数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 150-154

Isotype for blocks with non-abelian defect groups

久留米工業高等専門学校　楢崎 亮 (Ryo Narasaki)
Department of Liberal Arts (Science and Mathematics),
Kurume National College of Technology

1. はじめに

有限群の表現論において，群 G の表現と G の Sylow p-部分群 P の正規化群 $N_G(P)$ の表現の間の対応に関して，Broué 予想と呼ばれる，P が可換である場合の G と $N_G(P)$ の対応するブロックに含まれる指標や加群の間に深い関係があることを示唆する予想はよく知られている．ここではその中でも，Broué の perfect isometry 予想と呼ばれる，指標の対応についての予想に着目する．とくに，P が非可換な場合について，Broué の予想をふまえてどのようなことが考えられるのかを以下で述べる．

2. 有限群のブロック

まず始めに有限群のブロックと指標に関するいくつかの定義をまとめる．(詳しくは [5] を参照.) G を有限群，p を素数とする．$\mathcal{O}$ を完備離散付値環とし，K は $\mathcal{O}$ の商体で標数 0，k は $\mathcal{O}$ の剰余体で標数 p とする．

群環 $\mathcal{O}G$ において 1 は直交する中心的原始べき等元の和として

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

と表され、$B_i = \varepsilon_i(\mathcal{O}G)$ とおけば $\mathcal{O}G$ の $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}G)$-加群としての直既約分解

$$\mathcal{O}G = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_t \tag{1}$$

が得られる．このとき群 G に対し，式 (1) における各 B_i を G の (p-) **ブロック**とよび，その全体を $\mathrm{Bl}(G)$ と表す．また ε_i を B_i のブロックべき等元とよび，これを e_{B_i} と表す．

$B \in \mathrm{Bl}(G)$ とする．$\mathcal{O}G$-加群 V に対して $Ve_B = V$ が成り立つとき，V はブロック B に属するといい，$V \in B$ と書く．V が G の $\mathcal{O}$-表現 X の表現加群であるとき，V がブロック B に属するならば X あるいはその指標 χ_X は B に属するという．

群 G に対し、G の単位表現 1_G の属するブロックを G の主ブロックといい，$B_0(G)$ または単に B_0 とかく．G の通常既約指標の全体を $\mathrm{Irr}(G)$ と表し，$\mathrm{Irr}(B)$ でブロック B に属する G の既約指標の全体を表すとする．

部分群 $H \leq G$ に対して，$(\mathcal{O}G)^H := \{\, x \in \mathcal{O}G \mid h^{-1}xh = x\ (\forall h \in H)\,\}$ と定義する．また，$K \leq H \leq G$ に対して，トレース写像を次のように定義する．

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Tr}_K^H : & (\mathcal{O}G)^K & \longrightarrow & (\mathcal{O}G)^H \\ & x & \longmapsto & \sum_{h \in K\backslash H} h^{-1}xh \end{array}$$

このとき，$B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し，$B \in \mathrm{ImTr}_P^G$ となる最小の p-部分群 P が G-共役を除いてただ一つ存在し，この P をブロック B の**不足群**とよぶ。

$H \leq G$ とし，B' を H のブロックで，不足群が P であるものとする．もし，$C_G(P) \leq H \leq N_G(P)$ ならば，B' の *Brauer* **対応**と呼ばれる G のブロック B が canonical に存在し，$B = B'^G$ と書く．(ここで，$C_G(P)$ は P の中心化群，$N_G(P)$ は P の正規化群を表す．)

このとき，G の表現とその p-部分群 P の正規化群 $N_G(P)$ の表現との関係を示す，次の定理が存在する．

定理 1 (Brauer's first main theorem). G の p-部分群 P に対し，Brauer 対応は G のブロックで P を不足群に持つものから，$N_G(P)$ のブロックで P を不足群に持つものへの全単射を与える．

3. Broué の perfect isometry 予想

ここで，perfect isometry の定義と，Broué の perfect isometry 予想について述べる．(詳しくは [1] を参照．) G，H を有限群とし，$B \in \mathrm{Bl}(G)$，$B' \in \mathrm{Bl}(H)$ とする．

$G \times H$ の一般指標 μ が次を満たすならば，μ は *perfect* であるという．

(a) $\mu(g,h) \neq 0$ ならば，g と h の位数はともに p と素であるか，あるいは，ともに p の倍数である．

(b) $\mu(g,h)/|C_G(g)| \in \mathcal{O}$ かつ $\mu(g,h)/|C_H(h)| \in \mathcal{O}$.

$G \times H$ のブロック $B \times B'$ に属する一般指標 μ が与えられたとき，写像 $I : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B')$ を

$$I(\chi)(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \mu(g^{-1}, h)\chi(g)$$

によって定義することができる．ここで，$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$，$h \in H$ とする．

もし，μ が $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B)$ と $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B')$ 上の通常の内積に関する全単射な isometry を与えるとき，μ は B と B' の間の isometry を与えるという．さらに，μ が perfect であるとき，μ は B と B' の間の *perfect isometry* を与えるといい，B と B' は *perfect isometric* であるという．このとき，I を *perfect isometry* と呼ぶ．

さらに，Broué は，B と B' の共通の不足群に属する全ての p-元の，G と H における中心化群のブロック間の関係までこめた，perfect isometry の族といえるものを考えた．g を共通の不足群 P の元とし，$d_G^{(g)} : K\mathrm{Irr}(B) \to K\mathrm{IBr}(C_G(g))$ を一般分解定数とする．また，B_g と B'_g をそれぞれ B と B' に対応する $C_G(g)$ と $C_H(g)$ のブロックとする．

I を perfect isometry とする．もし，全ての $g \in_G P$ に対して，perfect isometry $I^{(g)} : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B_g) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B'_g)$ が B_g と B'_g の一般分解定数に対し，$d_H^{(g)} I = I_{p'}^{(g)} d_G^{(g)}$ となるような $I_{p'}^{(g)} : K\mathrm{IBr}(B_g) \to K\mathrm{IBr}(B'_g)$ を誘導するとき，B と B' は *isotypic* であるという．

これらの定義のもとで，Broué は次のような予想を提出した．

予想 2 (Broué's perfect isometry conjecture). B を G のブロックで不足群 P を持つものとし，B' を $N_G(P)$ のブロックで，B の Brauer 対応であるものとする．P が可換であるとき，B と B' は perfect isometric であり，isotypic である．

ここでは，予想 2 で不足群が可換であるという条件があることに注意しよう．不足群が非可換の場合，一般には perfect isometry は存在しないことが知られている．例えば鈴木群 $Sz(8)$ の主 2-ブロックという有名な例があげられる．

4. PERFECT ISOMETRY の拡張

上記の予想に関してはこれまでに様々な結果が報告されており，現在も研究が進められているが，ここではあえて予想の条件から外れた不足群 P が非可換な場合に着目し，G と $N_G(P)$ の対応するブロックの関係について何が言えるのかを考察していく．そのため，まず perfect isometry の"perfect"を少し弱めたような性質を新たに定義し，その条件を満たす isometry を考えてみる．その準備として，p-群に関係した不変量をいくつか定義する．

P を p-群とし，Q を P の正規部分群とする．$X(P;Q)$ と $V(P;Q)$ を以下のように定義する．

$$X(P;Q) = \{\ \theta \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(P) \mid \theta(g) = 0 \ \ \forall g \in P \setminus Q\ \}.$$

$$V(P;Q) = \{\ \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(Q)} a_\varphi \varphi \uparrow^P \ \mid a_\varphi \in \mathbb{Z}\ \}.$$

$X(P;Q)$ と $V(P;Q)$ はともに P の一般指標の全体 $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(P)$ の $\mathbb{Z}$-部分加群であり，$V(P;Q) \subseteq X(P;Q)$ となる．さらに次のことが知られている．

補題 3. $p^c X(P;Q) \subseteq V(P;Q)$ となる非負整数 c が存在する．

ここで，P と Q に対し，$c(P;Q)$ を次で定義する．

定義 4. P を p-群，Q をその正規部分群とする．$p^c X(P;Q) \subseteq V(P;Q)$ となる非負整数 c のうち，最小のものを $c(P;Q)$ と書く．

次に，共通の p-部分群 P を持つ二つの有限群 G と H の直積 $G \times H$ を考える．

$$\Delta(P) = \{(x,x) \mid x \in P\}\ \ \leq G \times H$$

とし，次の量を定義する．

定義 5. $(g,h) \in G \times H$ に対し，S_1 と S_2 をそれぞれ $C_G(g)$ と $C_H(h)$ の Sylow p-部分群とする．このとき，$s_Q(g,h)$ を以下で定義する．

$$p^{s_Q(g,h)} = \min\{|S_1 \times S_2 : (S_1 \times S_2) \cap ((Q \times Q)\Delta(P))^{(x,y)}| \mid (x,y) \in G \times H\}$$

注意 6. $s_Q(g,h)$ は S_1 と S_2 の取り方に依存せず，g，h をそれぞれ g の G-共役，h の H-共役でおきかえても同じ値となる．

これらを用いて perfect isometry の一般化を考える．3 章と同じく，G, H は有限群，μ は $G \times H$ の一般指標とする．このとき，μ の性質として次のようなものを定義しよう．

定義 7. μ が *Q-perfect* であるとは，全ての $g \in G$，$h \in H$ に対し次が成り立つことを言う．

(A) $\mu(g,h) \neq 0$ ならば，$(g_p, h_p^{-1}) \in_{G \times H} (Q \times Q)\Delta(P)$.

(B) $(g_p, h_p) \in_{G \times H} Q \times Q$ となる (g,h) に対し，$p^{c(P;Q)}\mu(g,h)/p^{s_Q(g,h)}$ は $\mathcal{O}$ の元．そうでない (g,h) に対し，$\mu(g,h)/p^{s_Q(g,h)}$ は $\mathcal{O}$ の元．

（ここで，g_p とは g の p-部分を表す.）

もし，μ が B と B' の間の isometry I を与え，さらに，μ が Q-perfect であるとき，μ は B と B' の間の *Q-perfect isometry* を与えるといい，B と B' は *Q-perfect isometric* であるという．このとき，I を *Q-perfect isometry* と呼ぶ．

さらに，B と B' の共通の不足群に属する p-元の，G と H における中心化群のブロック間の関係についても，以下の考察を加えよう．

g を共通の不足群 P の元とし，$d_G^{(g)}: K\mathrm{Irr}(B) \to K\mathrm{IBr}(C_G(g))$ を一般分解定数とする．また，B_g と B'_g をそれぞれ B と B' に対応する $C_G(g)$ と $C_H(g)$ のブロックとする．I を B と B' の間の Q-perfect isometry とする．もし，$g \notin_G Q$ である全ての $g \in_G P$ に対して，perfect isometry $I^{(g)} : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B_g) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B'_g)$ が B_g と B'_g の一般分解定数に対し，$d_H^{(g)} I = I_{p'}^{(g)} d_G^{(g)}$ となるような $I_{p'}^{(g)} : K\mathrm{IBr}(B_g) \to K\mathrm{IBr}(B'_g)$ を誘導するとき，B と B' は *Q-isotypic* であるという．

上記の2点に関する一般化と合わせて，非可換不足群 P を持つブロックについて様々な計算を行った結果，ここでは予想2を拡張した次のような予想が考えられる．

予想 8. B を G の p-ブロックで P をその不足群とし，B' を $N_G(P)$ の p-ブロックで，B の Brauer 対応であるものとする．さらに，$N_G(P)$ が P の中の fusion を control するとする．このとき，$Q \leq [P, P]$ を満たす適当な Q に対し，B と B' は Q-perfect isometric であり，Q-isotypic である．

ここで $[P, P]$ は P の交換子群であり，fusion を control するとは，P の部分群の G での共役の様子と，P の部分群の $N_G(P)$ での共役の様子が同じという意味である．このような状況にある場合，たとえ P が非可換でも，G と $N_G(P)$ にはなんらかの強い関係性があることが期待されるため，このような予想が考えられる．

注意 9. 予想8は G と $N_G(P)$ の間の予想だが，さらに拡張して二つの有限群 G と H の p-ブロック達で fusion system が同じであるものの間の Q-perfect isometry の存在についての予想も考えられる．(詳しくは [7] を参照.)

5. 拡張した予想についてのこれまでの結果

予想8について，予想の確認の方法として，散在型単純群 J_4 の主 11-ブロックについての例を紹介しよう．$G = J_4$ とし，$P \cong 11_+^{1+2}$ を Sylow 11-部分群，$Q = [P, P]$ とする．このとき，$H = N_G(P) \cong 11_+^{1+2} : (5 \times 2S_4)$ であり，G と H の主ブロックを $B = B_0(G)$，$B' = B_0(H)$ とおく．また G の 11-元の共役類は2つ存在し，その代表元を t と u，ただし，$t \in_G Q$，$u \notin_G Q$ であるものとすると，$C_G(u) \cong C_H(u) \cong 11 \times D_{22}$ となり，$C_G(u)$ と $C_H(u)$ の主ブロックを $B_u = B_0(C_G(u))$，$B'_u = B_0(C_H(u))$ とおく．

B と B' が Q-perfect isometric であることを確認するには，以下の図式において，I が Q-perfect isometry となるように I を構成できればよく，さらに，B と B' が Q-isotypic であることを確認するには，I が Q-perfect isometry，$I^{(u)}$ が perfect isometry であり，$I^{(u)}$ が B_u と B'_u の一般分解定数に対し，$d_H^{(u)} I = I_{p'}^{(u)} d_G^{(u)}$ となるような $I_{p'}^{(u)}$ を誘導するように，I と $I^{(u)}$ を構成できればよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B) \arrow[r, "I"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B') \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B_u) \arrow[r, "I^{(u)}"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B'_u) \arrow[d, dash] \\
K\mathrm{IBr}(B_u) \arrow[r, "I_{p'}^{(u)}"] & K\mathrm{IBr}(B'_u)
\end{tikzcd}$$

予想8に関して，以下は上記の例を含む結果である．

定理 10 ([6]). pを素数，Gを有限単純群とし，Bはそのp-ブロックで不足群Pがtrivial intersectionであるものとする．このとき予想8は成り立つ．

注意 11. (i) 証明は個々の群に関してQ-perfect isometryの存在を確認していき，また一部では群論計算プログラムGAP[8]，CHEVIE[3]を用いた．

(ii) 不足群が非可換の場合perfect isometryが存在しないことが知られている$Sz(8)$の主2-ブロックという例はこの定理に含まれ，$[P, P]$-perfect isometryの存在が確認できている．

また，次の場合にも予想8は成り立つ．

定理 12 (Narasaki, Uno [7]). pを素数，Bは主p-ブロックで不足群$P = p_+^{1+2}$（位数p^3，べき数pのextra special p-群）とする．このとき予想8は成り立つ．

この結果では，注意9にあるように，二つの有限群GとHのp-ブロック達でfusion systemが同じであるものの間の関係まで拡張した予想についても，上記の場合に成り立つことを確認している．

最後に，今後は予想8に関して，control blockと呼ばれるブロックを持つ有限群について，または，上記の結果以外の不足群を持つブロックについて，予想の確認を進めていきたい．

また，perfect isometryの一般化としては，他にもいくつかの方法が提案されており，(例えば[2]，[4]を参照）これらのisometryとQ-perfect isometryとの関連を検討しながら，非可換不足群を持つブロックについてさらに考察を深めてくことも，重要な検討課題である．

References

[1] M. Broué, Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées, Représentations Linéaires des Groupes Finis, Luminy, 1988, *Astérisque* **181-182** (1990), 61-92.

[2] C. W. Eaton, Perfect generalized characters inducing the Alperin-McKay conjecture, *J. Algebra* **320** (2008), 2301-2327.

[3] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle and G.Pfeiffer, CHEVIE—Generic Character Table of Finite Groups of Lie Type, Hecke Algebras and Weyl Groups, *IWR-preprint*, Heidelberg, 1993.

[4] J-B. Gramain, Generalized perfect isometries in some groups of Lie rank one, *J. Algebra* **299** (2006), 820-840.

[5] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York (1987).

[6] R. Narasaki, Isometries for blocks with T.I. Sylow defect groups, under review.

[7] R. Narasaki and K. Uno, Isometries and extra special Sylow groups of order p^3, Journal of Algebra **322** (2009), 2027-2068.

[8] Martin Schönert et al., *GAP - Groups, Algorithms, and Programming*, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, third ed., 1993.