数理解析研究所講究録
第1787巻2012年212-220

チャールズ・バベッジ "Essays on the Philosophy of Analysis" のうち "General Notions Respecting Analysis" について

神戸大学大学院国際文化学研究科　異文化研究交流センター　野村恒彦 (Tsunehiko Nomura)
Intercultural Research Center
Kobe University Graduate School of Intercultural Studies

はじめに

これまでに "Essays on the Philosophy of Analysis [*1]" のうち "Analysis of the Essay of Games" (f.4r-f.15v) 及び "Of Games" (f.16r -f.40v) について報告した。今回報告する "General Notions Respecting Analysis" は、非常に重要な内容を持っている。その理由は、以下のとおりである。

1. 代数の意義について述べていること。
2. 指数の意味についての議論がなされていること。
3. 等号 (=) の意義について議論されていること。

次節以降で述べるように、本章での議論はダビーやフィッシュの論文での議論の対象となっていることからも、本章の内容はバベッジの主張が画期的なものであることがわかる。前章までの議論にもあったが、バベッジが主張しているのは法則の一般化であり、それは本章での主張である記号の持つ意味の吟味でもある。

なお "Essays on the Philosophy of Analysis" の成立については、以前に報告しているところであり、ここではふれない。また "Essays on the Philosophy of Analysis" は大部な手稿となっているため、各章ごとに論じる形態を採ることにした。従って全体を俯瞰することを目的とした論考は、すべての章を論じた後に行いたいと考える。

1 "Essays on the Philosophy of Analysis" について

"Essays on the Philosophy of Analysis" はバベッジ (Charles Babbage) が残した未刊行の手稿である。バベッジはケンブリッジ大学生時代に解析協会 (The Analytical Society) を友人たちと組織して、大陸解析学を導入しようとした。1821年頃成立した本手稿は[*2]、バベッジの関心がどのようなものであったかが伺えるとともに、19世紀初頭の英国数学の状況を論じるための貴重な文献である。

"Essays on the Philosohpy of Analysis" にはいくつかの章があるが、それぞれに付された題名を昨年の報告同様掲げることとする (表1)。これらを見てもその主題は多岐にわたっており、バベッジの関心の広さが確かめられる。

なお、"General Notions Respecting Analysis" については、後述するようにピーコックによる『代数学』序文との関連で言及されることがあったため、"Essays on the Philosohpy of Analysis" の中では、既存の文献においての中で活字として印刷された箇所が他章に比して格段に多い。

[*1] Ch. Babbage, "Essays on the Philosophy of Analysis", British Museum Additional Manuscripts 37202.
[*2] J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978), (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004), p.93.

題名
Title
Index
Analysis of the Essay of Games
Of Games
General Notions Respecting Analysis
Of Induction
Of Generalization
Of Analogy
Of Artifices
Of Questions Requiring the Invention of New Modes of Analysis
Merits for Invention and the Philosophy of Analysis
On Notation
Analogy
Induction
Des rapprochements
Of Artifices
Abstraction
Notation
Games
Notation
Continuity
Preface
Invention

表 1　"Essays on the Philosohpy of Analysis" のフォリオに付された章題

2 "General Notions Respecting Analysis" (f.41r-f.55r) について

本稿で論じるのは、"General Notions Respecting Analysis" という章題が付されているフォリオであるが、その内容は大きく次のように分けることができる。

1. 代数の意義
2. 等式、指数法則の意義
3. 等号と無限級数との関連
4. 連続性、発散のとらえ方
5. 関数への適用

なお、"General Notions Respecting Analysis" のフォリオのうち 41v, 43v, 44v, 45v, 47v, 48v, 49v, 51v, 52v, 54v, 55.v が空白のページとなっている。

まず、バベッジは本章の最初に代数の意義について、次のように述べている[*3]。

> 代数は最初、問題の条件によって決定されるべき数字を表現する文字の役割にしか過ぎないと思われていた。いくつかの略号は問題の役には立つが、数字の発見の中で考えられた全体の問題とその使用は、それゆえ算術的問題に限定される。

この言葉から、バベッジは代数は単なる数字を文字に置き換えたものではなく、数字を含み文字やその演算が意味するものを考えようとしていることがわかる。

続いて、バベッジ指数を問題とする。x と x を掛け合わせると xx となるが、一般的には x^2 と書く。x を3回掛け合わせると x^3 となる。ここで次のような指数法則の式が与えられる。

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

バベッジは、x について考えてみると a 及び b は整数であれば問題はないが、仮に分数や虚数であれば、その指数の意味するところは何かと問いかける[*4]。

確かに x^2 は x を2回掛け合わせることであることは容易に理解できるが、$x^{\frac{1}{2}}$ となると指数の意味から理解することは容易ではないだろう。そして、これに意味を与えるためには新しい定義が必要であると主張して、新しい定義は古い定義を包含するものでなくてはならないと、あわせて主張する[*5]。

ここで例を掲げて考えてみると、$x^{\frac{1}{2}}$ であるが、これは指数法則を利用して、次のように理解することができる。

$$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$$

すなわち、2回掛け合わせて(自乗して)x になるのであるから、$x^{\frac{1}{2}}$ は $\sqrt{x}$ を表すことになる。

次にバベッジは文字で表された等式について、左辺と右辺が等しくなることの意義について述べている。これは次の等号(=)の議論にも繋がっていくことになる。

バベッジによる等号(=)の議論は、次のようになされる[*6]。まず、次のような式を考える。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

ここで、$x = 1$ とすれば、

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

これは算術的には間違っている。

しかし、両辺に dx をかけて、対数をとると以下のようになる。

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

この式に、$x = 1$ を代入すると正しいものとなる。

---

*3 Babbage, *op. cit.*, f.41r

*4 *Ibid.*, f.44r

*5 *Ibid.*, f.44r

*6 *Ibid.*, f.48r-49r.

そこで次のような式を考えてみるが、ここでバベッジは「この欠点は次のような表現により、算術への適用とは別のものとして、解析的過程を保つことで完全に除去される*7」と述べる。

$$\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}=1-x+x^2-\ldots x^n$$

前と同様に、dx を乗じて積分すると以下の式が得られるが、

$$\log(1+x)+(-1)^n\int\frac{x^{n+1}dx}{1+x}=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\frac{x^n}{n}$$

これは次のように変形できる。

$$\log(1+x)+\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+2)(1+x)}+\frac{(-1)^n}{n+2}\int\frac{x^{n+2}dx}{(1+x)^2}=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\frac{x^n}{n}$$

ここでのバベッジの議論は「解析的過程を保つ」と述べているが、例にあげている数式は右辺が無限級数となるものではなく、前の等号の議論とは関連づけることはできない。

続いてバベッジは「マクローリンの研究は流率法の正確さに起源があり、連続性による極限の方法は微分学に確固たる基礎を築いた。」と述べた後、「超越数や発散について、異なった方法をとる必要がある」と主張する*8。

そして最後に、バベッジは関数への適用について以下のような議論を行う。

$$d(xy)=xdy+ydx \qquad \text{及び} \qquad d(x+y)=dx+dy$$

であることから、$y=x^2$ とすれば、

$$d(xy)=d(x^3)=2x^2dx+x^2dx=3x^2dx$$

となる。すると一般的に次式が得られる。

$$d(x^n)=nx^{x-1}dx$$

このように d という文字に「微分する」という意味を持たせているのである。

そして、本章全体の議論をまとめて、バベッジは次のように述べる*9。

> 私が提案する目的は、解析学 (Analysis) もしくは記号の言語 (language of signs) を、単に幾何学的な思考や数字としての思考とは切り離して、いろいろに応用することである。解析学もしくは記号の言語は、それ自身を純粋に独自性のある命題へと分解する。また、少なくとも等式の意義を示すことは、両辺に指示された演算を正確に行った時、一方の辺に生じた文字はもう一方の辺に全く同じような状況のもとで生じることがわかること以外の何者でもないことになる。文字が何かの代用とされる場合、他のものはそれが何か明らかになる前に置き換えなければならない。

---

*7 *Ibid.*, f.49r.

*8 *Ibid.*, f.50r

*9 Babbage, *op. cit.*, f.44r

ここでバベッジは language of signs という言葉を使っているが、これは解析学と同じ意味に使われていることに留意しておく必要がある。

3 ダビーとフィッシュによる評価

バベッジの“General Notions Respecting Analysis”の内容については、ダビーとフィッシュが詳細に論じているので、その評価を彼らの論に沿って述べていくことにしたい。ここでの『代数学』序文というのは、1830 年に刊行された初版に付されたものであることに注意されたい。

3.1 ダビーによる評価

ダビーはピーコックによる『代数学』序文での主張を次のようにまとめている*10。

1. 代数は、単に算術を修正したものと常に考えられていた。
2. 代数はあらゆる特別な解釈とは独立した方法における記号の演算から成っている。
3. 算術は代数の特別な事例に過ぎないーピーコックは「提案の科学」と名付けた。
4. 等号 (=) は「代数的に等しい」という意味として用いられる。
5. 等しい形の不変性の原理

そして、「これらの考えがバベッジの論文に著されていることを示すことは可能である。」と述べ、バベッジによるこの本質についての理論は、ほとんど正確にピーコックが示した原理と同じであることがわかると続ける。そして、「この結論からは、バベッジはまたピーコックのそれと非常に良く似た議論を行っている。」と主張している*11。

これらを立証するためにダビーは、ピーコックの『代数学』序文とバベッジの“General Notions Respecting Analysis”での主張の類似性を指摘する。

まず第 1 の主張である「代数は、単に算術を修正したものと常に考えられていた。」というのは、ピーコックの序文にある言葉である*12。ここで、前節のバベッジの代数の意義について述べた言葉と比較すると、ほぼ同様な考え方を持っていることがわかる。

次に第 2 の主張である「代数はあらゆる特殊な解釈とは独立した方法における記号の演算から成っている。」ということを考えてみたい。

ここでピーコックは、加算や減算という演算の名称は、規則に従ったもので、記号自体が持つ特別な値とは独立したものであると主張する*13。一方バベッジの方も演算と記号とは独立したものであると同じ意見を述べている。

ピーコックによる 3 番目の「算術は代数の特別な事例に過ぎない」という言葉は*14、本章冒頭にあるバベッジの言葉と同じ主張である。

そして、第 4 の主張である「等号 (=) は「代数的に等しい」という意味として用いられる」について、ダビーはバベッジによる本章での議論の中で、一番スペースを用いて論じているものである。すなわち前節で述べたように、代数的に等しくても、算術的には誤っているものがあるという具体例を用いた説明である。

---

*10 Dubbey, *op. cit.*, p.103
*11 *Ibid.*, p.103
*12 G. Peacock, “Preface” , *Treatise on Algebra* (Cambridge: J. J. Deighton, 1830), vi.
*13 *Ibid.*, vii.
*14 *Ibid.*, vi.

前節で述べたバベッジの草稿にある式は、以下のようなものであった。

$$\log(1+x)+(-1)^n\int\frac{x^{n+1}dx}{1+x}=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\frac{x^n}{n}$$

これに対して、ダビーは正しい式として、次の式を提示している。具体的には、最終項に $(-1)^{n-1}$ を追加しているものである。

$$\log(1+x)+(-1)^n\int\frac{x^{n+1}dx}{1+x}=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

この式を変形すると以下のようになり、正しい形が得られるとダビーは述べる。

$$\log(1+x)+\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+2)(1+x)}+\frac{(-1)^n}{n+2}\int\frac{x^{n+2}dx}{(1+x)^2}=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

しかし前節で述べたように、右辺は無限級数とはなっていないので、これは例としては不適切なものである。

しかしダビーはこれらの式を例にとって、$x=1$ の場合に $\frac{1}{(1+x)}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ は算術的には正しくないが、式として「代数的」に考えてみるとこの式は正しいものである、と極めて重要な指摘を行っている[*15]

ピーコックの最後の主張である「等しい形の不変性の原理」というのは、少し説明が必要である。これは、法則の一般化を意味している。例えば整数で成り立つものが、分数や負の数で成立するような法則に拡張できるかどうかの議論である。それは、バベッジによる指数法則に関する議論と極めて類似している。

以上の議論やバベッジとピーコックの書簡を例に取りながら、ダビーは、証拠が見当たらない中での見解だがと前置きして、この驚くべき類似は両者の成立時期から考えて、ピーコックがバベッジの見解を無意識に採用したのではないかとさえ考えることができると述べている[*16]

3.2 フィッシュによる評価

フィッシュによる本章の評価は、ダビーのそれとは全く異なったものになっている。フィッシュの論文は "The Making of Peacock's *Treatise on Algebura: A Case of Creative Indecision*" という題名から容易にわかるように、ピーコックの『代数学』成立の観点から論じたものである。もちろん、そこではバベッジの本章についての議論がある。しかし、ダビーのように『代数学』序文と本章との類似点についての吟味はなされていない。フィッシュの論点は、バベッジとピーコックとの立脚点の相違を述べることから始まる。

フィッシュはまず代数学についての立脚点として、ハミルトンの 1837 年の論文による議論から次の 3 点があると述べる[*17]。

1. 実践派 (Practical School)
2. 文献学派 (Philological School)
3. 理論派 (Theoretical School)

---

*15 Dubbey, *op. cit.*, p.106.
*16 *Ibid.*, p.107.
*17 W. R. Hamilton, "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time" , *Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. XVII, pp.293-422.

これらについて、実践派は代数学を道具 (Instrument) として、文献学派は言語 (Language) として、理論派は熟考 (Contemplation) と捉えるものとフィッシュは説明する。そしてこの観点からすれば、バベッジの立場は非常に原理的なので、彼とピーコックの見解の相違は目立っているとフィッシュは主張する[*18]。バベッジの代数学に関する考え方は前節で見たように明らかに文献学派に属するが、ここではピーコックの見解は明確には示されていない。もちろんフィッシュはダビーの議論を踏まえて論じているのだが、バベッジとピーコックではその立脚するポイントが異なっているというところから議論を始めているのである。

例えば本章の代表的な議論である次式について、フィッシュは等号についての議論を行わず、バークレーによる無限小に関する議論の対象としている。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

ここで、$x = 1$ とすれば、

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

しかし、両辺に dx をかけて、対数をとると以下のようになる。

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

ここでフィッシュはバベッジによるバークレーの議論を吟味する。バベッジはバークレーの *Analyst* での議論を“the shifting of the hypothesis”と述べているが、これはフィッシュによれば「ありえない仮定の下での議論は、その議論の筋道は正しくても、結論としては間違っている。」というものである[*19]。

このバベッジによる dx を乗じて積分して得られた結果の右辺は、log の級数展開となっており、テイラー展開を基本としたラグランジュによる手段と同じものである。そしてバベッジは、この方法より“the shifting of the hypothesis”を回避できると述べている。しかしこれに替わる例としてあげられた等式は、ダビーによる議論のところでも述べたように右辺は無限級数にはなっておらず、例としては不適切なものである。

バークレーの議論は周知のように無限小を扱った極限を課題としているが、ラグランジュによる議論は無限小を扱った極限を回避できるが、それは厳密さを欠くという弱点がある。フィッシュは、バベッジはそれに気がついていたと主張する[*20]。

このように、フィッシュはダビーが論じた同じ数式について言及しているのだが、その論述の経過はダビーのそれとは大きく異なったものとなっている。

さらに、フィッシュによる本章を論じた結論はダビーのそれとは異なるところは少ないが、バベッジが解析学に関して文献学派であるという立場から論じているので、ピーコックとの論点の比較はなされておらず、バベッジによる論点の整理がなされているのみである。

しかし前述のように、ダビーの論文では指摘されることのなかったバークレーによる無限小に対する議論が採り上げられており、ラグランジュによる議論と重ね合わせてバベッジの論点が議論されていることに注目しているのは重要である。しかし残念ながら、バベッジはこれについて、それ以上の議論の展開をすることはなかった。

[*18] M. Fisch, “The Making of Peacock's *Treatise on Algebra : A Case of Creative Indecision*”, *The Archives for History of Exact Sciences*, 1999, Vol. 54, pp.144-5.

[*19] Babbage, *op. cit.*, f.48r 及び Fisch, *op. cit.*, p.150 note.

[*20] Fisch, *op. cit.*, pp.151-2.

4　まとめ

“Essays on the Philosophy of Analysis” は、既に述べたように 19 世紀の英国数学の状況を知る上で非常な貴重な文献である。その中でも本稿で論じた “General Notions Respecting Analysis” は、極めて重要な内容を含んでいる。それは、前節で述べたように、ダビーやフイッシュによる議論でも明らかであろう。

冒頭で述べたように、バベッジが主張しているのは法則の一般化であり、それは本章での主張である記号の持つ意味の吟味である。しかし、これはバベッジ独自の主張である可能性もあり、19 世紀当時の英国の数学者が抱いていた “analysis” という語句の正確な解釈については、異なっている可能性もある。

本章での議論のうち最も重要なことは、バベッジの記号に対する考え方である。その延長線上に等号 (=) の意味の議論も含まれることになる。本章にある言葉から、バベッジは解析学 (analysis) と記号の言語 (language of signs) を同等のものと考えていたと理解できる。すなわち代数学では算術とは異なり記号は一般化されることになるが、それを統一的に扱うのが記号の言語すなわち解析学という主張である。

前節でみたように、ダビーによる議論は本章でバベッジが与えた数式の解釈を行うことからその主張を確認する方法で論じているのに対し、フィッシュはハミルトンによる論文を引き、バベッジが解析学に対して取っている立場から本章を論じている。

両者の論述はともに正当なものと考えるが、ダビーはバベッジの立脚点を明確にしておらず、またフィッシュはピーコックの『代数学』序文と本章との類似点による議論がなされていないという不十分な点がある。しかし、双方で扱われた議論なしには本章は論じることができないものと考える。すなわち、前者は 1821 年頃の執筆と推定される “The Essays on the Philosophy of Analysis” 全体の立脚点にも繋がる課題であるし、後者は解析協会の主力メンバーであったピーコックの立場の実像を明らかにすることになるからである。

これらについて論じることは今後の課題としたいが、ピーコックによる『代数学』は 1830 年の 1 巻本の初版に付された序文と、1842 年の 2 巻からなる第 2 版の序文には大きな相違点があり、これらをあわせて論じることも今後に向けての大きな課題であると考えている。

参考文献

[1] Babbage, Ch., "Essays on Philosophy of Analysis", British Museum Additional Manuscripts 37202.

[2] Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978), (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004).

[3] Fisch, M., "The Making of Peacock's *Treatise on Algebra : A Case of Creative Indecision*", *The Archives for History of Exact Sciences*, 1999, Vol. 54, pp. 137-79.

[4] Hamilton, W. R., "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time", *Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. XVII, pp.293-422.

[5] Peacock, G., "Preface", *Treatise on Algebra* (Cambridge: J. J. Deighton, 1830).