることが重要であると述べたが，残念ながら，$H^*(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ の構造は甚だ難しい．現在，IA_n の高次元（コ）ホモロジーに関して知られている結果は以下のみである．

定理 2.1 (Bestvina-Bux-Margalit [3])**.** $n \geq 3$ に対して，

(1) $H_i(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z}) = 0$ *for* $i > 2n-3$.

(2) $H_{2n-3}(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ は有限生成でない．

即ち，今のところ，$H_2(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Z})$ さえも計算されておらず，それどころか，これが有限生成になるかどうかも未解決である．

一般に，Hopf の公式を見ても分かるように，群の 2 次元ホモロジーを考察する際には，生成元の間の関係式たちがどのような構造をしているかを具に調べる必要がある．しかしながら，IA-自己同型群の場合，表示が得られていないのでそれも困難である．

そこで，IA-自己同型群の様子を逐次近似して調べていこうということを考える．ここに Johnson 準同型を用いる．端的には，Johnson 準同型とは，IA-自己同型群の Johnson filtration と呼ばれる，ある降下列の各次数商上で定義される準同型のことで，これの性質を調べることは，IA-自己同型群を有限生成アーベル群で逐次近似していることに当たる．上述の観点から，IA_n 全体を一度に考察しようとすると大変なので，(良く分からないので,) 少しずつ分かるところから攻めていく，といった具合である．Johnson 準同型を利用して，IA_n の関係式のなす群の構造や，整係数ホモロジーに関する情報を

少しずつ取りだして，その全体像の把握につなげたいというのが私の研究の主な目標である．

以下は直接，$\mathrm{Aut}\, F_n$ のコホモロジー論とは関係ないが，本研究集会の講演において解説させて頂いたので，本稿においても記述させて頂くことにする．特に講演では，時間の関係上あまり詳しく説明できなかった部分もあるので，興味を持たれた方は以下の文章をご参照いただければ幸いある．

2.1 H が生成する自由リー代数

各 $k \geq 1$ に対して F_n の降中心列 $\Gamma_n(k)$ を

$$\Gamma_n(1) := F_n, \quad \Gamma_n(k) := [\Gamma_n(k-1), F_n], \quad (k \geq 2)$$

により帰納的に定義する．これらの各次数商を $\mathcal{L}_n(k) := \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ とおき，その次数和を $\mathcal{L}_n := \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_n(k)$ とおく．$\mathcal{L}_n$ には F_n の交換子積から誘導される次数つきリー代数としての括弧積が自然に定義され，$\mathcal{L}_n$ は次数つきリー代数として，H が生成する自由リー代数と同型であることが知られている．

元来，$\mathcal{L}_n$ の構造については，1930 年代頃から Magnus, Witt, 及び Hall らによって先駆的に研究されはじめ，各斉次成分 $\mathcal{L}_n(k)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$-同変な自由アーベル群であり，その階数や基底も具体的に明示されている．(例えば [16], [29] などを参照.)

2.2 Andreadakis-Johnson filtration

各 $k \geq 0$ に対して $\mathrm{Aut}\, F_n$ の，F_n の冪零商 $F_n/\Gamma_n(k+1)$ への自然な作用は準同型写像

$$\mathrm{Aut}\, F_n \to \mathrm{Aut}(F_n/\Gamma_n(k+1))$$

を誘導するが，この核を $\mathcal{A}_n(k)$ とおく．すると，これらは $\mathrm{Aut}\, F_n$ に正規部分群の降下列

$$\mathrm{Aut}\, F_n = \mathcal{A}_n(0) \supset \mathcal{A}_n(1) \supset \mathcal{A}_n(2) \supset \cdots$$

を定める．特に $\mathcal{A}_n(1) = \mathrm{IA}_n$ である．この降下列を $\mathrm{Aut}\, F_n$ の **Andreadakis-Johnson filtration** と呼ぶ．Andreadakis [1] により以下の基本的な結果が知られている．

定理 2.2 (Andreadakis, [1]).

(1) 各 $k, l \geq 1$，及び，$\sigma \in \mathcal{A}_n(k)$, $x \in \Gamma_n(l)$ に対して，$x^{-1}x^{\sigma} \in \Gamma_n(k+l)$.

(2) 各 $k, l \geq 1$ に対して，$[\mathcal{A}_n(k), \mathcal{A}_n(l)] \subset \mathcal{A}_n(k+l)$.

(3) $\displaystyle\bigcap_{k \geq 1} \mathcal{A}_n(k) = 1$.

(4) 各 $k \geq 1$ に対して，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) := \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ は有限生成自由アーベル群.

Andreadakisは [1] において，任意の $k \geq 1$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_2)$ 及び，$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^2(\mathcal{A}_3)$ を計算している．一方，Pettet [28] の最近の仕事により各 $n \geq 3$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^2(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{3}n^2(n^2-4) + \frac{1}{2}n(n-1)$ であることが知られている．また，筆者の先行研究 [31] により，$n \geq 3$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{gr}^3(\mathcal{A}_n)$ が計算されているが，一般に，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) := \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ の階数を決定する問題は極めて難しい．

2.3 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\,F_n/\mathrm{IA}_n$ の作用

この節では，各 $\mathcal{L}_n(k)$, 及び $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ が自然に $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ 加群とみなせることを示す．

各 $k \geq 1$ に対して，$\Gamma_n(k)$ は F_n の特性部分群であるから，$\mathrm{Aut}\,G$ は自然に $\Gamma_n(k)$ に（右から）作用する．従って，$\mathrm{Aut}\,G$ は各次数商 $\mathcal{L}_n(k) = \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ にも作用する．定理 2.2 の (1) より，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の $\mathcal{L}_n(k)$ へ作用の，IA_n への制限は自明であることが分かる．ゆえに，剰余群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\,F_n/\mathrm{IA}_n$ の $\mathcal{L}_n(k)$ への作用が定義される．

一方，各 $\mathcal{A}_n(k)$ は $\mathrm{Aut}\,F_n$ の正規部分群であるから，$\mathrm{Aut}\,F_n$ は共役により，$\mathcal{A}_n(k)$ に（右から）作用する．従って，$\mathrm{Aut}\,F_n$ は Andreadakis-Johnson filtration の各次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ にも作用している．すると，定理 2.2 の (2) より，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ への作用の，IA_n への制限は自明であることが分かる．ゆえに，剰余群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\,F_n/\mathrm{IA}_n$ の $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ への作用が定義される．

以下，特に断らない限り，これらの $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ の作用を固定する．

2.4 Johnson 準同型写像の定義

各 $k \geq 1$ に対して準同型写像 $\mathcal{A}_n(k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$ を

$$\sigma \;\mapsto\; ([x] \mapsto [x^{-1}x^{\sigma}]), \quad x \in F_n$$

で定義する．ここで，[ ] は剰余類を表す記号である．すると，定義より直ちに，この写像の核が $\mathcal{A}_n(k+1)$ であることが分かり，従って，単射準同型写像

$$\tau_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) \hookrightarrow H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

が得られる．この τ_k を $\mathrm{Aut}\,F_n$ の**第 k-Johnson 準同型写像**という．特に，τ_k は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変である．ゆえに，次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-加群としての構造を研究する際に，以下は基本的かつ重要な問題となる．

問題 2.3. τ_k の像 $\mathrm{Im}(\tau_k)$，もしくは余核 $\mathrm{Coker}(\tau_k)$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-加群としての構造を決定せよ．

第 1-Johnson 準同型に関しては，Andreadakis [1] が $\mathrm{gr}^1(\mathcal{A}_n)$ の生成元の像を調べることで τ_1 が全射となることを示している．即ち，$n \geq 3$ に対して

$$\tau_1 : \mathrm{gr}^1(\mathcal{A}_n) \to H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 H$$

は同型写像である．さらに，τ_1 が IA_n のアーベル化を与えていることも分かる．

一方，$k \geq 2$ に対しては τ_k は全射ではない．実際，筆者の先行研究 [31] により，

$$\mathrm{Coker}(\tau_2) \cong S^2 H, \quad \mathrm{Coker}(\tau_{3,\mathbb{Q}}) \cong S^3 H_{\mathbb{Q}} \oplus \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}$$

となることが知られている．また，森田茂之による Trace 写像を用いた最近の研究により，各 $k \geq 2$ に対して有理 Johnson 準同型写像 $\tau_{k,\mathbb{Q}}$ の余核には $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-既約表現として $H_{\mathbb{Q}} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の k 次の対称テンソル $S^k H_{\mathbb{Q}}$ が現れることが知られている．各 $S^k H_{\mathbb{Q}}$ は，(Johnson 準同型の全射性に関する障害という意味で) **森田障害**と呼ばれている．しかしながら，一般に，$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}})$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-構造を決定することは，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の階数を求める問題と同様に極めて難しい問題である．

2.5 第2-Johnson準同型とカップ積

筆者が，$\mathrm{Coker}(\tau_2) = S^2H$ となることを示したのと同時期に，Pettet [28] はGLの表現論を用いて $\mathrm{Coker}(\tau_{2,\mathbb{Q}}) = S^2H_{\mathbb{Q}}$ であることを示している．彼女はこの結果を利用して，IA_n の有理カップ積

$$\cup_{\mathbb{Q}} : \Lambda^2 H^1(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Q}) \to H^2(\mathrm{IA}_n, \mathbb{Q})$$

の像を完全に決定した．特に，$\mathrm{Im}(\cup_{\mathbb{Q}})$ のGL-既約分解も与えている．しかしながら，$\cup_{\mathbb{Q}}$ が全射かどうかは現在でも未解決である．

2.6 IA_n の降中心列

この節では，IA-自己同型群の**降中心列** $\mathcal{A}'_n(k)$:

$$\mathrm{IA}_n = \mathcal{A}'_n(1) \supset \mathcal{A}'_n(2) \supset \cdots$$

について考える．一般に，Andreadakis-Johnson filtration $\mathcal{A}_n(k)$ は中心列であるから，定義より直ちに，各 $k \geq 1$ に対して

$$\mathcal{A}'_n(k) \subset \mathcal{A}_n(k)$$

であることが分かる．Andredakis [1] によって，$n = 2$ の場合にこれらが一致すること，及び $\mathcal{A}'_3(3) = \mathcal{A}_3(3)$ であることが知られており，彼によって両者は一致するのではないかという予想が立てられている．現在，Bachmuth [2] によって，$\mathcal{A}'_n(2) = \mathcal{A}_n(2)$, $k \geq 1$ であること，及び，Pettet [28] によって，$\mathcal{A}'_n(3)$ は $\mathcal{A}_n(3)$ において有限指数であることが知られているが，それら以外についてこの両者の差について言及している結果は得られていない．

さて，各 $k \geq 1$ に対して，次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) := \mathcal{A}'_n(k)/\mathcal{A}'_n(k+1)$ を考える．すると，Johnson準同型と同様にして準同型写像

$$\tau'_k : \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n) \to H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$$

が定義される．すると，一般に，τ'_k は τ_k を経由するので，

$$\mathrm{Im}(\tau'_k) \subset \mathrm{Im}(\tau_k)$$

となることが分かる．ここで，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ の表現論を考えることで，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として

$$\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}}) \subset \mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$$

とみなすことができる．即ち，$\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$ を研究することで $\mathrm{Coker}(\tau_{k,\mathbb{Q}})$ を表現論的に上から評価することができる．以下，(用語の乱用により) τ'_k についても，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の**第 k-Johnson準同型写像**と呼ぶことにする．

このような観点の下，筆者はこれまでに $\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$ についての研究を重点的に行い，以下のような結果を得た．

定理 2.4 (S. [35])**.** $k \geq 2$，及び $n \geq k+2$ に対して，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として

$$\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}) \cong \mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$$

が成り立つ．

ここで，$\mathcal{C}_n(k)$ は，位数 k の巡回群 Cyc_k の $H^{\otimes k}$ への成分の置換作用による剰余加群であり，具体的には，

$$\mathcal{C}_n(k) \cong H^{\otimes k} / \langle a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k - a_2 \otimes a_3 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes a_1 \,|\, a_i \in H \rangle$$

と記述される．

これによって，[35] において，安定的な場合（Johnson 準同型の次数 k に対して，自由群の階数 n が十分大きい場合）の $\tau'_{k,\mathbb{Q}}$ の余核が決定できたことになる．**この結果を写像類群の Johnson 準同型の研究に応用させたいというのが本研究の主な目的である．**

2.7 縮約写像と Trace map

この節では，有理 Johnson 準同型 $\tau'_{k,\mathbb{Q}}$ の安定余核に $\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ が現れることを検出する写像について復習する．

Poincaré-Birkoff-Witt の定理により，H が生成する自由リー代数 $\mathcal{L}_n$ はその包絡代数（H が生成するテンソル代数）

$$T(H) := H \oplus H^{\otimes 2} \oplus H^{\otimes 3} \oplus \cdots$$

に自然に埋め込める．この埋め込みの次数 k 部分を $\iota_k : \mathcal{L}_n(k) \to H^{\otimes k}$ とおく．すると，Johnson 準同型の値域からの自然な写像

$$\mathrm{id}_{H^*} \otimes \iota_{k+1} : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \to H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes (k+1)}$$

が得られる．

次に，各 $k \geq 1$ に対して，$H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes(k+1)}$ における第1成分の縮約写像を $\varphi^k : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} H^{\otimes(k+1)} \to H^{\otimes k}$ とおく．即ち，φ^k は

$$x_i^* \otimes x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_{k+1}} \mapsto x_i^*(x_{j_1}) \cdot x_{j_2} \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes x_{j_{k+1}}$$

で定義される写像である．いま，この両者を合成することにより，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変な準同型写像

$$\Phi^k = \varphi^k \circ (id_{H^*} \otimes \iota_{k+1}) : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{gr}^{k+1}(\mathcal{L}_n) \to H^{\otimes k}.$$

が得られる．用語の乱用により，この Φ^k も**縮約写像**と呼ぶことにする．

さて，この縮約写像 Φ^k に，自然な全射 $H^{\otimes k} \to \mathcal{C}_n(k)$ を合成することにより，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-同変な準同型写像

$$\mathrm{Tr}_k : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \to \mathcal{C}_n(k)$$

が得られる．これを単に，**Trace map** と呼ぶことにする．論文 [35] において，$k \geq 2$，及び $n \geq k+2$ のとき，

(1) Tr_k は全射である．

(2) $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{k,\mathbb{Q}}) = \mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$

となることを示した．これによって，定理 2.4 が得られる．

2.8 $\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解

筆者は榎本直也氏と共同で $\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解についての研究を行い，組み合わせ論的な記述を与えることができた．具体的には以下の定理を得た．

定理 2.5 (Enomoto-S., [6]). $n \geq k+2$ のとき，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ における，最高ウェイト λ の *GL*-既約表現 $L_{\mathrm{GL}}^{\lambda}$ の重複度 $[\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k) : L_{\mathrm{GL}}^{\lambda}]$ は，分割 λ に対応する $\mathfrak{S}_k$-既約表現 S^{λ} を Cyc_k に制限して得られる表現における，Cyc_k の自明表現 $\mathbf{triv}_k$ の重複度 $[\mathrm{Res}_{\mathrm{Cyc}_k}^{\mathfrak{S}_k} : \mathbf{triv}_k]$ に一致する．

この定理を用いることで，次数 k を 1 つ取って固定するとき，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解を具体的に計算できる．$1 \leq k \leq 7$ のとき，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解は以下の表で与えられる．

k	$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k) = \mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}),\quad n \geq k+2$	
1	0	Andreadakis [1]
2	(2)	Pettet [28]
3	$(3) \oplus (1^3)$	Satoh [31]
4	$(4) \oplus (2,2) \oplus (2,1^2)$	Satoh [33]
5	$(5) \oplus (3,2) \oplus 2(3,1^2) \oplus (2^2,1) \oplus (1^5)$	
6	$(6) \oplus 2(4,2) \oplus 2(4,1^2) \oplus (3^2) \oplus 2(3,2,1) \oplus (3,1^3) \oplus 2(2^3)$ $\oplus (2^2,1^2) \oplus (2,1^4)$	
7	$(7) \oplus 2(5,2) \oplus 3(5,1^2) \oplus 2(4,3) \oplus 5(4,2,1) \oplus 2(4,1^3) \oplus 3(3^2,1)$ $\oplus 3(3,2^2) \oplus 5(3,2,1^2) \oplus 3(3,1^4) \oplus 2(2^3,1) \oplus 2(2^2,1^3) \oplus (1^7)$	

上の表において，(λ) は Young tableau λ に付随する，既約な $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-多項式表現 $L^{(\lambda)}$ を表す．

注意 2.6. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ は，Cyc_k の $H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$ への作用による固定点全体のなす部分加群に同型である．即ち，*Johnson* 余核 $\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$ は，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-加群として，*Kontsevich* による $\mathfrak{a}_n(k)$ に同型である．詳細は，*[13]* と *[14]* を参照されたい．

一方，上の結果を利用することで，Johnson 像 $\mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$ の GL-既約分解についての情報も得られる．特に，$1 \leq k \leq 7$ のときは次のようになる．

k	polynomial part of $\mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$	non-polynomial part of $\mathrm{Im}(\tau'_{k,\mathbb{Q}})$
1	(1)	$(1,1)$
2	(1^2)	$(2,1)$
3	$2(2,1)$	$(3,1)\oplus(2,1^2)$
4	$3(3,1)\oplus(2^2)\oplus 2(2,1^2)\oplus(1^4)$	$(4,1)\oplus(3,2)\oplus(3,1^2)$ $\oplus(2^2,1)\oplus(2,1^3)$
5	$4(4,1)\oplus 4(3,2)\oplus 4(3,1^2)$ $\oplus 4(2^2,1)\oplus 4(2,1^3)$	$(5,1)\oplus(4,2)\oplus 2(4,1^2)\oplus(3^2)$ $3(3,2,1)\oplus(3,1^3)\oplus 2(2^2,1^2)\oplus(2,1^4)$
6	$5(5,1)\oplus 7(4,2)\oplus 8(4,1^2)\oplus 4(3^2)$ $\oplus 14(3,2,1)\oplus 9(3,1^3)\oplus 3(2^3)$ $\oplus 8(2^2,1^2)\oplus 4(2,1^4)\oplus(1^6)$	$(6,1)\oplus 2(5,2)\oplus 2(5,1^2)\oplus 2(4,3)$ $\oplus 5(4,2,1)\oplus 3(4,1^3)\oplus 3(3^2,1)$ $\oplus 3(3,2^2)\oplus 5(3,2,1^2)\oplus 2(3,1^4)$ $\oplus 2(2^3,1)\oplus 2(2^2,1^3)\oplus(2,1^5)$
7	$6(6,1)\oplus 12(5,2)\oplus 12(5,1^2)\oplus 12(4,3)$ $\oplus 30(4,2,1)\oplus 18(4,1^3)\oplus 18(3^2,1)$ $\oplus 18(3,2^3)\oplus 30(3,2,1^2)\oplus 12(3,1^4)$ $\oplus 12(2^3,1)\oplus 12(2^2,1^3)\oplus 6(2,1^5)$	$(7,1)\oplus 2(6,2)\oplus 3(6,1^2)\oplus 4(5,3)$ $\oplus 8(5,2,1)\oplus 4(5,1^3)\oplus(4^2)\oplus 9(4,3,1)$ $\oplus 6(4,2^2)\oplus 12(4,2,1^2)\oplus 4(4,1^4)\oplus 6(3^2,2)$ $\oplus 9(3,2^2,1)\oplus 8(3,2,1^3)\oplus 3(3,1^5)\oplus(2^4)$ $\oplus 4(2^3,1^2)\oplus 2(2^2,1^4)\oplus(2,1^6)$

ここで，上の表において，polynomial part における (λ) は Young tableau λ に付随する既約な $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-多項式表現 $L^{(\lambda)}$ であり，non-polynomial part における (μ) は，既約な $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$-非多項式表現 $L^{\{\mu;(1)\}}$ を表す.

さらに，[6] において我々は，$\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ に現れる $H_{\mathbb{Q}}$ の対称テンソル，及び交代テンソルの重複度がどのようになるかを考察し，以下のような結果を得た.

定理 2.7 (Enomoto-S., [6]). $k\geq 2$ 及び，$n\geq k+2$ に対して，

(1) $[\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}):S^kH_{\mathbb{Q}}]=1$.

(2) k が奇数であれば，$[\mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbb{Q}}):\Lambda^kH_{\mathbb{Q}}]=1$.

これによって，Johnson 余核に現れる森田障害や，我々の先行研究で得られている障害 $\Lambda^kH_{\mathbb{Q}}$ の重複度が丁度 1 であることがわかる.

現在は，上述の結果を用いて IA-自己同型群の表示，特に関係子たちのなす群の構造の解明に力を注いでいる. 将来的には，これらを用いてその 2 次元コホモロジーの研究に繋げていきたいと考えている.

3 謝辞

研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」で講演の機会を与えて下さった，世話人の佐々木洋城先生（信州大学），及び柳田伸顕先生（茨城大学）に感謝いたします.

References

[1] S. Andreadakis; On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 239-268.

[2] S. Bachmuth; Induced automorphisms of free groups and free metabelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 1-17.

[3] M. Bestvina, Kai-Uwe Bux and D. Margalit; Dimension of the Torelli group for $\mathrm{Out}\,(F_n)$, Invent. Math. 170 (2007), no. 1, 1-32.

[4] F. Cohen and J. Pakianathan; On Automorphism Groups of Free Groups, and Their Nilpotent Quotients, preprint.

[5] F. Cohen and J. Pakianathan; On subgroups of the automorphism group of a free group and associated graded Lie algebras, preprint.

[6] N. Enomoto and T. Satoh; On the derivation algebra of the free Lie algebra and trace maps, preprint.

[7] B. Farb; Automorphisms of F_n which act trivially on homology, in preparation.

[8] S. Gersten; A finete presentation for the special automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, 33 (1984), 269-279.

[9] A. Hatcher and N. Wahl; Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries, Geometry and Topology, Vol. 9 (2005), 1295-1336.

[10] D. Johnson; An abelian quotient of the mapping class group, Math. Ann. 249 (1980), 225-242.

[11] D. Johnson; The strucure of the Torelli group III: The abelianization of $\mathcal{I}_g$, Topology 24 (1985), 127-144.

[12] N. Kawazumi; Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, The University of Tokyo. UTMS 2005-18 (2005), `http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.GT/0505497`.

[13] M. Kontsevich; Formal (non)commutative symplectic geometry, The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990-1992, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1993) 173-187.

[14] M. Kontsevich; Feynman diagrams and low-dimensional topology, First European Congress of Mathematics, Vol. II, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, (1994), 97-121.

[15] S. Krstić, J. McCool; The non-finite presentability in $IA(F_3)$ and $GL_2(\mathbb{Z}[t,t^{-1}])$, Invent. Math. 129 (1997), 595-606.

[16] W. Magnus; Über n-dimensinale Gittertransformationen, Acta Math. 64 (1935), 353-367.

[17] J. McCool; A presentation for the automorphism group of a free group of finite rank, J. London Math. Soc., (2), 8 (1974), 259-266.

[18] S. Morita; Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I, Topology, 28 (1989), 305-323.

[19] S. Morita; Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Mathematical Journal 70 (1993), 699-726.

[20] S. Morita; Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect, Geometry and Topology Monographs Vol. 2 (1999), 349-406.

[21] S. Morita; Cohomological structure of the mapping classs group and beyond, Proc. Sympos. Pure Math., 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[22] S. Morita; On the Homology Groups of the Mapping Class Groups of Orientable Surfaces with twisted coefficients, Proc. Japan Acad., 62, Ser. A (1986), 148-151.

[23] S. Morita; Family of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 39 (1989), no. 3, 777-810.

[24] S. Morita; Family of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles II, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 105 (1989), no. 1, 79-101.

[25] J. Nielsen; Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann. 78 (1918), 385-397.

[26] J. Nielsen; Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. 91 (1924), 169-209.

[27] J. Nielsen; Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen Zweiseitigen Fläschen, Acta Math. 50 (1927), 189-358.

[28] A. Pettet; The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n, Algebraic and Geometric Topology 5 (2005) 725-740.

[29] C. Reutenauer; Free Lie Algebras, London Mathematical Societymonographs, new series, no. 7, Oxford University Press (1993).

[30] T. Satoh; Twisted first homology group of the automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, 204 (2006), 334-348.

[31] T. Satoh; New obstructions for the surjectivity of the Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group, Journal of the London Mathematical Society, (2) 74 (2006), 341-360.

[32] T. Satoh; Twisted second homology groups of the automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, 211 (2007), 547-565.

[33] T. Satoh; On the fourth Johnson homomorphism of the automorphism group of a free group, Journal of Algebra, 323 (2010), 3182-3201.

[34] T. Satoh; First cohomology groups of the automorphism group of a free group with coefficients in the abelianization of the IA-automorphism group, preprint.

[35] T. Satoh; On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, to appear.