

田中由真著『算学紛解』の消去理論

小松彦三郎 (東京大学・数理科学研究科)

江戸期数学の最初で最大の成果は、連立代数方程式の解法を確立したことである [0]。最終的には、関孝和の「解伏題之法」[1] (1683)、関-建部兄弟の「大成算經」卷之十七「全題解」[2] (1700 頃)、田中由真の「算学紛解」[3] (1690 頃)、井関知辰の「算法発揮」[4] (1690) により、行列式で表わされる終結式を用いた消去の一般理論として結実したのであるが、どの部分が誰の成果であるかは必ずしも明らかにされていない。この時期は日本の文化の中心が上方から江戸に移る移行期であり、上方の数学者たちは後継者に恵まれず詳しい事情がわからなくなってしまったことに原因がある。その中で一番まとまって伝えられてきた「算学紛解」を手がかりに、見当をつけてみたい。

当時の数学界の課題は沢口一之の「古今算法記」(1670) の遺題 15 問を解くことであった。関は「発微算法」[5] (1674)、田中は「算法明解」[6] (1679) を出版してこれに応えたのであるが、ここでは消去の一般理論は必ずしも必要がない。大抵は小川東 [5] がいう三乗化の技法だけで解けてしまうのである。関の解答は、そこを見抜いて、しかもわざと難しくしているところがある。

一般に $n = 2, 3, 4, \dots$ とするとき $(n-1)$ 乗幂演式とは、未知数 X に関する代数方程式

$$f(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + \dots + a_mX^m = 0 \quad (1)$$

の解がすべて

$$F(X^n) = A_0X^0 + A_1X^n + \dots + A_MX^{Mn} = 0 \quad (2)$$

の解となるような X^n の整式 $F(Y)$ を計算する術である。田中の関心がここにあったことは間違いない。「算学紛解」8 巻の中で卷之二から四までの 3 巻がこの問題に当てられている。卷之二の始めでは $f(X)$ の定数項をもたない整式として $F(X^n)$ を求めるといふ原始的な方法をとるのであるが、後ではこれは (1) と

$$Y - X^n = 0 \quad (3)$$

から X を消去することと同じであるという立場に立つて、(2) の係数 A_j それぞれの a_j の整式としての各項を決定、その後で未定係数法でその数係数を決定するという巧妙な方法をとる。最後には行列式を用いた表示、また n が合成数であるときの因数分解に応じた逐次計算法に及ぶ。

以上に対して、巻之一では一般の連立代数方程式の消去の理論を扱っている。二つの方程式が与えられれば、互いの最高次の係数を掛けて引き算すれば、次数が下げられるというところから始まり、次には換式と行列式を用いて二つの3次方程式系及び4次方程式系を解くが、これは借り物という印象を受ける。むしろその次に与えられている3次以下の二つの方程式系に対する終結式を、行列式を使うことなく、冪演式と同様な方法で計算するところにその本領が発揮されているように感じた。

1 巻之一の内「求陰陽率根源之術」による終結式の計算

二つの代数方程式

$$f(X) = a + bX + cX^2 = 0, \quad (4)$$

$$g(X) = p + qX + rX^2 + sX^3 = 0 \quad (5)$$

の終結式を『算学紛解』巻之一の最後に述べられている方法で計算してみる。

前式 (4) を後式 (5) の次数だけ自乗したものと、後式 (5) を前式 (4) の次数だけ自乗して和の順序を逆転したものを

$$a^3X^0 + a^2bX^1 + \left\{ \begin{matrix} a^2c \\ ab^2 \end{matrix} \right\} X^2 + \left\{ \begin{matrix} abc \\ b^3 \end{matrix} \right\} X^3 + \left\{ \begin{matrix} ac^2 \\ b^2c \end{matrix} \right\} X^4 + bc^2X^5 + c^3X^6 = 0, \quad (6)$$

$$s^2X^6 + rsX^5 + \left\{ \begin{matrix} qs \\ r^2 \end{matrix} \right\} X^4 + \left\{ \begin{matrix} ps \\ qr \end{matrix} \right\} X^3 + \left\{ \begin{matrix} pr \\ q^2 \end{matrix} \right\} X^2 + pqX^1 + p^2X^0 = 0 \quad (7)$$

とする。ただし、数係数および符号は無視する。終結式は、この時、上下の式の各項の積で次数が前後式の次数の積となるものを書き並べた

$$a^3s^2, a^2brs, \left\{ \begin{matrix} a^2cqs \\ a^2cr^2 \\ ab^2qs \\ ab^2r^2 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} abcps \\ abcqr \\ b^3ps \\ b^3qr \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} ac^2pr \\ ac^2q^2 \\ b^2cpr \\ b^2cq^2 \end{matrix} \right\}, bc^2pq, c^3p^2 \quad (8)$$

という 16 箇の単項式の整数係数 C_i の一次結合で表される。

$X = \xi$ が (ある拡大体の中での) 方程式 (4), (5) の共通の解であるときには $X = \xi$ を代入した終結式も当然零とならなければならないから、上の単項式の 1 次結合で表される終結式の候補に対して

$$a = -bX - cX^2, \quad (9)$$

$$p = -qX - rX^2 - sX^3 \quad (10)$$

を代入して得られる多項式が恒等的に零となるという条件を課して係数 C_i を決定することができる¹。上の連立方程式 (4), (5) に対しては、以下の計算表に現れる a および p を除く文字の単項式と X の冪乗毎の和が消えるという条件で係数を決定することができる。

係数	単項式	X^0	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6
C_1	a^3s^2				$-b^3s^2$	$-3b^2cs^2$	$-3bc^2s^2$	$-c^3s^2$
C_2	a^2brs			b^3rs	$2b^2crs$	bc^2rs		
C_3	a^2cqs			b^2cqs	$2bc^2qs$	c^3qs		
C_4	a^2cr^2			b^2cr^2	$2bc^2r^2$	c^3r^2		
C_5	ab^2qs		$-b^3qs$	$-b^2cqs$				
C_6	ab^2r^2		$-b^3r^2$	$-b^2cr^2$				
C_7	$abcps$			b^2cqs	b^2crs bc^2qs	b^2cs^2 bc^2rs	bc^2s^2	
C_8	$abcqr$		$-b^2cqr$	$-bc^2qr$				
C_9	b^3ps		$-b^3qs$	$-b^3rs$	$-b^3s^2$			
C_{10}	b^3qr	b^3qr						
C_{11}	ac^2pr			bc^2qr	bc^2r^2 c^3qr	bc^2rs c^3r^2	c^3rs	
C_{12}	ac^2q^2		$-bc^2q^2$	$-c^3q^2$				
C_{13}	b^2cpr		$-b^2cqr$	$-b^2cr^2$	$-b^2crs$			
C_{14}	b^2cq^2	b^2cq^2						
C_{15}	bc^2pq		$-bc^2q^2$	$-bc^2qr$	$-bc^2qs$			
C_{16}	c^3p^2			c^3q^2	$2c^3qr$	$2c^3qs$ c^3r^2	$2c^3rs$	c^3s^2

¹田中は (9), (10) 式の右辺に負号 $-$ が現れ、後の計算で符号の扱いが面倒になることを嫌ってもとの方程式 (4), (5) 式の定数項の方を $-a, -p$ とし計算している。

$C_1 = 1$ として、他の係数を決定する。

$$c^3s^2X^6 \text{ の係数: } -C_1 + C_{16} = 0 \implies C_{16} = 1.$$

$$bc^2s^2X^5 \text{ の係数: } -3C_1 + C_7 = 0 \implies C_7 = 3.$$

$$c^3rsX^5 \text{ の係数: } C_{11} + 2C_{16} = 0 \implies C_{11} = -2.$$

$$bc^2rsX^4 \text{ の係数: } C_2 + C_7 + C_{11} = 0 \implies C_2 = -1.$$

$$c^3qsX^4 \text{ の係数: } C_3 + 2C_{16} = 0 \implies C_3 = -2.$$

$$c^3r^2X^4 \text{ の係数: } C_4 + C_{11} + C_{16} = 0 \implies C_4 = 1.$$

$$b^2cs^2X^4 \text{ の係数: } -3C_1 + C_7 \equiv 0.$$

$$b^3s^2X^3 \text{ の係数: } -C_1 - C_9 = 0 \implies C_9 = -1.$$

$$b^2crsX^3 \text{ の係数: } 2C_2 + C_7 - C_{13} = 0 \implies C_{13} = 1.$$

$$bc^2qsX^3 \text{ の係数: } 2C_3 + C_7 - C_{15} = 0 \implies C_{15} = -1.$$

$$bc^2r^2X^3 \text{ の係数: } 2C_4 + C_{11} \equiv 0. \quad c^3qrX^3 \text{ の係数: } C_{11} + 2C_{16} \equiv 0.$$

$$b^2cqsX^2 \text{ の係数: } C_3 - C_5 + C_7 = 0. \implies C_5 = 1.$$

$$b^3r^2X \text{ の係数: } C_6 = 0. \implies C_6 = 0.$$

$$bc^2qrX^2 \text{ の係数: } -C_8 + C_{11} - C_{15} = 0. \implies C_8 = -1.$$

$$c^3q^2X^2 \text{ の係数: } -C_{12} + C_{16} = 0 \implies C_{12} = 1.$$

$$b^2cr^2X^2 \text{ の係数: } C_4 - C_6 - C_{13} \equiv 0. \quad b^3rsX^2 \text{ の係数: } C_2 - C_9 \equiv 0.$$

$$b^3qsX \text{ の係数: } -C_5 - C_9 \equiv 0.$$

$$b^2cqrX \text{ の係数: } -C_8 - C_{13} \equiv 0. \quad bc^2q^2X \text{ の係数: } -C_{12} + C_{15} \equiv 0.$$

$$b^3qr \text{ の係数: } C_{10} = 0. \implies C_{10} = 0.$$

$$b^2cqr \text{ の係数: } C_{14} = 0. \implies C_{14} = 0.$$

こうして計算された終結式は

$$\begin{aligned} R(f, g) = & a^3s^2 - a^2brs - 2a^2cqs + a^2cr^2 + ab^2qs + 3abcps \\ & - abcqr - 2ac^2pr + ac^2q^2 - b^3ps + b^2cpr - bc^2pq + c^3p^2 \end{aligned} \quad (11)$$

である。16項の内3項の係数は0となり現れない。

何故このような方法で終結式が計算できるのかという理由は別に論じる [16]。

2 卷之二の内「求再乗幂陰陽率術」による三乗幂演式の計算

これを連立方程式

$$f(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 = 0, \quad (12)$$

$$g(X) = p - X^4 = 0 \quad (13)$$

から X を消去した結果として計算する [7]。上と同様に (12) を 4 乗、(13) を 3 乗した式を計算しなければならないが、後者がたった 4 項しかない

$$X^{12} + pX^8 + p^2X^4 + p^3 = 0 \quad (14)$$

であることに注意すれば、 $f(X)^4$ も

$$\left(a^2 + abX + \begin{Bmatrix} ac \\ b^2 \end{Bmatrix} X^2 + \begin{Bmatrix} ad \\ bc \end{Bmatrix} X^3 + \begin{Bmatrix} bd \\ c^2 \end{Bmatrix} X^4 + cdX^5 + d^2X^6 \right)^2 \quad (15)$$

$$= a^4 + \dots + \begin{Bmatrix} a^2bd \\ a^2c^2 \\ ab^2c \\ b^4 \end{Bmatrix} X^4 + \dots + \begin{Bmatrix} acd^2 \\ b^2d^2 \\ bc^2d \\ c^4 \end{Bmatrix} X^8 + \dots + d^4X^{12} = 0 \quad (16)$$

だけを計算すれば十分である。

こうして、三乗幂演式、すなわち連立方程式 (12), (13) の終結式を構成する単項式はすべて

$$a^4, \begin{Bmatrix} a^2bdp \\ a^2c^2p \\ ab^2cp \\ b^4p \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} acd^2p^2 \\ b^2d^2p^2 \\ bc^2dp^2 \\ c^4p^2 \end{Bmatrix}, d^4p^3 \quad (17)$$

に含まれることが分った。前と同様にこれらに

$$a = -bX - cX^2 - dX^3, \quad (18)$$

$$p = X^4 \quad (19)$$

を代入して得られる多項式を次の表に掲げる。

係数	単項式	X^4	X^5	X^6	X^7	X^8	X^9	X^{10}	X^{11}	X^{12}
C_1	a^4	b^4	$4b^3c$	$4b^3d$ $6b^2c^2$	$12b^2cd$ $4bc^3$	$12bc^2d$ $6b^2d^2$ c^4	$12bcd^2$ $4c^3d$	$4bd^3$ $6c^2d^2$	$4cd^3$	d^4
C_2	a^2bdp			b^3d	$2b^2cd$	$2b^2d^2$ bc^2d	$2bcd^2$	bd^3		
C_3	a^2c^2p			b^2c^2	$2bc^3$	$2bc^2d$ c^4	$2c^3d$	c^2d^2		
C_4	ab^2cp		$-b^3c$	$-b^2c^2$	$-b^2cd$					
C_5	b^4p	b^4								
C_6	acd^2p^2						$-bcd^2$	$-c^2d^2$	$-cd^3$	
C_7	$b^2d^2p^2$					b^2d^2				
C_8	bc^2dp^2					bc^2d				
C_9	c^4p^2					c^4				
C_{10}	d^4p^3									d^4

$C_1 = 1$ として、他の係数を決定する。

$$b^4X^4 \text{ の係数: } C_1 + C_5 = 0. \implies C_5 = -1.$$

$$b^3cX^5 \text{ の係数: } 4C_1 - C_4 = 0. \implies C_4 = 4.$$

$$b^3dX^6 \text{ の係数: } 4C_1 + C_2 = 0. \implies C_2 = -4.$$

$$b^2c^2X^6 \text{ の係数: } 6C_1 + C_3 - C_4 = 0. \implies C_3 = -2.$$

$$b^2cdX^7 \text{ の係数: } 12C_1 + 2C_2 - C_4 \equiv 0. \quad bc^3X^7 \text{ の係数: } 4C_1 + 2C_3 \equiv 0.$$

$$bc^2dX^8 \text{ の係数: } 12C_1 + C_2 + 2C_3 + C_8 = 0. \implies C_8 = -4.$$

$$b^2d^2X^8 \text{ の係数: } 6C_1 + 2C_2 + C_7 = 0. \implies C_7 = 2.$$

$$c^4X^8 \text{ の係数: } C_1 + C_3 + C_9 = 0. \implies C_9 = 1.$$

$$bcd^2X^9 \text{ の係数: } 12C_1 + 2C_2 - C_6 = 0. \implies C_6 = 4.$$

$$c^3dX^9 \text{ の係数: } 4C_1 + 2C_3 \equiv 0. \quad bd^3X^{10} \text{ の係数: } 4C_1 + C_2 \equiv 0.$$

$$c^2d^2X^{10} \text{ の係数: } 6C_1 + C_3 - C_6 \equiv 0. \quad cd^3X^{11} \text{ の係数: } 4C_1 - C_6 \equiv 0.$$

$$d^4X^{12} \text{ の係数: } C_1 + C_{10} = 0. \implies C_{10} = -1.$$

このようにして計算できた終結式

$$a^4 - 4a^2bdp - 2a^2c^2p + 4ab^2cp - b^4p + 4acd^2p^2 + 2b^2d^2p^2 - 4bc^2dp^2 + c^4p^2 - d^4p^3 \quad (20)$$

に、 $p = X^4$ を代入すれば、当然の事ながら旧来の三乗演式 [7, 8] と一致する。

3 二つの三次方程式の場合

§1 の前式の次数を一つ上げて二つの3次方程式

$$f(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 = 0, \quad (21)$$

$$g(X) = p + qX + rX^2 + sX^3 = 0 \quad (22)$$

の終結式を同じ方法で計算してみよう。

次の表は、前式、後式それぞれの3乗の展開に現れる単項式を並べ、それぞれを掛け合わせて得られる終結式の中の単項式の候補である。ただし、後式の3乗の展開は逆順に並べてある。

X^0	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^7	X^8	X^9
a^3	a^2b	a^2c ab^2	a^2d abc b^3	abd ac^2 b^2c	acd b^2d bc^2	ad^2 bcd c^3	bd^2 c^2d	cd^2	d^3
s^3	rs^2	qs^2 r^2s	ps^2 qrs r^3	prs q^2s qr^2	pqs pr^2 q^2r	p^2s pqr q^3	p^2r pq^2	p^2q	p^3
a^3s^3	a^2brs^2	a^2cqs^2 a^2cr^2s ab^2qs^2 ab^2r^2s	a^2dps^2 a^2dqrs a^2dr^3 $abcps^2$ $abcqrs$ $abcr^3$ b^3ps^2 b^3qrs b^3r^3	$abdprs$ $abdq^2s$ $abdqr^2$ ac^2prs ac^2q^2s ac^2qr^2 b^2cprs b^2cq^2s b^2cqr^2	$acdpgs$ $acdpr^2$ $acdq^2r$ b^2dpqs b^2dpr^2 b^2dq^2r bc^2pqs bc^2pr^2 bc^2q^2r	ad^2p^2s ad^2pqr ad^2q^3 $bcdp^2s$ $bcdpqr$ $bcdq^3$ c^3p^2s c^3pqr c^3q^3	bd^2p^2r bd^2pq^2 c^2dp^2r c^2dpq^2	cd^2p^2q	d^3p^3

このようにして得られた48箇の単項式をアルファベットの辞書式順序に並べ替え、さらに $a = -bX - cX^2 - dX^3$; $p = -qX - rX^2 - sX^3$ を代入した結果が次の表である。

係数	単項式	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6
C_1	a^3s^3			$-b^3s^3$	$-3b^2cs^3$	$-3b^2ds^3$ $-3bc^2s^3$	$-6bcds^3$ $-c^3s^3$
C_2	a^2brs^2		b^3rs^2	$2b^2crs^2$	$2b^2drs^2$ bc^2rs^2	$2bcdrs^2$	bd^2rs^2
C_3	a^2cqs^2		b^2cqs^2	$2bc^2qs^2$	$2bcdqs^2$ c^3qs^2	$2c^2dqs^2$	cd^2qs^2
C_4	a^2cr^2s		b^2cr^2s	$2bc^2r^2s$	$2bcdr^2s$ c^3r^2s	$2c^2dr^2s$	cd^2r^2s
C_5	a^2dps^2			$-b^2dqs^2$	$-b^2drs^2$ $-2bcdqs^2$	$-b^2ds^3$ $-2bcdrs^2$ $-2bd^2qs^2$ $-c^2dqs^2$	$-2bcds^3$ $-2bd^2rs^2$ $-c^2drs^2$ $-2cd^2qs^2$
C_6	a^2dqrs		b^2dqrs	$2bcdqrs$	$2bd^2qrs$ c^2dqrs	$2cd^2qrs$	d^3qrs
C_7	a^2dr^3		b^2dr^3	$2bcdr^3$	$2bd^2r^3$ c^2dr^3	$2cd^2r^3$	d^3r^3
C_8	ab^2qs^2	$-b^3qs^2$	$-b^2cqs^2$	$-b^2dqs^2$			
C_9	ab^2r^2s	$-b^3r^2s$	$-b^2cr^2s$	$-b^2dr^2s$			
C_{10}	$abcps^2$		b^2cqs^2	b^2crs^2 bc^2qs^2	b^2cs^3 bc^2rs^2 $bcdqs^2$	bc^2s^3 $bcdrs^2$	$bcds^3$
C_{11}	$abcqrs$	$-b^2cqrs$	$-bc^2qrs$	$-bcdqrs$			
C_{12}	$abcr^3$	$-b^2cr^3$	$-bc^2r^3$	$-bcdr^3$			
C_{13}	$abdprs$		b^2dqrs	b^2dr^2s $bcdqrs$	b^2drs^2 $bcdr^2s$ bd^2qrs	$bcdrs^2$ bd^2r^2s	bd^2rs^2
C_{14}	$abdq^2s$	$-b^2dq^2s$	$-bcdq^2s$	$-bd^2q^2s$			
C_{15}	$abdqr^2$	$-b^2dqr^2$	$-bcdqr^2$	$-bd^2qr^2$			
C_{16}	ac^2prs		bc^2qrs	bc^2r^2s c^3qrs	bc^2rs^2 c^3r^2s c^2dqrs	c^3rs^2 c^2dr^2s	c^2drs^2
C_{17}	ac^2q^2s	$-bc^2q^2s$	$-c^3q^2s$	$-c^2dq^2s$			
C_{18}	ac^2qr^2	$-bc^2qr^2$	$-c^3qr^2$	$-c^2dqr^2$			
C_{19}	$acdpps$		$bcdq^2s$	$bcdqrs$ c^2dq^2s	$bcdqs^2$ c^2dqrs cd^2q^2s	c^2dqs^2 cd^2qrs	cd^2qs^2

係数	単項式	X^0	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5
C_{20}	$acdpr^2$			$bcdqr^2$	$bcd r^3$ $c^2 dqr^2$	$bcd r^2 s$ $c^2 dr^3$ $cd^2 qr^2$	$c^2 dr^2 s$ $cd^2 r^3$
C_{21}	$acdq^2r$		$-bcdq^2r$	$-c^2dq^2r$	$-cd^2q^2r$		
C_{22}	ad^2p^2s				$-bd^2q^2s$	$-2bd^2qrs$ $-cd^2q^2s$	$-2bd^2qs^2$ $-bd^2r^2s$ $-2cd^2qrs$ $-d^3q^2s$
C_{23}	ad^2pqr			bd^2q^2r	bd^2qr^2 cd^2q^2r	bd^2qrs cd^2qr^2 d^3q^2r	cd^2qrs d^3qr^2
C_{24}	ad^2q^3		$-bd^2q^3$	$-cd^2q^3$	$-d^3q^3$		
C_{25}	b^3ps^2		$-b^3qs^2$	$-b^3rs^2$	$-b^3s^3$		
C_{26}	b^3qrs	b^3qrs					
C_{27}	b^3r^3	b^3r^3					
C_{28}	b^2cprs		$-b^2cqr s$	$-b^2cr^2s$	$-b^2crs^2$		
C_{29}	b^2cq^2s	b^2cq^2s					
C_{30}	b^2cqr^2	b^2cqr^2					
C_{31}	b^2dpqs		$-b^2dq^2s$	$-b^2dqr s$	$-b^2dqs^2$		
C_{32}	b^2dpr^2		$-b^2dqr^2$	$-b^2dr^3$	$-b^2dr^2s$		
C_{33}	b^2dq^2r	b^2dq^2r					
C_{34}	bc^2pqs		$-bc^2q^2s$	$-bc^2qrs$	$-bc^2qs^2$		
C_{35}	bc^2pr^2		$-bc^2qr^2$	$-bc^2r^3$	$-bc^2r^2s$		
C_{36}	bc^2q^2r	bc^2q^2r					
C_{37}	$bcdp^2s$			$bcdq^2s$	$2bcdqrs$	$2bcdqs^2$ $bcd r^2 s$	$2bcdrs^2$
C_{38}	$bcdpqr$		$-bcdq^2r$	$-bcdqr^2$	$-bcdqrs$		
C_{39}	$bcdq^3$	$bcdq^3$					
C_{40}	bd^2p^2r			bd^2q^2r	$2bd^2qr^2$	$2bd^2qrs$ bd^2r^3	$2bd^2r^2s$
C_{41}	bd^2pq^2		$-bd^2q^3$	$-bd^2q^2r$	$-bd^2q^2s$		
C_{42}	c^3p^2s			c^3q^2s	$2c^3qrs$	$2c^3qs^2$ c^3r^2s	$2c^3rs^2$
C_{43}	c^3pqr		$-c^3q^2r$	$-c^3qr^2$	$-c^3qrs$		
C_{44}	c^3q^3	c^3q^3					

係数	単項式	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6
C_{45}	$c^2 dp^2 r$		$c^2 dq^2 r$	$2c^2 dqr^2$	$\begin{matrix} 2c^2 dqr s \\ c^2 dr^3 \end{matrix}$	$2c^2 dr^2 s$	$c^2 drs^2$
C_{46}	$c^2 dpq^2$	$-c^2 dq^3$	$-c^2 dq^2 r$	$-c^2 dq^2 s$			
C_{47}	$cd^2 p^2 q$		$cd^2 q^3$	$2cd^2 q^2 r$	$\begin{matrix} 2cd^2 q^2 s \\ cd^2 qr^2 \end{matrix}$	$2cd^2 qrs$	$cd^2 qs^2$
C_{48}	$d^3 p^3$			$-d^3 q^3$	$-3d^3 q^2 r$	$\begin{matrix} -3d^3 q^2 s \\ -3d^3 qr^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -6d^3 qrs \\ -d^3 r^3 \end{matrix}$

係数	単項式	X^6	X^7	X^8	X^9
C_1	$a^3 s^3$	$\begin{matrix} -6bc ds^3 \\ -c^3 s^3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3bd^2 s^3 \\ -3c^2 ds^3 \end{matrix}$	$-3cd^2 s^3$	$-d^3 s^3$
C_5	$a^2 dps^2$	$\begin{matrix} -2bc ds^3 \\ -2bd^2 rs^2 \\ -c^2 drs^2 \\ -2cd^2 qs^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2bd^2 s^3 \\ -c^2 ds^3 \\ -2cd^2 rs^2 \\ -d^3 qs^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2cd^2 s^3 \\ -d^3 rs^2 \end{matrix}$	$-d^3 s^3$
C_{20}	$acdpr^2$	$cd^2 r^2 s$			
C_{22}	$ad^2 p^2 s$	$\begin{matrix} -2bd^2 rs^2 \\ -2cd^2 qs^2 \\ -cd^2 r^2 s \\ -2d^3 qrs \end{matrix}$	$\begin{matrix} -bd^2 s^3 \\ -2cd^2 rs^2 \\ -2d^3 qs^2 \\ -d^3 r^2 s \end{matrix}$	$\begin{matrix} -cd^2 s^3 \\ -2d^3 rs^2 \end{matrix}$	$-d^3 s^3$
C_{23}	$ad^2 pqr$	$d^3 qrs$			
C_{37}	$bcdp^2 s$	$bc ds^3$			
C_{40}	$bd^2 p^2 r$	$bd^2 rs^2$			
C_{42}	$c^3 p^2 sr$	$c^3 s^3$			
C_{48}	$d^3 p^3$	$\begin{matrix} -6d^3 qrs \\ -d^3 r^3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3d^3 qs^2 \\ -3d^3 r^2 s \end{matrix}$	$-3d^3 rs^2$	$-d^3 s^3$

初めに a も p も含まず、これらを代入した結果が変わらない $b^3 qrs, b^3 r^3, b^2 cqr^2, b^2 cq^2 r, b^2 dq^2, bc^2 q^2 r, bcdq^3, c^3 q^3$ の係数として次の 8 項が決まる。

$$C_{26} = C_{27} = C_{29} = C_{30} = C_{33} = C_{36} = C_{39} = C_{44} = 0.$$

以下 $C_1 = 1$ として、他の係数を決定する。

$$d^3 s^3 X^9 \text{ の係数: } -C_1 - C_5 - C_{22} - C_{48} = 0 \text{ と}$$

$$cd^2 r s^2 X^7 \text{ の係数: } -2C_5 - 2C_{22} = 0. \implies C_{48} = -1.$$

$$d^3 r s^2 X^8 \text{ の係数: } -C_5 - 2C_{22} - 3C_{48} = 0. \implies C_5 = -3, C_{22} = 3.$$

$$b^3 r^2 s X^1 \text{ の係数: } -C_9 = 0. \implies C_9 = 0.$$

$$b^2 c r^3 X^1 \text{ の係数: } -C_{12} = 0. \implies C_{12} = 0.$$

$$c^3 q^2 r X^1 \text{ の係数: } -C_{43} = 0. \implies C_{43} = 0.$$

$$c^2 d q^3 X^1 \text{ の係数: } -C_{46} = 0. \implies C_{46} = 0.$$

$$bc^2 r^3 X^2 \text{ の係数: } -C_{12} - C_{35} = 0. \implies C_{35} = 0.$$

$$bc^2 q r^2 X^1 \text{ の係数: } -C_{18} + C_{35} = 0. \implies C_{18} = 0.$$

$$d^3 r^3 X^6 \text{ の係数: } C_7 - C_{48} = 0. \implies C_7 = -1.$$

$$b^2 c s^3 X^4 \text{ の係数: } -3C_1 + C_{10} = 0. \implies C_{10} = 3.$$

$$d^3 q^2 r X^4 \text{ の係数: } C_{23} - 3C_{48} = 0. \implies C_{23} = -3.$$

$$d^3 q r s X^6 \text{ の係数: } C_6 - 2C_{22} + C_{23} - 6C_{48} = 0. \implies C_6 = 3.$$

$$d^3 q^3 X^3 \text{ の係数: } -C_{24} - C_{48} = 0. \implies C_{24} = 1.$$

$$bd^2 q^3 X^1 \text{ の係数: } -C_{24} - C_{41} = 0. \implies C_{41} = -1.$$

$$b^3 s^3 X^3 \text{ の係数: } -C_1 - C_{25} = 0. \implies C_{25} = -1.$$

$$c^3 s^3 X^6 \text{ の係数: } -C_1 + C_{42} = 0. \implies C_{42} = 1.$$

$$b^3 r s^2 X^2 \text{ の係数: } C_2 - C_{25} = 0. \implies C_2 = -1.$$

$$c^3 q s^2 X^4 \text{ の係数: } C_3 + 2C_{42} = 0. \implies C_3 = -2.$$

$$b^3 q s^2 X^1 \text{ の係数: } -C_8 - C_{25} = 0. \implies C_8 = 1.$$

$$c^3 r s^2 X^5 \text{ の係数: } C_{16} + 2C_{42} = 0. \implies C_{16} = -2.$$

$$bcd r^3 X^3 \text{ の係数: } 2C_7 - C_{12} + C_{20} = 0. \implies C_{20} = 2.$$

$$b^2 d r^3 X^2 \text{ の係数: } C_7 - C_{32} = 0. \implies C_{32} = -1.$$

$$bd^2 r^3 X^4 \text{ の係数: } 2C_7 + C_{40} = 0. \implies C_{40} = 2.$$

$$cd^2 q r^2 X^4 \text{ の係数: } C_{23} + C_{47} = 0. \implies C_{47} = 1.$$

$$bc^2 r^2 s X^3 \text{ の係数: } 2C_4 + C_{16} - C_{35} = 0. \implies C_4 = 1.$$

$$b^2 d r^2 s X^3 \text{ の係数: } -C_9 + C_{13} - C_{32} = 0. \implies C_{13} = -1.$$

$$b^2 d q r^2 X^1 \text{ の係数: } -C_{15} - C_{32} = 0. \implies C_{15} = 1.$$

$$cd^2 q^2 s X^4 \text{ の係数: } C_{19} - C_{22} + 2C_{47} = 0. \implies C_{19} = 1.$$

$$\begin{aligned}
b^2dqs^2X^3 \text{ の係数: } & -C_5 - C_8 - C_{31} = 0. \implies \boxed{C_{31} = 2}. \\
b^2dq^2sX^1 \text{ の係数: } & -C_{14} - C_{31} = 0. \implies \boxed{C_{14} = -2}. \\
c^3q^2sX^2 \text{ の係数: } & -C_{17} + C_{42} = 0. \implies \boxed{C_{17} = 1}. \\
bc^2q^2sX^1 \text{ の係数: } & -C_{17} - C_{34} = 0. \implies \boxed{C_{34} = -1}. \\
c^2dqr^2X^3 \text{ の係数: } & C_{20} + 2C_{45} = 0. \implies \boxed{C_{45} = -1}. \\
b^2cr^2sX^2 \text{ の係数: } & C_4 - C_9 - C_{28} = 0. \implies \boxed{C_{28} = 1}. \\
b^2cqr^2sX^1 \text{ の係数: } & -C_{11} - C_{28} = 0. \implies \boxed{C_{11} = -1}. \\
c^2dq^2rX^2 \text{ の係数: } & -C_{21} + C_{45} = 0. \implies \boxed{C_{21} = -1}. \\
bcdqr^2X^2 \text{ の係数: } & -C_{15} - C_{38} + C_{20} = 0. \implies \boxed{C_{38} = 1}. \\
bcdq^2sX^2 \text{ の係数: } & -C_{14} + C_{19} + C_{37} = 0. \implies \boxed{C_{37} = -3}.
\end{aligned}$$

以上の計算により 48 の係数 C_i はすべて求められた。このようにして得られた終結式は次の通り、+ の符号をもつ 17 項と - の符号をもつ 17 項からなる多項式である。

$$\begin{aligned}
& a^3s^3 - a^2brs^2 - 2a^2cqs^2 + a^2cr^2s - 3a^2dps^2 + 3a^2dqr^2s - a^2dr^3 \\
& + ab^2qs^2 + 3abcps^2 - abcqrs - abdprs - 2abdq^2s + abdqr^2 - 2ac^2prs \\
& + ac^2q^2s + acdpqs + 2acdpr^2 - acdq^2r + 3ad^2p^2s - 3ad^2pqr + ad^2q^3 \quad (23) \\
& - b^3ps^2 + b^2cprs + 2b^2dpqs - b^2dpr^2 - bc^2pqs - 3bcdp^2s + bcdpqr \\
& + 2bd^2p^2r - bd^2pq^2 + c^3p^2s - c^2dp^2r + cd^2p^2q - d^3p^3.
\end{aligned}$$

以上は、47 個の連立 1 次方程式を用いて同数の整数解を求めただけでたいした計算ではないと思われるかもしれないが、方程式自体はこの 2、3 倍はあり、この中から順序よく 47 個を選び出し全ての未知数を求めるのは、丁度地図のない密林にある全ての樹木に洩れなく名前を付けていくようなもので、思ったより難しい。「算学紛解」巻之一には 4 次以下の二つの代数方程式の終結式を計算した結果が書かれているが、二つの立方方程式に対する上の結果には 7 つ以上の間違いがある。かえって、行列式を使う関の方法も田中の方法も知らなかった Euler [15] (1748) は原始的な消去の方法だけで 34 項を正しく計算している。ただし、次に示すように、冪乗演式の計算のときには迷いなく計算が実行できる。以前、[7] で、柴田 [8]、安藤 [9]、中根 [10] たちがどのようにして計算したか分からないと書いたが、この人たちは田中の弟子筋であり、田中にならった可能性が高い。中根はさらに「算学紛解」巻之四にある「依小乗率求大乘率術」を使った可能性がある [14] が、ここではこれ以上ふれない。

4 四乗冪演式の計算

§2 と同じ方法で 四乗冪演式を計算する。この場合、連立方程式は

$$f(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 = 0, \quad (24)$$

$$g(X) = p - X^5 = 0 \quad (25)$$

となる。

(24) を 5 乗した $f(X)^5$ のうち後の計算に必要なものは

$$a^5 + \dots + \left\{ \begin{array}{c} a^3be \\ a^3cd \\ a^2b^2d \\ a^2bc^2 \\ ab^3c \\ b^5 \end{array} \right\} X^5 + \dots + \left\{ \begin{array}{c} a^2ce^2 \\ a^2d^2e \\ ab^2e^2 \\ abcde \\ abd^3 \\ ac^3e \\ ac^2d^2 \\ b^3de \\ b^2c^2e \\ b^2cd^2 \\ bc^3d \\ c^5 \end{array} \right\} X^{10} + \dots + \left\{ \begin{array}{c} acde^3 \\ bce^3 \\ bd^2e^2 \\ c^2de^2 \\ cd^3e \\ d^5 \end{array} \right\} X^{15} + \dots + e^5 X^{20} \quad (26)$$

のみである。前と同様に、これらの係数に必要な p の冪をかけて終結式を構成する単項式の候補を決定する。

そして、更に

$$a = -bX - cX^2 - dX^3 - eX^4, \quad (27)$$

$$p = X^5 \quad (28)$$

を代入して得られる多項式のうちこれら単項式の係数 C_i の計算に必要な部分のみを次の二つの表に掲げる。ただし、 C_i の計算の都合上、単項式の配列は、まず p の冪数にしたがい、それが同じ中では、上の辞書式順序とは逆にしてある。

係数	単項式	X^5	X^6	X^7	X^8	*	X^{10}	X^{11}
C_1	a^5	$-b^5$	$-5b^4c$	$-10b^3c^2$ $-5b^4d$	$-10b^2c^3$ $-20b^3cd$ $-5b^4e$		$-c^5$ $-20bc^3d$ $-30b^2cd^2$ $-30b^2c^2e$ $-20b^3de$	$-5c^4d$ $-30bc^2d^2$ $-10b^2d^3$ $-20bc^3e$ $+60b^2cde$ $-10b^3e^2$
C_2	b^5p	b^5						
C_3	ab^3cp		$-b^4c$	$-b^3c^2$	$-b^3cd$			
C_4	a^2bc^2p			b^3c^2	$2b^2c^3$		$2b^2c^2e$ $2bc^3d$	$2bc^3e$ bc^2d^2
C_5	a^2b^2dp			b^4d	$2b^3cd$		$2b^3de$ $2b^2cd^2$	$2b^2cde$ b^2d^3
C_6	a^3cdp				$-b^3cd$		$-3bc^3d$ $-3b^2cd^2$	$-c^4d$ $-6bc^2d^2$ $-3b^2cde$
C_7	a^3bep				$-b^4e$		$-3b^2c^2e$ $-3b^3de$	$-bc^3e$ $-6b^2cde$ $-3b^3e^2$
C_8	c^5p^2						c^5	
C_9	bc^3dp^2						bc^3d	
C_{10}	$b^2cd^2p^2$						b^2cd^2	
C_{11}	$b^2c^2ep^2$						b^2c^2e	
C_{12}	b^3dep^2						b^3de	
C_{13}	$ac^2d^2p^2$							$-bc^2d^2$
C_{14}	ac^3ep^2							$-bc^3e$
C_{15}	abd^3p^2							$-b^2d^3$
C_{16}	$abcdep^2$							$-b^2cde$
C_{17}	$ab^2e^2p^2$							$-b^3e^2$
C_{18}	$a^2d^2ep^2$							
C_{19}	$a^2ce^2p^2$							

係数	単項式	**	X^{15}	**	X^{18}	X^{19}	X^{20}
C_1	a^5		$-d^5$ $-20cd^3e$ $-30c^2de^2$ $-30bd^2e^2$ $-20bce^3$		$-10d^2e^3$ $-5ce^4$	$-5de^4$	$-e^5$
C_6	a^3cdp		$-3cd^3e$ $-3c^2de^2$				
C_7	a^3bep		$-3bd^2e^2$ $-3bce^3$				
C_{18}	$a^2d^2ep^2$		$2bd^2e^2$ $2cd^3e$		d^2e^3		
C_{19}	$a^2ce^2p^2$		$2bce^3$ $2c^2de^2$		ce^4		
C_{20}	d^5p^3		d^5				
C_{21}	cd^3ep^3		cd^3e				
C_{22}	$c^2de^2p^3$		c^2de^2				
C_{23}	$bd^2e^2p^3$		bd^2e^2				
C_{24}	bce^3p^3		bce^3				
C_{25}	ade^3p^3				$-d^2e^3$	$-de^4$	
C_{26}	e^5p^4						e^5

$C_1 = 1$ として、他の係数を決定する。

$$b^5X^5 \text{ の係数: } -C_1 + C_2 = 0. \implies C_2 = 1.$$

$$b^4cX^6 \text{ の係数: } -5C_1 - C_3 = 0. \implies C_3 = -5.$$

$$b^3c^2X^7 \text{ の係数: } -10C_1 - C_3 + C_4 = 0. \implies C_4 = 5.$$

$$b^4dX^7 \text{ の係数: } -5C_1 + C_5 = 0. \implies C_5 = 5.$$

$$b^3cdX^8 \text{ の係数: } -20C_1 - C_3 + 2C_5 - C_6 = 0. \implies C_6 = -5.$$

$$b^4eX^8 \text{ の係数: } -5C_1 - C_7 = 0. \implies C_7 = -5.$$

$$c^5X^{10} \text{ の係数: } -C_1 + C_8 = 0. \implies C_8 = 1.$$

$$bc^3dX^{10} \text{ の係数: } -20C_1 + 2C_4 - 3C_6 + C_9 = 0. \implies C_9 = -5.$$

$$\begin{aligned}
b^2cd^2X^{10} \text{ の係数: } & -30C_1 + 2C_5 - 3C_6 + C_{10} = 0. \implies \boxed{C_{10} = 5}. \\
b^2c^2eX^{10} \text{ の係数: } & -20C_1 + 2C_4 - 3C_7 + C_{11} = 0. \implies \boxed{C_{11} = 5}. \\
b^3deX^{10} \text{ の係数: } & -20C_1 + 2C_5 - 3C_7 + C_{12} = 0. \implies \boxed{C_{12} = -5}. \\
bc^2d^2X^{11} \text{ の係数: } & -30C_1 + C_4 - 6C_6 - C_{13} = 0. \implies \boxed{C_{13} = 5}. \\
bc^3eX^{11} \text{ の係数: } & -20C_1 + 2C_4 - C_7 - C_{14} = 0. \implies \boxed{C_{14} = -5}. \\
b^2d^3X^{11} \text{ の係数: } & -10C_1 + C_5 - C_{15} = 0. \implies \boxed{C_{15} = 5}. \\
b^2cdeX^{11} \text{ の係数: } & -60C_1 + 2C_5 - 3C_6 - 6C_7 - C_{16} = 0. \implies \boxed{C_{16} = -5}. \\
b^3e^2X^{11} \text{ の係数: } & -10C_1 - 3C_7 - C_{17} = 0. \implies \boxed{C_{17} = 5}. \\
de^4X^{19} \text{ の係数: } & -5C_1 - C_{25} = 0. \implies \boxed{C_{25} = -5}. \\
e^5X^{20} \text{ の係数: } & -C_1 - C_{26} = 0. \implies \boxed{C_{26} = 1}. \\
d^2e^3X^{19} \text{ の係数: } & -10C_1 + C_{18} - C_{25} = 0. \implies \boxed{C_{18} = 5}. \\
e^5X^{20} \text{ の係数: } & -5C_1 + C_{19} = 0. \implies \boxed{C_{19} = 5}. \\
d^5X^{15} \text{ の係数: } & -C_1 + C_{20} = 0. \implies \boxed{C_{20} = 1}. \\
cd^3eX^{15} \text{ の係数: } & -20C_1 - 3C_6 + 2C_{18} + C_{21} = 0. \implies \boxed{C_{21} = -5}. \\
c^2de^2X^{15} \text{ の係数: } & -30C_1 - 3C_6 + 2C_{19} + C_{22} = 0. \implies \boxed{C_{22} = 5}. \\
bd^2e^2X^{15} \text{ の係数: } & -30C_1 - 3C_7 + 2C_{18} + C_{23} = 0. \implies \boxed{C_{23} = 5}. \\
bce^3X^{15} \text{ の係数: } & -20C_1 - 3C_7 + 2C_{19} + C_{24} = 0. \implies \boxed{C_{24} = -5}.
\end{aligned}$$

このようにして計算できた終結式は

$$\begin{aligned}
& a^5 - 5a^3bep - 5a^3cdp + 5a^2b^2dp + 5a^2bc^2p - 5ab^3cp + b^5p \\
& + 5a^2ce^2p^2 + 5a^2d^2ep^2 + 5ab^2e^2p^2 - 5abcdep^2 - 5abd^3p^2 - 5ac^3ep^2 \\
& + 5ac^2d^2p^2 - 5b^3dep^2 + 5b^2c^2ep^2 + 5b^2cd^2p^2 - 5bc^3dp^2 + c^5p^2 \\
& - 5ade^3p^3 - 5bce^3p^3 + 5bd^2e^2p^3 + 5c^2de^2p^3 - 5cd^3ep^3 + d^5p^3 + e^5p^4
\end{aligned} \tag{29}$$

である。+ の符号をもつ項が 15、- の符号をもつものが 11 ある [7]。

参考文献

- [0] 後藤武史-小松彦三郎, 17 世紀日本と 18-19 世紀西洋の行列式、終結式及び判別式, 「数学史の研究」, 数理解析研究所講究録 **1392**(2004), 117-129; 西北大学学报 (J. of Northwest University, Xian, (Natural Science Edition)), **33**(2003), 363-367 & 376-380.
- [1] 小松彦三郎, 『解伏題之法』山路主任本の復元と「關孝和全集」との比較, 「数学史の研究」数理解析研究所講究録 **1392**(2004), 225-245.
- [2] 關孝和-建部賢弘-建部賢明, 大成算經 卷之十七 全題解 (1683-1710), 菅野元健写 (1800 頃), 東京理科大学近代科学資料館蔵 請求番号物 425.
- [3] 田中由真, 算學紛解 (1690 頃), 大阪府立中之島図書館蔵 請求番号 618/204.
- [4] 井関知辰, 算法發揮 (1690), 東北大学付属図書館蔵 請求番号 狩野集書 7.20306.
- [5] 小川東, 関 孝和 「發微算法」, 四日市大学教育研究叢書 5, 大空社, 1994.
- [6] 田中正利 (由真), 算法明解 (1679), 東北大学付属図書館蔵 請求番号 岡本文庫写 C 06.
- [7] 小松彦三郎, 關東の消長法と關西の冪乗演段, 「数学史の研究」数理解析研究所講究録 **1583**(2008), 19-39.
- [8] 柴田 (宮城) 清行, 明元算法 (1689), 東北大学付属図書館蔵 請求番号 岡本刊 060.
- [9] 安藤吉治, 一極算法 (1689), 東北大学付属図書館蔵 請求番号 林文庫 0042.
- [10] 中根元圭, 七乗冪演式 (1691), 東北大学付属図書館蔵 請求番号 林集書 1233.
- [11] 藤原松三郎著 日本学士院編, 明治前日本数学史, 第二卷, 岩波書店, 1956, pp. 109-115.
- [12] 藤原松三郎著 日本学士院編, 明治前日本数学史, 第三卷, 岩波書店, 1957, pp. 424-447.
- [13] 竹之内脩, 田中由真の終結式について, The Construction of Resultant due to Tanaka Yoshizane, 和算研究所紀要 **2**(1999), 3-18.
- [14] 藤井康生, 中根元圭著 『七乗冪演式』元禄四年 (1691) 刊 について, 数学史研究, **181**(2004), 29-50.
- [15] Leonhard Euler, 高瀬正仁訳, オイラーの解析幾何, 海鳴社, 2005, p. 312.
- [16] 小松彦三郎, 何故終結式は田中由真の方法で計算できるのか, 日本数学会 2012 年度年会 数学基礎論および歴史分科会 講演アブストラクト.