数理解析研究所講究録
第1787巻 2012年 79-87

中国古代の周率（下）

Calculations of pi in the ancient China (Part II)

杉本　敏夫

Sugimoto Toshio

第１３節　密率の発見

前稿（上）の第８節で、祖沖之の今一つの重要な業績は、πの近似分数すなわち《密率 355/113 の発見》であると述べた。この項目は、すでに多くの学者が論及しているので、新見を加える余地は無いように思われる。しかし私は、一つの対案を示そう。[6] 銭宝琮によると、『隋書』律歴志に、祖沖之がπの近似分数《密率 355/113》を発見した、とある。以下この分数を屡々参照するので、Q=355/113 と置く。Qは《密率》と呼ばれ、R=22/7 は《約率》と呼ばれる。πの近似分数を目指して計算する過程で、約率Rはごく自然に得られる。

第１４節　関孝和の算法

[9]関孝和は正六角形でなく、正方形から出発して、直径１なる円に内接する正八角形、正十六角形等々の周Pを求めて、131072 角形の周 3.141592653…を得た。次いでこの周の値に対する近似分数を求めるため、単純極まりない方法を用いた。すなわち、3/1, 7/2, 10/3, 13/4, 16/5, … と、分母を 1 だけ増やし、分子は絶えず　U=3.141592 に近い値になるように定めた。この方法によれば、祖沖之の《密率》355/113 に近づくため、112 回もの試行を必要とした。関の算法を弁護すれば、その過程で、古来、名前の付いた近似分数が凡て登場する。

第１５節　何承天の調日法

古代数学に表れた近似分数は、一般に天文・暦計算の必要から考案された。[10] 藪内によると、前漢（西暦前）では「四分暦」すなわち、一年を 365 日と四分の一 (1/4) としたが、太初元年(前 104 年)に「太初暦」が公布され、端数を 385/1539＝0.25016244… と精密化した。これは一朔望月を 29 日と 43/81＝0.53086419…日と決めることと調和させるためだと言う。即ち分母が 1539＝81×19 になっている。このように、一年または一朔望月の端数を分数化するのと同時に、両者をなるべく共通の簡単な分数で表示するための苦心が、分数の四則演算を発達させた、と言える。また、最大公約数、最小公倍数、互除法、その他、所謂「初等整数論」に属する算法を発達させた。天文・暦法における

《上元》は、太陽、月、木星が規準位置にある時を指し、それは大初元年(B.C.104)から何年昔か？を問うた。この気が遠くなるような太古を求める問題への答えは、143,128 年昔だと計算した。問題の本質は「最小公倍数」に過ぎない。

南北朝の初め、博学・多作の何承天(420-478)は、「元嘉暦」(443)を作った。その際、端数を合理的に処理する新しい算法、すなわち《調日法》を発明した。この算法は、[11] p.197 以下に詳述したが、ここに再記する。

強率 ＝4 / 1 ＞π＞ 3 / 1 ＝弱率 から出発して、分子の和、分母の和を次々に作る。π は、計算の始めには、まだ数桁の近似値に過ぎない。仮に Q で表すこととし、さらに、例題としてはπの簡略な値を考えるため、密率の近似値を Q ＝ 3.141592 と仮定する。(当面は、精密なπの値を求めることが課題ではない。むしろπの近似分数を求めようとしている。)

さて、何承天の調日法なる算法を文字式で表せば、次の通り：

$a/b > Q > c/d$ から出発して、新たに分数 $(a+c)/(b+d) = e/f$ を作る。このとき $a/b > e/f > c/d$ となることは必然だが、新たに作られた分数 e/f と目標の Q とを比べたとき、大小の関係が問題となる。二つの場合が生じる。

Ⅰ. もしも、$e/f > Q$ となったならば、Q は初めよりも狭い範囲に挟まれて、
$a/b > e/f > Q > c/d$ となる。

Ⅱ. もしも、$Q > e/f$ となったならば、Q は初めよりも狭い範囲に挟まれて、
$a/b > Q > e/f > c/d$ となる。

具体的な例題として、4 / 1 ＞ Q ＞ 3 / 1 から始めよう。(4+3)/(1+1)＝7/2＝3.5＞Q, (7+3)/(2+1)＝10/3＝3.133…＞Q, …を続け、…＞13/4＞16/5 を経て、16/5＞19/6＝3.166…＞Q, 22/7＝3.1428…＞Q まで続けられる。

ところが、その次の回には、(22+3)/(7+1)＝25/8＝3.125＜Q となって、大小が逆転して、22/7＞ Q ＞25/8 となる。〔結果として、左辺には祖沖之の「約率」R ＝ 22/7 が得られている。〕この様に、大小が逆転した所で、今までの「分子に 3 を加え、分母に 1 を加える」作業を止めて、第二の作業に移る。

それは、最後に得られた分数 22/7 と 25/8 とを新たに出発値と考えて、改めて、この二つの分子・分母から出発して、上と同様な調日法の作業、即ち(22+25)/(7+8)＝47/15＝3.133… を作り、Q との大小の比較に移行する。

この様に、「つねに Q と比較して、大小が逆転しときは、Q を挟む両側の分子・分母を取り替えて次の段階の作業に移行する」のが、何承天の算法である。

途中の計算を省略して、まとめて言えば、22/7＞Q ＞157/50 を経て、最後に355/106＞Q ≧355/113 に到達する。途中の近似分数 157/50 は劉徽に因んで、《徽術》と呼ばれる。この右辺に得られた Q ＝355/113 が、目標とした祖沖之の「密率」である。以上が「何承天の算法」である。(言葉で説明すれば、煩瑣であるが、具体的な数値を用いれば、自動的に計算できる。)

調日法は次に述べる連分数より劣るが、分母に絶えず 1 を加えて比較する「関の算法」と比べれば、分母に「1 よりも大きな数値」を加える点で優れている。

私は、青と黄の絵の具を渡されて、指定された緑を作る作業に擬えた。最初、勝手に青と黄を混ぜる。出来た色が青すぎれば黄を加える。黄すぎれば青を加える。この作業を繰り返して、次第に指定された緑に近づける。

第１６節　連分数

Q =3.1415926536 を目標にして、連分数を説明しよう。初め f =3 と置く。

$$Q = f + 0.1415926536 = f + 1/7.062513305 = f + 1/(7 + 0.062513305),$$

なる変形が、連分数の基本の算法である。分母に出た 7.062513305 を、整数部分 7 と分数部分 0.062513305 とに分離し、さらに分数部分の逆数を求める。

このように、連分数に特有な算法は、１未満の数（上例では 0.1415926536）の逆数（7.062513305）を求め、その整数部分 7 に注目し、残りの分数部分（0.062513305）から、さらに次の逆数（15.996594645）を求める。等々。

g =7 とおけば、 $Q = f+1/(g+(1/15.996594645))$.

h =15 とおき、 $Q = f+1/(g+(1/(h+0.996594645))$ $= f+1/(g+(1/(h+1/1.0034167))))$.

j = 1 とおき、 $Q = f+1/(g+(1/(h+1/(j+0.0034167))))$ $= f+1/(g+(1/(h+1/(j+1/292.68))))$.

最後の括弧内の分数 1/292.68=0.0034167 は、数値が小さいので無視すれば、

$$Q = f+1/(g+(1/(h+1/j)))$$

となる。これから逆算して、$Q \fallingdotseq f = 3$, $Q \fallingdotseq f+1/g = 3+1/7 = 22/7$,

$$Q \fallingdotseq f+1/(g+(1/h)) = 3+1/(7+(1/15)) = 3+1/(106/15) = 333/105,$$

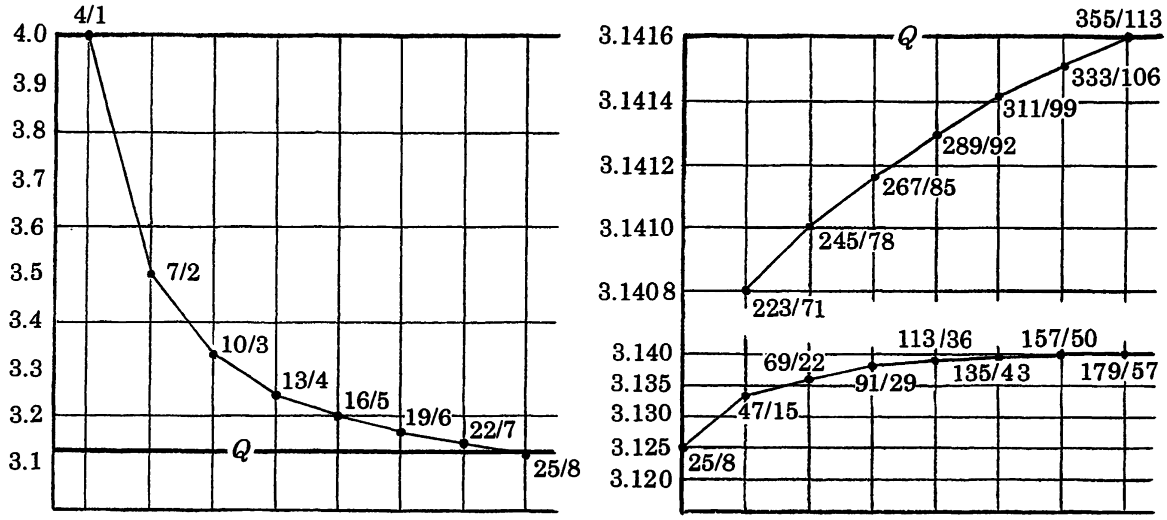
$$Q \fallingdotseq f+1/(g+(1/(h+1/j))) = 3+1/(7+(1/(15+1/1)))$$
$$= 3+1/(7+(1/16)) = 3+1/(113/16) = 3+16/113 = (339+16)/113$$

を経て、Q =355/113 即ち密率に達する。 途中で約率 R =22/7 も得られる。

第１７節　二つの算法の比較

調日法と連分数との比較。左図、4/1 から 22/7 まで Q より大きく、22/7 で Q に最接近し、25/8 は Q より小さい。目標 Q に近づけば勾配は緩やかになる。

続きは右図。25/8 から後の変化は甚だしく一図に収まらない。右下図は 25/8 から 179/57 まで示す。一部を省略し、上下を拡大した右上図の 223/71 に飛ぶ。Q の直前の 333/106 は Q より小、直後の 355/113 は Q を越え、Q に密着する。左図では 4/1 から 22/7 まで近似分数は Q より 7 回大きい。右図（途中を省略）では、25/8 から 333/106 まで、中間近似分数が Q より 15 回小さい。調日法の場合、一歩づつ近づいた回数の 7 または 15 が、連分数の場合、ただ



一回の割り算によって 7.062… の整数部分の 7, または 15.996… の整数部分の 15 として決まるので、効率が良い。連分数が優れた算法なる所以である。

第１８節　祖冲之の約率と密率

祖冲之による密率の計算方法は何も伝わらない。何承天の調日法を継承したと想像される。調日法によれば、祖の約率 $R=22/7=3.1428\cdots>Q$ は、すでに上の計算の中に表れていた。文献上、約率 R はあまり重視されないが、簡単な分数の割には優れた分数と私は考える。聖書に言う３ は、素朴・粗雑すぎる。祖の約率 $R=22/7$ ならば、紙細工、木工の加工に充分な精度である。

私は（上）の第１１節で、祖冲之は 24576 角の内面積まで求めたこと（同角の外面積は直ちに得られること）を述べた。祖の密率　$Q=355/113$ を得るためには、実はそれほど多くの内面積を求める必要はない。手前の 3072 角の内面積 $Y=3.14159\,046$ まで求めて置けば充分である。その直前の 1536 角の内面積 $X=3.14158\,389$ も用い、3072 角の外面積 $Z=3.14159\,703$ も直ちに得られる。（私はいま理論として、祖の密率を得るためギリギリの値を問題としている。）

祖の密率 $Q=355/113$ を理論的に未知の分数とし、未知ながら、不等式

$$Z=3.14159\,703 > Q > Y=3.14159\,046$$

を満たす或る分数と仮定する。この不等式のみを既知とて議論を進めよう。

第１９節　密率の探求

祖冲之の約率 $R=22/7=3.1428\cdots>Q$ が、甚だ良い近似値であることは、次の計算によって確かめられる。出発値は任意だが、第１５節の初めの不等式

$$22/7=3.14285\,714\cdots > Q > 25/8=3.125$$

から出発する。何承天の算法を用いて、次には $(22+25)/(7+8)=47/15=3.133\cdots$ を作って Q と比較すれば、

$$22/7 = 3.14285\,714\cdots > Q > 47/15 = 3.133\cdots > 25/8 = 3.125$$

となる。次は、22/7 と 47/15 から 69/22 を作る、等々と続ける。この作業によって、次々に生じる分数は(その分母のみ示すと)29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99 であり、目標の 311/99 までの間、凡て Q よりも小さい分数が得られ、しかもそれぞれ一つ手前の分数よりは大きい数となり、

$$22/7 = 3.14285\,714\cdots > Q > 311/99 = 3.141414\cdots > \cdots > 25/8 = 3.125$$

等を辿る。さらに Q を挟む両側の分数 22/7 と 311/99 に何承天の算法を施せば、密率 Q =355/113=3.14159 29203… に到達する。

何故連分数が調日法よりも能率よく収束するのか、理由が再び説明できる。355/113 と 47/15 と 25/8 の分母に注目すれば (113−8)/(15−8)=105/7=15, 即ち、上記の不等式の系列の分母は、25/8 から 355/113 まで、途中を飛ばし一挙に 15 回近づく。回数 15 は、連分数の演算の中に、h =15 として出て来た。 調日法が一歩づつ分母を増やして目標値に近づいたのに対して、連分数は演算の中に出て来る h =15 を求めて、一挙に目標の値に近づいた。

第２０節　密率の独自性と偶然性

前回（上）で、中国人たちによる「祖先の大学者祖沖之への賛美」を述べた（それは当然である）。対する日本は、倭王武（雄略）の時代であった。

注目すべきは、密率 355/113=3.14159 29203… を、前回（上）第 12 節で示した計算と比較すれば、従来見逃されてきたことだが、

(24576 角の内面積) $3.141592\underline{619} < \pi < 3.141592\underline{722}$ (24576 角の外面積)

であり、密率は 24576 角の外面積よりも外側にはみ出している。即ち、密率は万能ではない！　円周率 π の近似値とは言っても、約率 22/7 は小数 3.14 の近似値として、密率 355/113 は小数 3.141592 の近似値として有効なのであって、必要な精度に応じて、その段階で効力を発揮する近似分数に過ぎない。

社会生活のみならず、歯車の噛み合わせに頼る精密機械工場の精度の範囲内では、《密率》は非常に良い近似値である。しかし純粋数学の立場に立つ私たちは、いま私が指摘した密率の限界に目を瞑っても良いのだろうか？

密率 355/113=3.1415929203…, この分数が出現する実情を知るため、逆数

$$1/113 = 0.0088495575 \quad (80\,桁省略) \quad 637168\underline{1415}\ \underline{92920}35398\,230\cdots$$

の下線部の数字の並び方に注目しよう。ここに Q の小数表示との一致部分が現れているではないか。1/113 の 87 桁目から、待望の小数部分が現れる！ 密率の出現を、小数点直下の開始に調整するには分子を 355−113・3=16 とし、16/113=0.1415929… と加工すれば良い。密率 355/113 とは、分数 1/113 の途中の桁に良い数字の並びが出る、僥倖とも言うべき偶然の産物に過ぎない。

こんなに都合の良い現象が、いつでも現れるのか？　有名な定数を試そう。

自然対数の底 e=2.71828 18284…は、1/ e などを試しても、《うまい》近似分数は得られない。オイラーの定数 C=0.57721 56649… も、レムニスケート定積分の A=1.31102… も B=0.59907… も、うまい近似分数にならない。

さらに、π を加工した数値の場合には、もはや綺麗な分数は出てこない。
$\sqrt{\pi}$=1.7724 38509…～ 1/1, 2/1, 7/4, 16/9, 23/13, 39/22, 257/145, 296/167, …
π^2=9.86960 44010…～ 9/1, 10/1, 69/7, 79/8, 227/23, 10748/1089, …
π^2/6=1.64493 40668…～1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 23/14, 51/35, 227/138, … 等々。
祖沖之の密率は π の近似分数を探すうちに、偶然に見つけた僥倖な結果に過ぎない！ 誰でも 355/113 を発見できる。祖は幸いにも発見が早かったのだ。

第２１節 密率の次の近似分数

前稿、(上) 第１２節で導いた 24576 角の内面積 T=3.14159 26191… と同角の外面積 U=3.14159 27218… を比較の目標とする。「何承天の調日法」だけも、密率 355/113 よりも近似度の高い分数が導ける。それには、不等式

355/113=3.14159 29203 5…＞U ＞T ＞ 493/157=3.14012 73885 1…

と、355/113 の一つ手前の 333/106 を元にして、次々に調日法を適用する。

(355・1+333)/(113・1+106)=688/219 =3.14155 25114 1…
(355・2+333)/(113・2+106)=1043/332=3.14156 62605 6…
… (中略) …
(355・291+333)/(113・291+106)=103638/32989=3.14159 26520 9…
(355・292+333)/(113・292+106)=103993/33102=3.14159 26530 1…

分母の 113・n+106 は、n=1 から n=292 まで続く。次の 293 の場合は、

(355・292+333)/(113・293+106)=104348/33125=3.14159 26539 214…

で、π よりも大きいので、103993/33102 で止める。このように、π の近似分数を探求するために何承天の算法を用いただけでも、密率 Q=355/113 を超える優秀な近似分数 P=103993/33102 が得られる。P は連分数を用いれば、

3 + 1/ (7 + 1/ (15 + 1/ (1 + 1/ 292)))

と表され、24576 角の外面積 U と 24576 角の内面積 T の間に挟まれる：

U ＞ P=103993/33102 ＞ T

U から P までの中間を細かく探した結果、密率 355/113 に匹敵するような、綺麗な数字が並ぶ分数は出て来ない。(綺麗なという規準は曖昧である。)

第２２節 頭打ちの問題

前回、(上) 第１２節の内容への補足。π をほぼ 10 桁の数値で 98304 角まで計算を進めてみよう。小数点下 5 桁まで用い切捨て原則によれば、案外早く限界に達する。第３節の表をこの精度で進めよう。次のように辺数 192 で、早

くも限界に達した。[6] 銭宝琮の数表の場合は、小数点下 6 桁まで示したので、192 角では余裕がありそうに見えたが、用いる数値を小数点下 5 桁までに限定すれば、早くも限界に達していたのだ。さらに多くの桁数を用いれば、計算は続けられるが、それもどのみち限界に突き当たる。

辺数	各辺長	内面積	面積差	外面積
6	0.51763	3	—	—
12	0.26105	3.10582	0.10582	3.21105
24	0.13080	3.13262	0.02680	3.15942
48	0.06543	3.13935	0.00673	3.14608
96	0.03272	3.14112	0.00177	3.14289
192	0.01636	3.14112	0.00000	3.14112

第２３節　銭の計算への批判

[6] 銭宝琮の論文集の一論文に、12288 角の内面積＝3.14159251, 24576 角の内面積＝3.14159261 と出ている。私は、非常に細かい話ながら、[1]の国際会議で、この数値の根拠に対する疑問を述べた。数値計算の<u>特殊な話題</u>である。

前回（上）の数表Ⅱで、私が示した結論は 12288 角の 3.14159 25164 … 及び 24576 角の 3.14159 26191 … であり、多数桁の値を用い、下からの積み上げ計算によって求めた。銭論文の数値は、私のような計算を経ないで、三角関数表から、6144 sin(π/6144)＝3.14159 2516…, 及び 12288 sin(π/12288)＝3.14159 2619… と求めた、と想像される。もしくは前論文（上）の第 9 節で述べたような級数(22) を用いただろうと考える。末位の処理方法でも、前者が …25164… で、後者が …26191… であるから、末位を四捨五入して、前者を …252, 後者 …262 としてもよいはずなのに、銭はそのようにしない。細かい点に対する《重箱の隅を突くような》批判である。掛ける係数 3072 と 6144 を考慮すれば、銭にとっては、各 AC の値を用いて、少なくとも

0.00102 26538 13942 × 3072 ＝3.14159 25164 29824

0.00051 13269 23682 137×6144＝3.14159 26191 03050

程度の値が計算可能な、有効数字の桁数の多い計算が必要であった筈だ。

しかし、銭が論文[6]に示した数値 3.14159251 と 3.14159261 は、桁数が少ない。私が前回（上）で述べた、地道な下からの積み上げ計算によったとは、到底思われない。私は自作の高精度計算を用い、遥かに桁数の多い数値を使い、<u>積み上げの計算</u>を実行したから、この間の事情がよく分かる。銭論文の 1923 年当時は、ソロバンと数表しか使えない。銭は手許の「三角関数表」の正弦の値に係数 3072 または 6144 を掛けた、と推測される。しかも普通の 7 桁の数表ではなく、天文計算で用いられる桁数の多い数表を用いたであろう。

第２４節　循環連分数（補足）

前回（上）の第５節で、平方根$\sqrt{0.75}$ を数値で求めた。ここで、連分数の算法について簡単に補足する。その前に、前回（上）の第５節には誤りがあったので、第５節の２行目から１６行目までを、次のように訂正する。

「

解説されている。通常の「開平方」が、二次の方程式

(11)　$x^2 = c$

を解くのに対して、開帯従平方は、一次の項(従) bx を伴う(帯)二次方程式

(12)　$x^2 + bx = c$

を解く。第７節で必要な $\sqrt{0.75}$ を求めよう。$t = 0.8$ ならば $0.75 - t^2 = 0.11$ で不足する。$\sqrt{0.75} = 0.8 + x$ と置き、$0.75 = 0.64 + 1.6x + x^2$,　ここから、

(13)　$x^2 + 1.6x = 0.11$

なる開帯従平方を得る。x は小なので、それよりも更に小さい x^2 を無視し、$x = 0.11 / 1.6 = 0.06875$ を得る。この内、上位の数 $x = 0.06$ を採用して

(14)　$x = 0.86 + y$

と置けば、次の式を得る。

(15)　$y^2 + 1.72y = 0.75 - 0.86^2 = 0.75 - 0.7396 = 0.0104.$

再び y^2 を無視し、$y = 0.0104 / 1.72 = 0.00604\,65116$ を得る。云々。途中は（似たような計算が続くが）省略することにして、最後に

(16)　$\sqrt{0.75} = 0.86602\,54037\cdots$　　$[= \sqrt{0.3} \div 2]$

に達する。これから目標の $1 - \sqrt{0.75} = 0.13397\,45962\cdots$ を得たのであろう。

」

本節では、区別のため、括弧付きの式番号の代わりに、〇付きの式番号を用いる。上記の平方根（x の代わりに r と置く）

①　$r = \sqrt{0.75} = 0.86602\,54037\ \cdots$

を小数 9 位まで示し、その逆数も、同じ桁数だけ示してみる。先ず

②　$1 / r = 1.15470\,0538\cdots = 1 + 0.15470\,0538\cdots = 1 + a$

と置き、a の逆数を求めると、

③　$1 / a = 1/ 0.15470\,0538\cdots = 6 + 0.46410\,1615\cdots = 6 + b$

となる。次々に整数部分と小数部分に分けていく。この算法を続けると、

④　$1 / b = 1/ 0.46410\,1615\cdots = 2 + 0.15470\,0538\cdots = 1 + a$

のように、a として、②と同じ 0.154700538…　が出てくる。従って、この計算を続けていけば、式 ② と式 ③ の計算が、交互に繰り返されることが、容易に分かる。ただし、連分数の計算においては、多くの桁数を用いて計算しなければ、小数部分に誤差が積み重なるので、注意が必要である。

一般の連分数（ a , b , c , d , …）を

⑤　　$a/(1+b/(1+c/(1+d/\cdots))))$

と書く。しかし、式⑤のように括弧を重ねた形で書くのは煩わしい。連分数の理論では、必要となる数値 a , b , c , d , …（これは部分商と呼ばれる）のみをブラケットで囲んで、

⑥　$r=[a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots]$

と表すのが普通である。

連分数の内には、同じ数値 a が続く場合、または二つの数値 a と b が繰り返される場合がある。これらを循環連分数と呼ぶ。例えば、$\sqrt{2}$ は 1 の後 2 が繰り返され、[1, 2, 2, 2, …]となる。次々の近似分数は、3/2＝1.5,　7/5＝1.4, 17/12＝1.4166…,　41/29＝1.4137… となって、急速に $\sqrt{2}$ に近づく。このように、急速に目標の平方根に近づくところが、連分数の特徴である。

さて、前回（上）の例題 $r=\sqrt{0.75}$ の場合は、1 の後二つの数値 6 と 2 が繰り返し表れる場合であり、[1 , 6, 2, 6, 2 …] となる。1 の後、近似分数 6/7, 13/15, 84/97,… を得、数値では 0.857…, 0.8666…, 0.865979… となり、平方根 $\sqrt{0.75}$＝0.86602 54037 … に急速に近づく。

「二次の無理数は、必ず循環連分数に展開される」という定理がある。循環連分数は二次の無理数に特有な性質であり、三次の無理数も、超越数（π など）も循環連分数に展開されない。 [12]『初等整数論講義』を参照して頂きたい。

なお連分数を話題にしたのは、「中国古代に連分数の理論があった」と主張するためではない。あくまで、前回（上）の第 5 節に対する数学的な内容の補足に過ぎない。

文献（追加）

[9] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編：関孝和全集、大阪教育図書、1974.
[10] 藪内清：中国の天文暦法、平凡社、1969.
[11] 杉本敏夫：解読・関孝和、海鳴社、2008.
[12] 高木貞治：初等整数論講義、共立出版、初版 1931, 第 2 版 1971