数理解析研究所講究録
第 1785 巻 2012 年 20-27

近似代数による画像処理の実践

讃岐 勝

MASARU SANUKI

筑波大学医学医療系 & 筑波大学附属病院総合臨床教育センター

FACULTY OF MEDICINE, UNIVERSITY OF TSUKUBA,
&
CENTER FOR MEDICAL EDUCATION AND TRAINING, TSUKUBA UNIVERSITY HOSPITAL *

Abstract

本稿では数式処理を用いた画像補正の問題点を数式処理の計算という立場から紹介する．また，画像処理で必要される入力多項式が巨大次数の近似 GCD 計算法について考察を行う．

1 はじめに

任意の画像は $\mathbb{D}=\{0,1,\ldots,2^{p}-1\}$ の数値要素の行列で表現される (通常，$p=8$)；モノクロ画像は 1 つの行列，カラー画像は赤，緑，青からなる 3 つの行列からそれぞれ構成される．

メディアなどで，画像補正や手ブレ補正などの画像を修正する技術・方法について耳にする．両者は同じように扱われることが多いが本稿では両者を次のように区別する．

- 手ブレ補正：カメラなどのレンズを通して画像および映像のブレを補正する．この場合，被写体までの距離およびレンズによる情報など 2 次情報が含まれる．

- 画像補正：画像だけが与えられ 2 次条件はない．そのため，補正されたデータに正解はない（一意性はない）．

手ブレ補正は現在も理論的および技術的な点からも研究されており，画像補正は手ブレ補正の応用として扱われることも少なくない．まずは手ブレ補正がどのように行われているか解説する．

補正される対象の画像 (blurred image) を $B_i \in \mathbb{D}$，真の画像 (Image) を I とするとき，次のような核 K を探す．ここで，$\otimes$ は 1 つの操作を表す．

$$B=K\otimes I \tag{1}$$

手ブレ補正の場合，2 次情報から K は既知であるため真の画像 I は次のような方法で求められる．ここで，既知の情報として，被写体までの距離，レンズの情報，光源などがある．

1. 擬似の核 $\tilde{K}$ を用いた反復法によって復元；

$$B^{(0)}=B, B^{(1)}=\tilde{K}B^{(0)},\ldots,B^{(i)}=\tilde{K}B^{(i-1)},\ldots,B^{(q)}=B^{(q-1)}.$$

このとき，$B^{(q)}$ を返す．

---

*sanuki@md.tsukuba.ac.jp

2. Fourier 変換 $\mathcal{F}$ によって，式 (1) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(B) &= \mathcal{F}(K)\mathcal{F}(I) \\ \mathcal{F}(I) &= \mathcal{F}(B)/\mathcal{F}(K) \\ I &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(B)/\mathcal{F}(K)\Big). \end{aligned}$$

以上より，I が復元できる．

いずれにしても核 K を基にした方法であり，画像復元についても擬似的な核 $\tilde{K}$ を作成した方法が取られることが多く，多くはベイズ推定に基づく方法や反復法による方法などが選択されている [CE97].

近年，近似 GCD(数式処理) の光学的応用として画像補正が注目されている．数式処理による画像補正は 1997 年の Liang-Pillai[LP97] による研究が最初であり，近年に至るまでそれほど大きな進歩はなかったため画像補正の分野ではあまり注目されてこなかった．実際，画像処理の分野で見る論文のほとんどは Liang と Pillai によるものだけである (2012 年 1 月現在)．注目されない理由として次が挙げられる．

1. 数式処理（近似 GCD）を用いた方法が効率の面で有効でないと認識されている．参考論文としてあげられている方法は，互除法 [ONS91]，補間法 [CGTW95]，EZ-GCD 法 [ZN00]，特異値分解に基づく方法 [ZD04, GKMYZ04] である．これらの方法が効率および精度の面で有効でないことは [ZN00, Sanuki05] で指摘しており，画像処理の分野でも同様の指摘がされている．またこれ以降，算法が改良されていることはあまり知られていない．

2. コンピュータの進歩により，反復法やベイズ統計による方法がそれほど遅くなくなった．

3. 画像サイズがそのまま行列サイズおよび多項式のサイズとなるので (次章で説明)，画像処理の分野では大きなサイズでの計算法の確立が必要となる．

浮動小数係数の多変数多項式の近似 GCD 計算において，入力多項式の次数が高い場合，補間法は有効な計算法である．ただ近似 GCD 計算においては不安定になることがある [ZN00]．入力多項式の次数が低い場合には，互除法を改良した PC-PRS 法でも十分であるが次数が次数が大きくなると，リフティング法に基づく方法か補間法以外に効率を保ちながら計算することは難しい．Li *et al.* は補間法において，精度良く計算する方法を提案している [LYZ10]．Euclid 構成を改良した場合には 300 次くらいまで計算できることを確認しているが，高次数では補間法に負けてしまう [讃岐 11].

本稿では，数式処理を利用する方法を紹介し，現時点で一番高速である Li *et al.* の方法 [LYZ10] と他のリフティングを用いた方法について比較を行う．

1.1 記号

数体 $\mathbb{K}$ を係数とする多変数多項式環 $\mathbb{K}[x,y]$ において，x を主変数，y を従変数として扱うことにする ($\mathbb{K}[y]$ を係数とする x の多項式と考える)．$F(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ の変数 x および y に関する次数を $\deg_x(F)$ および $\deg_y(F)$ で表す．$F(x,y)$ の主係数を $\mathrm{lc}(F)$ で表す．多項式 $F(x,y)$ を従変数 y の次数ごとに分けた項の和として，次のように表す．$F(x,y) = F^{(0)}(x) + \delta F^{(1)}(x,y) + \cdots + \delta F^{(k)}(x,y) + \cdots$．ここで，$\delta F^{(k)}(x,y)$ は全次数 k の項の和である．また，全次数 k_1 から k_2 までの項の和を $[F]_{k_1}^{k_2} = \delta F^{(k_1)} + \cdots + \delta F^{(k_2)}$ で表す．

1.2 画像補正と数式処理の関係

画像から与えられる行列は次の変換によって多項式に変換される．

定義 1 (行列の z-変換 **[LB87]**)
行列 $M \in \mathbb{K}^{m\times n}$ の z-変換とは次の多項式への変換である．

$$M \mapsto p(x,y) = \boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}[x,y]. \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (1,x,\ldots,x^{m-1})^T$ および $\boldsymbol{y} = (1,y,\ldots,y^{n-1})^T$ である． ∎

この変換によって画像を数式に変換できる．変換には次の対応が存在する．

命題 2 (**[LB87, LP97]**)
画像 B に対応する行列 M_B が次のように書けたとする．ただし，M_C, M_I, M_N はそれぞれある作用，求めたい画像（真の画像），ノイズを表す．

$$M_B = M_C M_I + M_N \tag{3}$$

このとき z-変換を行うとき，上の関係性は保存される；

$$p_B(x,y) = p_C(x,y)p_M(x,y) + p_n(x,y). \tag{4}$$

ただし，$p_B(x,y), p_C(x,y), p_M(x,y), p_n(x,y)$ はそれぞれ M_B, M_C, M_I, M_N を z-変換した多項式である． ∎

この命題を用いて，画像補正を行うことが可能である．

命題 3 (**GCD を利用した画像補正法**)

1. 1つのカラー画像を補正する場合
   3本の多項式が構成でき，同様のズレが生じており，そのズレは近似 GCD として検出される．
2. 複数の画像を基に補正する場合
   同様の正しい画像がずれているので，近似 GCD として正しい画像が検出される． ∎

故に，入力によって近似 GCD が表すものは異なる．近似 GCD の次数について，

1. 1つ目の場合，近似 GCD の次数は低い．
2. 2つ目の場合，近似 GCD の次数は入力多項式に近い．

そのため，近似 GCD を求める方法として2つ考える必要がある．Li *et al.* はそれぞれについて算法を考慮しているが [LYZ10]，本稿では1つ目の場合のみ考えることにする．

$(m\times n)$pixel の画像が与えられたとする．この画像は $(m\times n)$ 行列であり，z-変換によって $m-1$ 次，$n-1$ 次の2変数多項式に変換される．通常，数百から数千 pixel の画像が与えられるので多項式の次数も同等の大きさを持つが，近似 GCD の次数は高々10次くらいである．摂動に関しては，ノイズ部分にあたる行列の大きさが 1,2 程度なので，近似 GCD の許容道は必然と $O(1/255) = O(10^{-4})$ 程度となる．通常，SNR(signal-to-noise ratio) という特異値から算出される値をノイズの大きさとして利用するが，これは $O(10^{-4})$ 程度であり，近似 GCD を用いて考える摂動とほぼ同等の大きさである．

2 2変数GCD計算法

2.1 補間法

2.1.1 画像処理の分野で知られた方法

よく知られた補間法である．Li *et al.* の方法と比較するため簡単に方法に解説するが，効率が非常に悪い．

与えられた多項式に関して，まず近似 GCD の次数を決定する；x に関する次数 k_x，y に関する次数 k_y．このとき，GCD の係数 $c_{i,j}$ を求める $(0 \le i \le k_x, 0 \le j \le k_y)$ のため，$R = (k_x+1)(k_y+1)$ 個のサンプルポイント (s_x, s_y) を入力多項式に代入する．それに対して線形方程式を作成し，GCD を補間によって求める．

2.1.2 Li らによる改良

Li *et al.* による方法は，入力多項式に入力するのではなく $y = s_y$ を代入した 1 変数多項式の近似 GCD を計算し，得られた近似 GCD に対して $x = s_x$ を代入する．その後，補間を行うのである．この操作によって線形方程式を得るが，補間点を $s_x = \zeta = e^{2\pi i/k_x}, s_y = \xi = e^{2\pi i/k_y}$ と置くと，線形方程式は FFT を用いた逆 Fourier 変換によって，高速に解くことが可能となる．

2.2 ベズー構成

ベズー構成とは，Barnett の方法に基づきベズー行列を利用して GCD を求める計算法である．Barnett 自信は，ベズー行列を用いておらず，Diaz-Tica と G.-Vega によりベズー行列の場合について同型な関係式が導かれている．

1 変数多項式 $f(x), g(x)$ について，多項式 $\dfrac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y} \in \mathbb{K}[x,y]$ の $x^i y^j$ の係数 $b_{i,j}$ を要素とするベズー行列 $\mathrm{Bez} = (b_{i,j})_{0 \le i,j \le m-1}$ について，各列を $\boldsymbol{b}_i = (b_{i,0}, b_{i.1}, \ldots, b_{i,m-1})^T$ で表す；

$$\mathrm{Bez} = (\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{m-1}).$$

このとき，次が成立する．

定理 4 (Barnett の方法 [Barnett70, Barnett71, DG02])
与えられた多項式 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ の GCD の次数を k とする．このとき，

1. 後ろ $(m-k)$ 列は一次独立である．
2. 始めの k 列はそれぞれ後ろ $(m-k)$ 列の $\mathbb{K}$-線形結合で表すことが可能である $(i = 0, \ldots, k-1)$.

$$\boldsymbol{b}_i = c_1^{(i)} \boldsymbol{b}_k + \sum_{j=2}^{m-k} c_j^{(i)} \boldsymbol{b}_{k+j-1} \tag{5}$$

このとき，係数 $c_1^{(i)}$ は GCD の x^i 次の係数となる；$\gcd(f,g) = x^k + c_1^{k-1} x^{k-1} + \cdots + c_1^{(0)}$. ∎

実際に GCD の係数は次の手順で計算される．まず，後ろの $(m-k)$ 行-$(m-k)$ 列からなる Henkel 行列を B とするとき正則であり，$\boldsymbol{c}_i = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots, c_{m-k}^{(i)})^T$ は次の線形方程式の解となる．

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i \ (i = 0, \ldots, k-1).$$

構造行列の Displacement を利用することにより，B の部分軸選択 LU 法を $O(m^2)$ の計算量で行うことができる．i を動かしても B の LU 分解は 1 度だけ実行すればよく，行列とベクトルの積を $2i$ 回実行することにより GCD を計算することができる [BB07].

この方法は多変数多項式に拡張することが可能であり，その計算法をベズー構成と呼ぶ [Sanuki09].

多変数多項式 $F(x,y), G(x,y)$ について，多項式 $\dfrac{F(x_1,y)G(x_2,y)-F(x_2,y)G(x_1,y)}{x_1-x_2} \in \mathbb{K}[x_1,x_2,y]$ の ${x_1}^i{x_2}^j$ の係数 $b_{i,j}(y)$ からなるベズー行列 $B=(b_{i,j}(y))_{0\le i,j\le m-1} \in \mathbb{K}[y]^{m\times m}$ を構成する．このとき，定理 4 が同様に成り立つ．ただし，$c_1^{(i)}$ および $c_j^{(i)}$ は多項式ではなく有理式となる．このため，次のように打ち切りべき級数環上で計算することによって計算の効率化を行う．今，説明のためベズー行列およびベクトルを全次数ごとに表す.

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{b}_i^{(k)} &= (\delta b_{i,0}^{(k)}, \delta b_{i,0}^{(k)}, \dots, \delta b_{i,m-1}^{(k)})^T, \\
\boldsymbol{b}_i &= \boldsymbol{b}_i^{(0)} + \delta \boldsymbol{b}_i^{(1)} + \dots + \delta \boldsymbol{b}_i^{(k)} + \cdots, \\
\delta B^{(k)} &= (\delta b_{i,j}^{(k)})_{k\le i,j\le m-1} \in \mathbb{K}[y]^{(m-k)\times(m-k)}, \\
B &= B^{(0)} + \delta B^{(1)} + \dots + \delta B^{(k)} + \cdots .
\end{aligned}
$$

アルゴリズム 1 (ベズー構成 **[Sanuki09]**)

1. 展開点 $s \in \mathbb{K}$ からなるイデアル $I=\langle y-s\rangle$ を決め，入力多項式をモニックな多項式に変換する.

$$F \to F/\mathrm{lc}(F), G \to G/\mathrm{lc}(G) \pmod{I^{k_y+1}}.$$

2. $f(x) \equiv F(x,y), g(x) \equiv G(x,y) \pmod{I}$ の GCD を Barnett の方法に基づき計算をする.

$$B^{(0)} c_i^{(0)} = \boldsymbol{b}_i^{(0)}.$$

すなわち，行列 $B^{(0)}$ は LU 分解されている；$B^{(0)}=PLU$.

3. $k=1,\dots,k_y$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_i^{(k)} &\equiv B\boldsymbol{c}_i^{(k)} \pmod{I^{k+1}} \\
\delta \boldsymbol{b}_i^{(k)} &= B^{(0)}\boldsymbol{c}_i^{(k)} + \delta B^{(1)}\boldsymbol{c}_i^{(k-1)} + \dots + \delta B^{(k)}\delta \boldsymbol{c}_i^{(0)}.
\end{aligned}
$$

が成立するので，

$$\delta \boldsymbol{c}_i^{(k)} = (B^{(0)})^{-1}\Big(\delta \boldsymbol{b}_i^{(k)} - \delta B^{(1)}\delta \boldsymbol{c}_i^{(k-1)} - \dots - \delta B^{(k)}\boldsymbol{c}_i^{(0)}\Big). \tag{6}$$

すべての i について行うことにより，モニックな GCD の候補 $\tilde{C}$ を得る.

4. GCD の主係数を $c_k = \gcd(\mathrm{lc}(F), \mathrm{lc}(G))$ によって計算を行い，$c_k \times \tilde{C} \pmod{I^{k_y+1}}$ を解として返す.

2.3 計算量の比較

Li *et al.* による補間法とベズー構成の理論計算量を比較する．いずれも 1 変数 GCD の計算には Barnett の方法を利用して，計算量は等しい．そのため，計算量の比較は補間するのとリフティング法の計算量について 1 つの尺度を与えることになる.

補間法の計算量は $O(m^4)$ であることが示されている [LYZ10].

2.3.1 ベズー構成の計算量

式 (6) より，$\delta c_i^{(k)}$ を構成するためには，$\delta B^{(k-j)}\delta \boldsymbol{c}_i^{(j)}$ $(j=0,\dots,k-1)$ を計算した後に，$(B^{(0)})^{-1}$ をかける必要がある（実際には PLU を操作する）．したがって，$\delta c_i^{(k)}$ を構成するために必要とする計算量は

$$kO(m^2)+O(m^2)$$

である．GCD を計算するためには $i=0,\dots,k_x$，$k=1,\dots,k_y$ について同様の操作を行う必要があるので，全体の計算量は次のようになる．

$$k_x \times \Big(\sum_{k=1}^{k_y}(k+1)O(m^2)\Big) = k_x\Big(\frac{k_y(k_y+1)}{2}+k_y\Big)O(m^2). \tag{7}$$

$k_x, k_y \ll m$ なので，計算量は $O(m^4)$ より十分に小さい．故に計算量のみで比較すると，ベズー構成の方が圧倒的に効率的である．また数値計算を基にした算法であるため，精度良く計算することも可能である [Sanuki09].

3 画像と多項式の考察

近似 GCD を計算するすべての算法に共通する問題あるが，精度は入力多項式が両条件であるか悪条件であるかに依存する．悪条件を以下に列挙する．

- 互除法および PC-PRS 法：GCD の主係数が微小 (微小主係数問題) [SS07]
- Barnett の方法およびベズー構成：微小主係数問題 [Sanuki09]．全体の桁落ち量は互除法と同じであるが，落ちるメカニズムは異なり，特定の計算において精度をあげることに対応可能である．
- EZ-GCD 法：共通根問題 [ZN00]

3 つ目を除き，主係数が小さい場合精度が出ない．主係数が小さいというのは，画像の隅が黒い（濃い）場合に対応する．端を白くした場合（色を強くした場合），多項式として性質を保つのか興味深いところである．

3.1 色の反転

次の操作を反転と呼ぶ．

定義 5 (反転)
画像 $M=(m_{i,j})\in\mathbb{D}^{m\times n}$ が与えられたとき，$\tilde{M}=(255-m_{i,j})\in\mathbb{D}^{m\times n}$ を M の反転された画像と呼ぶ． ∎

このとき，すぐに次がわかる．

補題 6
もとの画像の z-変換から得られる多項式群と反転された画像の z-変換から得られる多項式群の近似 GCD は異なる． ∎

故に，反転は画像処理において有効ではない．

4 まとめ

巨大次数の多変数多項式の近似 GCD 計算法を考える上で画像処理という分野を持ち出し，現状ともに計算量について考察を行った．算法について次数が高くても、許容度 $O(10^{-3}) \sim O(10^{-4})$ で近似 GCD を計算できる必要がある．1 変数の場合これはほとんど達成されつつあるが，多変数多項式の場合にはリフティング法や補間法など 1 変数 GCD を基にした方法以外には難しいことは [SS07] によりすでに実証済みである．[LYZ10, 讃岐 11] は入力多項式が高次の場合についても有効であるが速度の面で不満が残る．その点，ベズー構成は精度・効率の面で有効であることがわかる．それゆえ算法の開発をする上で，リフティング法は有効であることが期待される．

参考文献

[Barnett70] S. Barnett. *Greatest common divisor of two polynomials.* Linear Algebra Appl., **3**, 1970, 7–9.

[Barnett71] S. Barnett. *Greatest common divisor of several polynomials.* Proc. Camb. Phil. Soc., **70**, 1971, 263–268.

[BB07] D. Bini and P. Boito. *Structured matrix-based methods for polynomial ϵ-gcd: analysis and comparisons. Proc. of ISSAC'07*, ACM Press, 2007, 9–16.

[CE97] P. Campisi and K. Egiazarian. *Blind Image Deconvolution: Theory and Applications.* CRC Press, 1997.

[CGTW95] R. Corless, P. Gianni, B. Trager and S. Watt. The singular value decomposition for polynomial systems. *Proc. of ISSAC'95*, ACM Press, 1995, 195–207.

[DG02] G. M. Diaz-Toca and L. Gonzalez-Vega. *Barnett's theorems about the greatest common divisor of several univariate polynomials though Bezout-like matrices. J. Symb. Compu.*, **34**, (2002), 59–81.

[GKMYZ04] S. Gao, E. Kaltofen, J. P. May, Z. Yang and L. Zhi. *Approximate factorization of multivariate polynomials via differential equations.* Proc. of ISSAC'04, ACM, 2004, 167–174.

[LB87] R. B. Lane and R. T. Bates. Automatic multidimensional deconolution. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4(1)**, 1987, 180–188.

[LYZ10] Z. Li, Z. Yang, and L. Zhi. Blind image deconvolution via fast approximate GCD *Proc. of ISSAC'10*, ACM Press, 2010, 155–162.

[LP97] B. Liang and S. U. Pillai. Two-dimensional blind deconvolution using a robust GCD approach. *Proc. International Conf. On Image Proces.*, 1997, 424–427.

[ONS91] M. Ochi, M-T. Noda and T. Sasaki. *Approximate greatest common divisor of multivariate polynomials and its application to ill-conditioned systems of algebraic equations.* J. Inform. Proces., **14** (1991), 292–300.

[Sanuki05] M. Sanuki. *Computing approximate GCD of multivariate polynomials (Extended abstract)*, International Workshop on Symbolic-Numeric Computation 2005 (SNC 2005). D. Wang & L. Zhi (Eds.), 2005, 308–314; full paper appear in Symbolic-Numeric Computation (Trends in Mathematics), D. Wang & L. Zhi (Eds.), Birkhäuser Verlag, 2007, 55–68.

[Sanuki09] M. Sanuki. *Computing multivariate approximate GCD based on Barnett's theorem*, Proc. of Symbolic-Numeric Computation 2009 (SNC 2009), H. Sekigawa & H. Kai (Eds.), 2009, 149-157, Kyoto, Japan, 3-5 August 2009.

[Sanuki11] M. Sanuki. Computing multivariate approximate GCD based on Barnett's theorem. *Proc. of SNC'09*, ACM Press, 2009, 149–157.

[讃岐 11] 讃岐 勝. 巨大次数の多変数多項式 *GCD* 計算の試み. 第 20 回 日本数式処理学会大会, 神戸大学, 2011

[SIPI] SIPI Image Database: `http://sipi.usc.edu/database/`

[SS07] M. Sanuki and T. Sasaki. *Computing approximate GCDs in ill-conditioned cases.* Proc. of Symbolic-Numeric Computation 2007 (SNC 2007), J. Verschelde & S. M. Watt (Eds.), 2007, 170–179, London, Ontario, Canada, 25-27 July, 2007.

[ZD04] Z. Zeng and B. H. Dayton. *The Approximate GCD of inexact polynomials part II: a multivariate algorithm.* Proc. of ISSAC'04, ACM, 2004, 320–327.

[ZN00] L. Zhi and M-T. Noda. *Approximate GCD of multivariate polynomials.* Proc. of ASCM2000, World Scientific, 2000, 9–18.