数理解析研究所講究録
第 1785 巻 2012 年 28-31

H_{∞} ノルムを用いた制御系設計について

北本　卓也

TAKUYA KITAMOTO

山口大学

YAMAGUCHI UNIVERSITY

Abstract

本論文では、H_{∞} ノルムを用いた制御系設計について議論する。これはシステムの H_{∞} ノルムを与えられた数 γ 以下に抑えた制御系を設計する方法であるが、こうすることで最悪の場合の状態を良くする制御系、すなわちモデル誤差に強い実用的な制御系（ロバスト制御）を構成できると言われている。本論文では、H_{∞} ノルムの拡張とそれを計算するアルゴリズムを提案する。提案する方法は、パラメータを含むシステムに対しても適用できる。

1　はじめに

制御工学では、H_{∞} ノルムを用いた制御系設計が盛んに研究されており、パラメータを含んだシステムに対し、この H_{∞} ノルムを計算する研究もある（[1],[2],[3])。その一方で、H_{∞} ノルムを拡張しようとする試みもいくつか行われている。本論文では、参照文献 [4] の内容を更に拡張する形での H_{∞} ノルムの拡張と、それを計算するアルゴリズムを提案する。提案する方法は、パラメータを含むシステムに対しても適用できる。

2　H_{∞} ノルム

2.1　定義

下記の微分方程式で定義されるシステムが与えられたとする（ただし、A, B, C はそれぞれ $n\times n, n\times m, l\times n$ の定数行列とし、システムは安定、すなわち A の固有値の実部は全て負であるとする)。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\quad y = Cx \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m) \tag{1}$$

このとき、このシステムの H_{∞} ノルム $\|G(s)\|_{\infty}$ を下記のように定義する (ただし、$\bar{\sigma}(M)$ は行列 M の最大特異値を表す)。

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega\in\mathbf{R}} \bar{\sigma}\left(G(i\omega)\right), \qquad G(s) = C(sI \quad A)^{-1}B \tag{2}$$

*kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

2.2 計算法

制御工学では、次の定理を用いて二部法で H_∞ ノルムを計算する。

補題 1
$\gamma\ (> 0)$ を与えられた実数とする時、$\|G(s)\|_\infty < \gamma$ の必要十分条件は次で定義される H が虚軸上に固有値を持たないことである。

$$H = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\gamma^2} B B \\ C\ C & A \end{bmatrix} \tag{3}$$

実は

$$\lambda \text{ が上の行列 } H \text{ の固有値であれば、 } \lambda \text{ も } H \text{ の固有値である} \tag{4}$$

を示すことができる。今、H の γ を連続的に動かす事を考えると、固有値は連続的に動くが、(4) を考慮すると γ が $\|G(s)\|_\infty$ と一致する時、H は重複固有値を持つことがわかる。すなわち、

$$\|G(s)\|_\infty \in \{\ \gamma \mid H \text{ が重複固有値を持つ}\ \} \tag{5}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} H \text{ が重複固有値を持つ} \quad &\Leftrightarrow \quad h(x)\ (= \mathrm{Det}(xE \quad H)) \text{ が重根を持つ} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Res}_x \left(h(x), \frac{dh}{dx}(x) \right) = 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\|G(s)\|_\infty \in \{\ \gamma \mid w(1/\gamma^2) = 0 \}, \quad \text{ただし、} w(1/\gamma^2) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Res}_x \left(h(x), \frac{dh}{dx}(x) \right) \tag{6}$$

となる。よって $q = 1/\gamma^2$ と置くと

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{\ q \mid w(q) = 0\ \} \tag{7}$$

となるので、$f(q)$ を $w(q)$ の無平方部分とすると

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{\ q \mid f(q) = 0\ \} \tag{8}$$

となる。すなわち、$1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を $f(q)$ の実根で表すことができる。

以上より、A, B, C を入力とし、$1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を実根に持つ多項式 $f(q)$ を求める次のアルゴリズムを得る。

Algorithm 1
入力： $n \times n$ 行列 A, $n \times m$ 行列 B, $l \times n$ 行列 C
出力： $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を実根に持つ多項式 $f(q)$

⟨1⟩ 行列 H を次のように置く。

$$H = \begin{bmatrix} A & qB\ B \\ C\ C & A \end{bmatrix}$$

⟨2⟩ H の特性多項式 $h(x)$ を計算する。

⟨3⟩ $w(q) = \mathrm{Res}_x\,(h(x), h'(x))$ と置く。

⟨4⟩ $w(q)$ の無平方部分を $f(q)$ と置く。

3 H_∞ ノルムの拡張

3.1 問題設定

次の問題を考える。

$n \times n,\ n \times m, (n+m) \times (n+m)$ 行列 A, B, Θ （ただし、Θ はエルミート行列）と２変数多項式 $F(x,y)$ が与えられたとき、下記の条件を満たす q の上限 $\sup q$ を求めよ。

$$\forall\lambda \in \{x+iy \mid F(x,y)=0\,\}, \quad N\ \ (\lambda)\Theta N(\lambda) \geq 0 \tag{9}$$

ただし、$N(\lambda)$ は次のように定義される。

$$N(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} (\lambda I \quad A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \tag{10}$$

上の問題は H_∞ ノルムの拡張と考えることができる。というのは、

$$\Theta = \begin{bmatrix} qC\ C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad F(x,y) = x \tag{11}$$

とすると

$$\|G(s)\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{q}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\lambda \in \{x+iy \mid F(x,y)=0\,\},\ \ N\ \ (\lambda)\Theta N(\lambda) \geq 0$$

となり、上式は $\sup q = 1/\left(\|G(s)\|_\infty\right)^2$ を意味する。

この問題は、H_∞ ノルムを２つの点で拡張している。１つは多項式 $F(x,y)$ が指定する s (新しい問題設定では λ) の動く範囲である。H_∞ ノルムでは s (または λ) は虚軸上のみを動くが、新しい問題設定では多項式 $F(x,y)=0$ で指定された自由な範囲を動くことができる。もう１つの拡張は、$N\ \ (\lambda)\Theta N(\lambda) \geq 0$ の条件である。H_∞ ノルムでは最大特異値を大きさを測っているが、新しい問題では、Θ の撮り方によって最大特異値のみならず、様々な量を計測することが可能である。

3.2 計算法

$\tilde{q} = \sup(q)$ とすると、条件 $N\ \ (\lambda)\Theta N(\lambda) \geq 0$ より、$q=\tilde{q}$ では $N\ \ (\lambda)\Theta N(\lambda)$ は固有値 0 を持つ。よって $\mathrm{Det}(N\ \ (\lambda)\Theta N(\lambda))|_{q=\tilde{q}} = 0$ となり、上の問題は

$$\mathrm{Det}\,(N\ \ (x+iy)\Theta N(x+iy)) = 0 \text{ を満たす } q \text{ を拘束条件 } F(x,y)=0 \text{ のもとで最大化する} \tag{12}$$

と同値になる。これをラグランジュの乗数法を用いて解く。$q + \lambda F(x,y) = 0$ を x, y, λ で偏微分すると、

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F(x,y) = 0 \tag{13}$$

を得るので、これより λ を消去して

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad F(x,y) = 0 \tag{14}$$

を得る。ここで $R(x,y,q)$ を $\mathrm{Det}\,(N\ (x+iy)\Theta N(x+iy))$ の分子と置くと、$R(x,y,q)$ は x,y,q の多項式なので、$R(x,y,q)=0$ の両辺を x,y で偏微分することにより、$\frac{\partial q}{\partial x},\frac{\partial q}{\partial y}$ を x,y,q の有理式の形で計算できる。こうして得られた $\frac{\partial q}{\partial x},\frac{\partial q}{\partial y}$ を

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x},\quad F(x,y)=0,\quad R(x,y,q)=0 \tag{15}$$

に代入し、これから x,y を消去すると、q の多項式 $U(q)$ が得られる。$\tilde{q}=\sup(q)$ を満たす $\tilde{q}$ は $U(q)$ の q に関する実根である。

これより、$A,B,\Theta,F(x,y)$ を入力とし、$\sup(q)$ を実根に持つ多項式 $U(q)$ を求める次のアルゴリズムを得る。

Algorithm 2
入力： $n\times n$ 行列 A, $n\times m$ 行列 B, $(n+m)\times(n+m)$ 行列 Θ, 2変数多項式 $F(x,y)$
出力： $\sup(q)$ を実根に持つ多項式 $U(q)$

⟨1⟩ $R(x,y,q)$ を $\mathrm{Det}\,(N\ (x+iy)\Theta N(x+iy))$ の分子と置く。

⟨2⟩ $R(x,y,q)$ を x,y で偏微分することにより、$\frac{\partial q}{\partial x},\frac{\partial q}{\partial y}$ を x,y,q の有理式の形で求める。

⟨3⟩ (15) より、x,y を消去し、q の多項式 $U(q)$ を計算する。

上記の **Algorithm 2** において、(11) と置くと **Algorithm 1** と同じ計算結果が得られるので、**Algorithm 2** は **Algorithm 1** の拡張であると言える。

4 最後に

本論文では、H_∞ ノルムの拡張し、より一般的な問題を提示した。また、ラグランジェの乗数法を用い、その問題の答えを計算するアルゴリズムを示した。本論文で示したアルゴリズムは、H_∞ ノルムを計算するアルゴリズムの拡張になっており、問題の設定を H_∞ ノルムを計算するアルゴリズムに合わせれば、計算結果は完全に一致する。今後は実際の制御系設計への応用と、計算効率の向上が目標である。

参 考 文 献

[1] T. Kitamoto : "On the computation of H_∞ norm of a system with a parameter," *The IEICE Trans. Funda. (Japanese Edition)*, **J89-A**(1), 2006, pp. 25–39.

[2] T. Kitamoto and T. Yamaguchi : "Parametric Computation of H_∞ Norm of a System," *Proc. SICE-ICCAS2006*, Busan, Korea, 2006.

[3] M. Kanno and M. C. Smith : "Validated numerical computation of the $\mathcal{L}_\infty$-norm for linear dynamical systems," *J. of Symbolic Computation*, **41**(6), pp. 697–707, 2006.

[4] T. Kitamoto : "Extension of the algorithm to compute H ∞ norm of a parametric system," *The IEICE Trans. Funda.*, **E90-A**(11), 2007, pp. 2496–2509.

[5] K. Zhou, J. Doyle and K. Glover : "Robust and Optimal Control," *Prentice-Hall. Inc*, New Jersey, 1996.