数理解析研究所講究録
第 1787 巻 2012 年 148-155

宅間流円理巻之一，二を読む

小寺　裕

1　はじめに

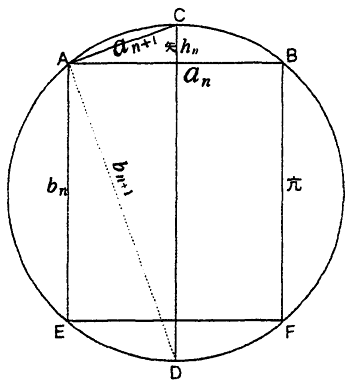
宅間流円理全五巻 (東京大学蔵版) には，次のような署名と年期がある．
「巻之一，二」鎌田俊清　享保 7 年 (1722)
「巻之三」松岡能一 (25 歳) 宝暦 11 年 (1761)　内容は『新考立円術』(松岡能一)
「巻之四」元文 3 年 (1738) 宅間能清，阿座見俊次，鎌田俊清/天明 5 年 (1785) 高橋至時序　内容は『立円或問』(宅間能清，阿座見俊次，鎌田俊清) と『立円演段』(内田秀富)．　高橋の序文は『新考立円術』にあるもの．
宅間流の系譜：宅間能清→阿座見俊次→鎌田俊清→内田秀富→松岡能一→高橋至時
(参考)
建部賢弘「綴術算経」享保 7 年，松永良弼『方円算経』(1739)

2　巻一 (円周率)

$$b_n = \sqrt{径^2 - a_n^2},\quad \frac{径 - \sqrt{径^2 - a_n^2}}{2} = h_n,\quad h_n径 = {a_{n+1}}^2$$

$$\therefore\quad {a_{n+1}}^2 = \frac{径^2 - 径\sqrt{径^2 - a_n^2}}{2}$$

$${b_{n+1}}^2 = 径^2 - {a_{n+1}}^2 = 径^2 - \frac{径^2 - 径\sqrt{径^2 - a_n^2}}{2} = \frac{径^2 + 径\sqrt{径^2 - a_n^2}}{2} = \frac{径^2 + 径\, b_n}{2}$$



宅間流円理の証明

$$径 = 2\,矢 + 亢$$

$$径^2 = (2\,矢 + 亢)^2 = 4\,矢^2 + 4\,矢亢 + 亢^2$$

$$径^2 + 径亢 = 4\,矢^2 + 4\,矢亢 + 亢^2 + (2\,矢 + 亢)\,亢 = 4\,矢^2 + 6\,矢亢 + 2\,亢^2$$

$$\therefore \quad \frac{径^2 + 径亢}{2} = 2\,矢^2 + 3\,矢亢 + 亢^2$$

$$一方 \quad {b_{n+1}}^2 = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + (亢 + 矢)^2 = 矢\,(亢 + 矢) + (亢 + 矢)^2 = 2\,矢^2 + 3\,矢亢 + 亢^2$$

故に ${b_{n+1}}^2 = \dfrac{径^2 + 径亢}{2}$ 　　径 $= 1$ だから ${b_{n+1}}^2 = \dfrac{1 + 亢}{2}$

n 校とは ${b_n}^2$ を平方に開き，n 桁まで出したときの残りの半分である．

十七万五千九百廿一億八千六百〇四万四千四百一十六角 (2^{44} 角形)

$$亢 = 0.999999999999999999999999993621917645195973825898391382243$$

$$乙 = \sqrt{\frac{1 - 亢}{2}} = 1.785788670980419532533371333660 \times 10^{-13}$$

$$丙 = \frac{乙^2}{1 - 乙^2} = 3.189041177402013087050804410578 \times 10^{-26}$$

$$丁 = \sqrt{丙} = 1.785788670980419532533371362135 \times 10^{-13}$$

$$内周 = 乙 \times 2^{44} = 3.141592653589793238462643366582$$

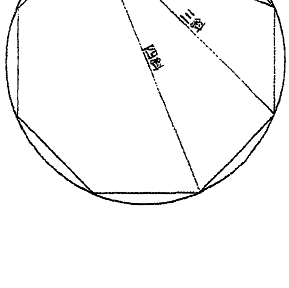
$$外周 = 丁 \times 2^{44} = 3.141592653589793238462643416675$$

$$均周 = \frac{内 + 外}{2} = 3.141592653589793238462643391628$$

$$周値 = 3.1415926535897932384626434$$

3 円理秘径 (弧背の求め方)

$弧 = \dfrac{径 \times 円周率}{角数}$ の求め方

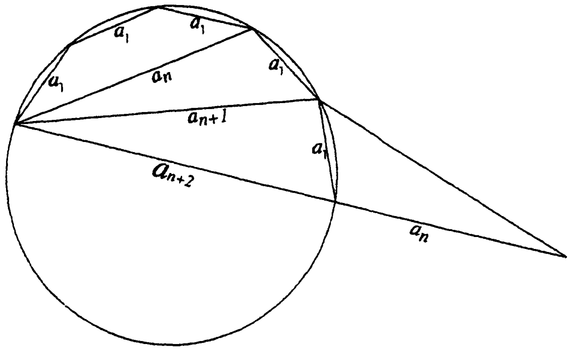


$a_1 =$ 一斜 $=$ 弦, $a_2 =$ 二斜, $\cdots$, $a_n = n$ 斜

因法 $= \dfrac{\sqrt{径^2 - 弦^2}}{半径}$ とすると

$a_2 =$ 因法 $\times a_1$

$a_{n+2} =$ 因法 $a_{n+1} - a_n$



計方等角数法

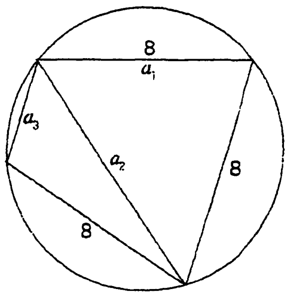
円径 1 尺, 弦 8 寸のとき, 因法と a_n が a_1 より小さくなるまで求める.

因法 $= \dfrac{\sqrt{10^2 - 8^2}}{5} = 1.2$

$a_1 =$ 一斜 $= 8$ 寸

$a_2 =$ 二斜 $= 8 \times 1.2 = 9.6$ 寸

$a_3 =$ 三斜 $= 1.2 \times 9.6 - 8 = 3.52$ 寸 $<$ 一斜



新たに $b_1 =$ 一斜 $= 3.52$ とし, 因法と b_n が b_1 より小さくなるまで求める.

因法 $= \dfrac{\sqrt{10^2 - 3.52^2}}{5} = 1.872$

$b_2 =$ 二斜 $= 1.872 \times 3.52 = 6.58944$

$b_3 =$ 三斜 $= 1.872 \times 6.58944 - 3.52 = 8.81543168$

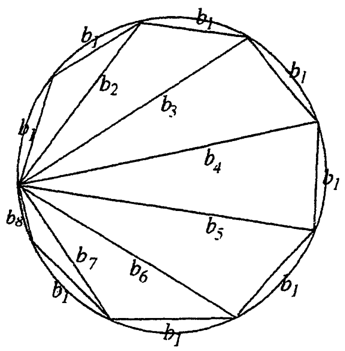
$b_4 =$ 四斜 $= 1.872 \times 8.81543168 - 6.58944 = 9.91304810496$

$b_5 =$ 五斜 $= 1.872 \times 9.91304810496 - 8.81543168 = 9.74179437248512$

$b_6 =$ 六斜 $= 1.872 \times 9.74179437248512 - 9.91304810496 = 8.323690956$

$b_7 =$ 七斜 $= 1.872 \times 8.323690956 - 9.74179437248512 = 5.84015518714688$

$b_8 =$ 八斜 $= 1.872 \times 5.84015518714688 - 8.323690956 = 2.609079554 < b_1$



新たに $c_1 =$ 一斜 $= 2.609079554$ として c_6 まで求めると,

$$\text{因法} = \frac{\sqrt{10^2 - 2.609079554^2}}{5} = 1.930728$$

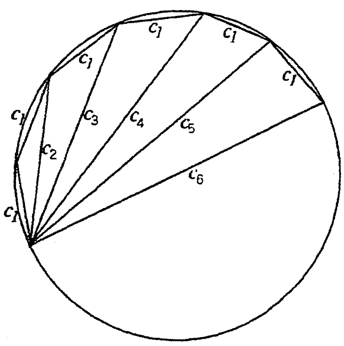
$c_2 =$ 二斜 $= 1.930728 \times 2.609079554 = 5.0374238$

$c_3 =$ 三斜 $= 1.930728 \times 5.0374238 - 2.609079554 = 7.1168156245$

$c_4 =$ 四斜 $= 1.930728 \times 7.1168156245 - 5.0374238 = 8.70318123$

$c_5 =$ 五斜 $= 1.930728 \times 8.70318123 - 7.1168156245 = 9.6866577$

$c_6 =$ 六斜 $= 1.930728 \times 9.6866577 - 8.70318123 = 9.999$



$c_6 =$ 直径 となるので, c_1 は正 12 角形の一辺である. 故に

$$\left(\pi\text{径} - \frac{\pi\text{径}}{12}\right) \div 8 = \frac{11\pi\text{径}}{12 \times 8}$$

$$\text{弧} = \left(\pi\text{径} - \frac{11\pi\text{径}}{12\times 8}\right) \div 3 = \frac{85}{12\times 8\times 3}\pi\text{径} = 9.326388888$$

ここで $\pi = 3.16$ としている． $\pi = 3.14$ とすると 弧 $= 9.267361111$， $\pi = 3.14159$ とすると 弧 $= 9.272053819$，なお真数は 弧 $= 10\sin^{-1}\frac{4}{5} = 9.27295218$

4 巻二

円径と矢が与えられたときの弧背術を論ずる．

$$\frac{\text{矢}}{\text{径}} = \text{除法}$$

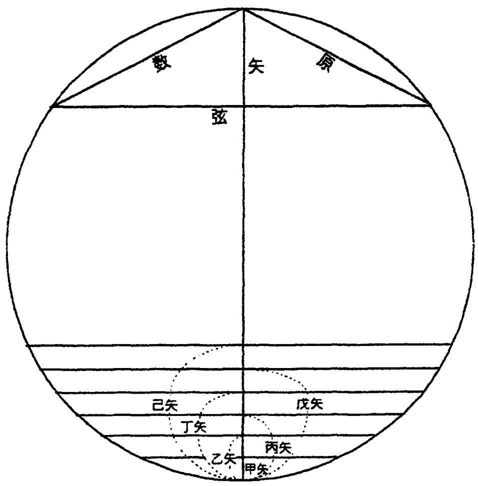
$$\text{原数} = 2\sqrt{\text{径}\cdot\text{矢}}$$

$$\begin{aligned}\text{弧背} &= \text{原数} + \text{原}\frac{1^2}{2\cdot 3}\text{除法} + \text{一差}\frac{3^2}{4\cdot 5}\text{除法} + \text{二差}\frac{5^2}{6\cdot 7}\text{除法} + \cdots \\ &= 2\sqrt{\text{径}\cdot\text{矢}}\left\{1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\text{矢}}{\text{径}}\right) + \frac{3^2}{5!}\left(\frac{\text{矢}}{\text{径}}\right)^2 + \frac{3^2\cdot 5^2}{7!}\left(\frac{\text{矢}}{\text{径}}\right)^3 + \cdots\right\} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

この式 (arcsin の展開) は松永良弼『方円算経』(1739) にある中元率と同じもの．(宅間流円理の方が 17 年はやい)

招差法による証明が以下にある．これが巻二の主なる内容 (方円算経には証明はない)

円径 1 寸ニテ矢如左



巻一の術によって，

$h_1 = \text{甲矢} = 0.05$ のとき $s_1 = \text{甲弧} = 0.4510268118$

$h_2 = \text{乙矢} = 0.1$ のとき $s_2 = \text{乙弧} = 0.64350110879$

$h_3 = \text{丙矢} = 0.15$ のとき $s_3 = \text{丙弧} = 0.795398827$

$h_4 = \text{丁矢} = 0.2$ のとき $s_4 = \text{丁弧} = 0.927295218$

$h_5=$ 丁矢 $=0.25$ のとき $s_5=$ 戊弧 $=1.04719755119$
$h_6=$ 丁矢 $=0.3$ のとき $s_6=$ 己弧 $=1.15927948073$

$2\sqrt{h_i径}=$ 其法 とする.
$2\sqrt{h_1径}=$ 甲法 $=0.4472135954999$
$2\sqrt{h_2径}=$ 乙法 $=0.632455532033$
$2\sqrt{h_3径}=$ 丙法 $=0.774596669241$
$2\sqrt{h_4径}=$ 丁法 $=0.894417190999$
$2\sqrt{h_5径}=$ 戊法 $=1$

$\dfrac{其弧}{其法}-1=$ 元積 とする.

$z_i=\dfrac{元積}{限数}=$ 定積 とする.（招差法では h_i を限数とよぶ）

$$z_1=0.170532217198$$

$$z_2=0.17464590311$$

$$z_3=0.17903646792$$

$$z_4=0.18373785665$$

$$z_5=0.188790204784$$

$$z_6=0.19424178916$$

ここで

$$z=A_1+A_2h+A_3h^2+A_4h^3+A_5h^4+A_6h^5$$

と仮定して，各 A_i を定めるのである.

$$w_i=\frac{z_{i+1}-z_i}{h_{i+1}-h_i}\quad(平積),\quad u_i=\frac{w_{i+1}-w_i}{h_{i+2}-h_i}\quad(立積),\quad v_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+3}-h_i}\quad(三乗積),$$

$$t_i=\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+4}-h_i}\quad(四乗積)\quad とすると$$

$$\frac{t_2-t_1}{h_6-h_1}=A_6=0.0520237868\quad(五乗積則五乗差ナリ)$$

$$t_1-A_6(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)=A_5=0.00225190655\quad(四乗差)$$

次に

$$\overline{z}=A_1+A_2h+A_3h^2+A_4h^3$$

に対して，同様に A_3, A_4 を定め，

$$\overline{\overline{z}}=A_1+A_2h$$

から A_1, A_2 を定める.

$A_6 = 0.0520237868$ $A_5 = 0.00225190655$ $A_4 = 0.03568021068$

$A_3 = 0.043945704642$ $A_2 = 0.0750431569228$ $A_1 = 0.16666570473212$

次に, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 と z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 の値から

$$z = A_1' + A_2'h + A_3'h^2 + A_4'h^3 + A_5'h^4$$

として, 各 A_i' を求めると

$A_5' = 0.020634873325$, $A_4' = 0.024625156005$, $A_3' = 0.04540887373$

$A_2' = 0.07495406618$, $A_1' = 0.166667655642673$

A_3 と A_3' の平均を立差, A_2 と A_2' の平均を平差, A_1 と A_1' の平均を定差といい

定差 $= 0.16666666801783975$

平差 $= 0.0749986115514$

立差 $= 0.044677289186$

これを零約術で分数になおして

$$定差 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$平差 = \frac{3}{40} = \frac{3^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$立差 = \frac{5}{112} = \frac{3^2\cdot 5^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

宅間流零約術

0.0749986115514 を分数にする術：

$$1 = \underline{13} \times 0.0749986115514 + \underline{0.0250180498318}$$

$$0.0749986115514 = \underline{2} \times 0.0250180498318 + \underline{0.0249625118878}$$

$$0.0250180498318 = \underline{1} \times 0.0249625118878 + \underline{0.000055537944}$$

$$\frac{1}{13}$$

$$\frac{1}{13+\frac{1}{2}} = \frac{2}{27}$$

$$\frac{1}{13+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}} = \frac{3}{40}$$

5 まとめ

1 巻一の前半で円周率を求めるとき，内周と外周を出しているが，不等式にせず，内周と外周の平均を出している．内周と外周を出す術は以後に受け継がれていないが，宅間流独自の術であろう．後半の円理秘径と題する弧背の求め方も宅間流の特徴である．
2 巻二の目的は公式 ① を導出することであるが，その過程にいくつかの問題点 (A)(B) がある．
(A) 円周率に 3.16 を使っていること．
(B) s_4 の値は巻一で求めたものと違っている．しかも正確な値を使っている．巻一の術ではこのような正確な値は出てこない．そこで筆者は，①を使って計算したのではないかと疑っている．ただ，他の s_1，s_2，s_3，s_5，s_6 の値の検証はしていないので，今後の課題としたい．
3 招差法により各係数を求めるのであるが，ここで使われている招差法の術は「括要算法」のそれとは少し違っている．ここでも関流とは独立であることが見える．
4 招差法によって出た係数を零約術によって分数に直すのであるが，あらかじめ結果を知っており，それにあわせて算出しているようにも思えるが，① 式の根拠をこのように事細かく記述していることは注目に値する．
5 宅間流は関流に先立って弧背術を得ていたということを検証したいのであるが，そこまでの明確な証拠は得られていないが，本書全体に，関流にはないオリジナルな考え方が見える．
5 をもって本稿のまとめとするが，この後，三，四，五巻を読んで継続研究としたい．
『宅間流円理』は東京大学蔵版を底本とした．