

楢円関数論形成史叙述の試み

「楢円積分」と「超越的なもの」をめぐって

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
日本オイラー研究所
高瀬 正仁

はじめに

平成 23 年夏の数理研の研究集会「数学史の研究」では、「ヤコビとルジャンドルの往復書簡に見る初期楢円関数論」という題目を立てて講演を行った。ヤコビとルジャンドルの関係は非常に親密で、1827 年 8 月 5 日付のヤコビからルジャンドルへの手紙を第一書簡として、全部で 23 通の手紙が交わされた。内訳は、ヤコビからルジャンドルへの書簡が 11 通、ルジャンドルからヤコビへの書簡が 12 通である。この往復書簡の解読を通じ、ヤコビの楢円関数論の形成過程を概観することが当初のねらいであった。アーベルに言及するヤコビの言葉にも関心があった。ところが、それからしばらくしてヤコビの著作『楢円関数論の新しい基礎』の訳出に成功した。この翻訳作業の完了に影響されて、ヤコビとアーベルにとどまらず、楢円関数論の形成史の全容をあらためて回想してみたいと思うようになった。

楢円関数論の萌芽はすでにオイラーに認められ、オイラーと同時代のイタリアの数学者ファニャノの名も親しく念頭に浮かぶところである。これに加えてオイラーの萌芽にもまた萌芽があり、細かく観察すればオイラー以前の草創期の無限解析の状況の中にも後年の楢円関数論の契機が見つかると思う。

オイラー以降の様相も華やかであり、各時代の数学研究を代表する数学者たちはたいていみな楢円関数論の形成に大きく貢献した。楢円関数論はヨーロッパ近代の数学の流れに沿って展開しているのであり、本質を把握して「楢円関数論とは何か」という問いに答えるためには全容の概観が不可欠なのである。

楢円関数論史を概観するとおおよそ四段階に区分けされると思う。

I ライプニッツとベルヌーイ兄弟（ヤコブとヨハン）の時代

この時代の無限解析のテーマは「曲線を理解すること」であり、さまざまな曲線の形状が究明された。曲線の研究の実体は、接線を引くこと（微分計算）、曲率を算出すること（微分計算）、弧長を算出すること（積分計算）、曲線で囲まれる領域の面積を算出すること（積分計算）などであり、曲線を規定する方程式が提示されていることを前提にしたうえで、微分積分計算の教えるところから従って幾何学的な全体像の再現がめざされた。極大極小問題も「曲線の理論」の重要な応用例として認識され、解明されたので

ある。ほかに特異な位置を占める曲線論として最短降下線の問題があり、後年のオイラーの変分計算の糸口となった。

ベルヌーイ兄弟の無限解析にはレムニスケートの弧長を表示する積分、すなわちレムニスケート積分への関心がすでに現れている。楕円と双曲線の弧長積分は楕円積分になるが、その数値計算はむずかしい。

II オイラーとラグランジュの時代

オイラーは $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ という形の微分方程式の代数的積分を求めようとして行き詰ったが、ファニャノの論文を見て示唆を受け、打開することができた。オイラーはここから出発してさらに歩を進め、一般に $\frac{dx}{P(x)} = \frac{dy}{P(y)}$ ($P(x)$ は x の 4 次多項式) という形の微分方程式の代数的積分の探索に向かい、成功した。特に加法定理の発見は顕著である。アーベルはこのオイラーの発見をもって今日の楕円関数論のはじまりと見たようで、論文「楕円関数研究」の冒頭で言及した。

ラグランジュは数学研究のあらゆる局面においてオイラーを忠実に継承した人物である。ただし二番煎じではなく、きわめて創造的な継承者であった。楕円関数論の方面でも、ラグランジュはオイラーが踏み出した一步の意味合いを理解して、大きく展開した。オイラーとラグランジュのほかに、ファニャノとランデンの名をここに併記しておきたいと思う。

III アーベルとヤコビの時代

19 世紀のはじめ、ほぼ同時代にアーベルとヤコビが現れて、楕円関数論に新生面が開かれた。この二人の楕円関数論には共通の面もあるが、性格を異にする面もある。異質の面が見られるのはなぜかという点で、出発点が違ってくるからで、ヤコビがオイラーとラグランジュの理論を継承するところから出発したのに対し、アーベルはガウスが語ったかすかな示唆を感知して、ガウスのアイデアに形を与えようとしたのである。ただしヤコビはアーベルの理論の本領を即座に理解し、アーベルの最大の理解者になった。早世したアーベルの数学的意図を大きく延長し、「ヤコビの逆問題」を発見した。「ヤコビの逆問題」は楕円関数論の範疇を越えて代数関数の一般理論の中に生きている。この問題の発見は、アーベルとの数学的交友の中に出現したヤコビの最大の寄与である。

アーベルとヤコビの前には共通のテキストが存在した。それはルジャンドルの著作『さまざまな位数の超越物と求積法に関する積分計算演習』(以下、『積分演習』と略称する)である。内容はオイラーの楕円関数論の再現で、ルジャンドルはオイラーが遺した大量の諸論文と諸著作を集大成して浩瀚な報告書を作成したのである。

ヤコビはルジャンドルの著作を通じてオイラーの楕円関数論を学び、そこで試みられていたルジャンドルの変換理論の延長線上においてあるひとつの発見を得た。それがヤコビの楕円関数論のはじまりである。アーベルもまたルジャンドルに学んだ。アーベルはアイデアをガウスから汲んだが、ガウスにはまとまった著作はない。そのためにアーベルは思索を表現する手段をルジャンドルに借りたのである。

IV リーマンとヴァイエルシュトラスの時代

楕円関数の概念はどのように諒解するのがよいのであろうか。当初はアーベルにより「第一種楕円積分の逆関数」として認識され、ヤコビもこれを踏襲したが、ヤコビ以降、楕円関数の概念の諒解様式はさまざまに試みられた。なかでも際立っているのは解析性と二重周期性に着目してなされた基礎付けであり、これはリーマンとヴァイエルシュトラスの手で遂行された。

複素変数関数論の形成は19世紀の数学に生じた重大事であり、「ヤコビの逆問題」もまたこの理論の土台の上に解決された。そこで複素変数関数論の形成史と相俟って楕円関数論と代数関数論を語ることが重要なテーマになると思う。

スケッチはこれくらいにして、もっと具体的に精密な描写を重ねていくのが望ましいが、困難を強いられる作業であり、それに楕円関数論史には多くの素朴な疑問が散在する。本稿では最近になって気づいたことのいくつかを摘記するだけにとどめたいと思う。

I. 楕円積分という呼称について

1.

レムニスケート曲線の弧長をライプニッツの微積分で計算すると「レムニスケート積分」が出現するが、この積分は楕円積分の仲間である。円錐曲線のうち、放物線の弧長を表す積分は楕円積分ではないが、楕円と双曲線の弧長積分は楕円積分である。では、どうして「楕円積分」は「楕円積分」と呼ばれるのであろうか。今日の用語で楕円積分という名で呼ばれる一系の積分を指して、「レムニスケート積分」と呼ぶのも「双曲線積分」と呼ぶのもどちらも有力な候補と思われるが、双方を退けて「楕円積分」が前面に押し出されたのはいかなる理由によるのであろうか。

この素朴な疑問は長年の懸案でもあったが、ルジャンドルの著作『積分演習』を一読して教えられたことがあった。この著作の序文でルジャンドルは楕円関数論の歴史を回想し、オイラーに続いてイギリスの数学者ランデンに言及した。ルジャンドルの言葉は次の通り。

少し後に、イギリスの幾何学者ランデンは、双曲線の弧はどれも、楕円の二つの弧を用いて測定可能であることを示した。それまでのところでは二種類の曲線（註。楕円と双曲線）の弧を用いてしか表すことのできなかつたあらゆる積分を、楕円の弧のみに帰着させるという記念すべき発見である。

楕円関数論には「ランデン変換」という有名な変換が存在し、楕円積分の数値計算に利用されることがあるが、ランデン変換というものがどうして案出されたのか、その根源をルジャンドルは簡潔に指摘した。曲線の弧長測定は「曲線を知る」という微積分の当初のねらいに所属する課題だが、双曲線の弧長測定は楕円の弧長測定に帰着されることを明らかにした。それともうひとつ、レムニスケート積分という周知の楕円積分が存

在するが、この積分は適当な変数変換により楕円と双曲線の弧長積分に帰着される。この事実を明らかにしたのはイタリアの数学者ファニャノである。ファニャノとランデンが明らかにした事実を組み合わせると、レムニスケートと双曲線と楕円のうち、根底に位置を占めるのは楕円であるという認識がおのずと成立するのではないかと思う。

ランデン変換が登場するランデンの論文が公表されたのは1780年だが、この時点でもランデンは依然として微積分を育んだ世界、すなわち「曲線の世界」に生きていた様子がうかがわれる。

ランデンに続いて、ルジャンドルはラグランジュに言及する。

最後に、ラグランジュはその生涯において再び脚光を浴びた。ラグランジュは、次々と変換を繰り返して積分 $\int_{\frac{Pdx}{R}}$ を、類似の形ではあるが、係数の配置状況により近似計算が容易になるものに帰着させるための一般的な方法を与えたのである。これらの変換には二つのねらいがあった。ひとつは、同じ規則で作られる「超越的なもの」の系列の比較に用いることである。もうひとつのねらいは、それらの関数（註。「関数」という言葉が使われている）が受け入れる最速の近似を実現することである。

ラグランジュが実行したことは、ランデン変換の意味としてよく語られることによく合致する。ランデンは楕円積分の近似計算をめざしたのではないと思うが、ランデンが発見した変換を繰り返していくとモジュールが小さくなっていき、そこに着目することにより楕円積分の近似計算が可能になりそうである。ラグランジュはランデンを見て、そこに近似計算の可能性をみいだしたのであろう。ラグランジュの論文は1784/85年の「トリノ新論文集」巻2に掲載された。

II. 「超越的なもの」について

1. 変換理論

ルジャンドルの著作『積分演習』は全3巻で編成されている大作で、第1巻が刊行されたのは1811年。それから1814年に第2巻、1819年に第3巻が刊行された。アーベルもヤコビもこの作品を読んで楕円関数論を勉強したのであり、まさしくそこにこの著作の値打ちがあると思う。ルジャンドルは大きな著作を何冊も書き、18世紀の数学を、というのはつまりオイラーの数学というのとほぼ同じ意味になるが、集大成する役割を果たしたのはまちがいない、それはそれでかけがえのない仕事であった。

ヤコビはルジャンドルの『積分演習』を読み、変換理論においてあるアイデアを得て、「天文報知」の編纂者シューマッハーのもとに二通の手紙を書いて報告した。シューマッハーの目にも値打ちがあったようで、「ケーニヒスベルク大学のヤコビからシューマッハーへの二通の手紙の抜粋」という表題のもとで、「天文報知」巻6、第123号に掲載された。刊行されたのは1827年9月である。この時期のヤコビの所在地はケーニヒスベルク。第一書簡の日付は1827年6月13日。書き出しのあたりに目を通してみたいと思います。

楕円の超越物に関するノートをお送りいたしますので、あなたの雑誌に掲載していただけますよう、お願いいたします。私はこの理論においていくつかの非常に興味の深い発見をしたと自負しておりますが、それらを報告して幾何学者たちの判断にゆだねたく思います。

「楕円の超越物」と訳出した言葉の原語は *les transcendantes elliptiques* である。

$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c \sin^2 \varphi}}$ という形の積分は、モジュール c が多種多様であるのに応じて、さまざまな超越物に所属します。相互に移行可能なモジュールの系として知られているのはただひとつしかありませんし、ルジャンドル氏は『演習』において、それだけしか存在しないとさえ述べています。ではありませんが、実際には、そのような系は素数の個数だけ存在します。言い換えますと、互いに独立な無限に多くのそのような系が存在し、それらの各々は一箇の素数に対応します。すでに知られている系は素数 2 に対応するものです。

ここまできわば前置きで、変換理論においてルジャンドルが何をしたのか、簡潔に回想されている。この回想に続いてヤコビ自身の寄与が語られていくが、ルジャンドルが何をしたのかというところにも興味が深く、むしろここを押さえておかなければヤコビの発見の意味合いも不明瞭になりがちであろう。ヤコビによれば、ルジャンドルはともあれ $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c \sin^2 \varphi}}$ という形の積分を考えたのだが、これは定数 c に依存する積分で、この定数は積分 $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c \sin^2 \varphi}}$ の全体を制御するパラメータのような役割を果たしている。このような積分のすべての作る世界において相互変換を考えるのが、ルジャンドルのいう変換理論で、ヤコビはそれを「相互に移行可能なモジュールの系」を見つける問題としてとらえていることになる。

これはヤコビの言葉を再現しただけのことだが、これ以上のことはルジャンドル自身に聞いてみなければわからない。ルジャンドルの著作『積分演習』巻 1 の書き出しのあたりに目を通してみたいと思う。

2. ルジャンドルの『積分演習』

既述のようにルジャンドルの著作『積分演習』の原書名は

Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures

というのだが、訳語を割り当てようとするといつも困惑させられる二つのキーワードがある。ひとつは *transcendantes*、もうひとつは *quadratures* である。

前者の *transcendantes* は「超越的な」という訳語を割り振られることの多い形容詞だが、ここでは名詞として使われているから「超越的なもの」という感じになりそうである。数学で「超越的なもの」といえば、「代数的ではないもの」という意味合いで使われるのが普通である。この一語の前に *divers ordres* という言葉が見られるが、これは「さ

まざまな位数」という意味であるから、「超越的なもの」の各々には「位数」と呼ばれる数値が附随しているかのような印象がある。あるいはまた、「超越的なもの」の「超越性」にはさまざまな度合いがあるということが考えられているのかもしれない。もしそうなら、これを要するに「超越的なもののいろいろ」という感じになりそうであり、それなら別段、不可解な印象はない。

もうひとつのキーワードの *quadratures* は、歴史的には「求積法」すなわち「面積を求める方法」という意味合いで使われてきたと思われるが、その方法の実体はつまり「積分計算」です。そこで、ひとまず「求積法」という訳語をあてておいて、これをつねに積分計算のことと諒解することにしておくのも一案である。このような姿勢観察を基礎にして、ルジャンドルの著作『積分演習』の書名の全文表記は、ひとまず

『さまざまな位数の超越物と求積法に関する積分計算演習』

というふうになりそうである。

目次を概観すると、巻1は三部門で構成されている。

- 第一部 楕円関数
- 第二部 オイラー積分
- 第三部 求積法

第一部「楕円関数」の書き出しの部分は次の通り。

代数的に積分される微分式から円弧もしくは対数を用いて積分される微分式にいたるまで、ことごとくみな汲み尽くされてしまった後、幾何学者たちは楕円の弧や双曲線の弧を用いて積分されるすべての微分式を探索する仕事に打ち込んできた。

これが第一文で、末尾に脚註を示すマークがついている。その脚註に記されているのは、「マクローリン展開」に今日も名を残すイギリスの数学者マクローリンの著作『流率概論』と、ダランベールの名と「ベルリン科学アカデミー紀要、1746」という文言である。マクローリンの著作はニュートンの流率法を組織的に叙述した最初の作品として知られている。刊行は1742年。全二巻の大きな書物である。

ルジャンドルは微積分のはじまりにさかのぼって説き起こそうとしているかのように、書き出しの一文を見ただけでも、そんな雰囲気がよく伝わってくる。

ルジャンドルの『積分演習』の第一部の冒頭の第二文は次の通り。

これらの「超越的なもの」は、円関数と対数に続く一番はじめの序列を占めることになると考えられていた。そうして「新計算」の進歩のためには、このような還元を受け入れるあらゆる積分を、周知の一困難へと帰着させていかなければならなかった。

たったこれだけのことにすぎないが、今日ではもう見られない言葉が散見する。「新計算」の原語は *nouveaux calculs* で、これをそのまま訳出したが、「新しい計算」というのは今日の微積分のことであり、ライプニッツの時代には無限解析という名で呼ばれていた。無限解析もしくは微積分がどうして「新しい計算」なのかといえば、無限解析に先行してすでにいろいろな計算が存在していたからである。加減乗除に「冪根を取る」計算を合わせたものが代数的な計算であり、これに加えて対数計算なども存在した。この計算術の系譜に、17世紀になって新たに加わったのが微分と積分の計算であるから、「新しい計算」という呼称にはいかにも相応しい感じが伴っている。

「新しい計算」の実体は無限解析であり、その中味は微分計算と積分計算という、相互に逆向きの関係にある二種類の計算法で構成されている。ルジャンドルが『積分演習』において関心を寄せているのは積分計算のほうで、関心の中心は積分の計算法にある。では、何をもって「積分」といい、いかなる計算をもって「積分計算」というのであろうか。

こんなふうに考えていくと、おのずと無限解析のはじまりのころに引き戻されていくかのようであり、ライプニッツ、ベルヌーイ兄弟、ロピタル、ファニャノなど、それにオイラーの論文や著作が次々と念頭に浮かぶ。無限解析はオイラー以前とオイラーとは様相を異にするが、ルジャンドルは双方を承知している。ひとまずオイラーの流儀に従ってみよう。

3. オイラーにおける積分概念

x は変化量とし、 X (x の大文字) は x の関数としよう。オイラーは三通りの関数概念を語ったが、ここでは「解析的式としての関数」を考えてみる。オイラーの世界では関数もまた変化量であり、しかも「解析的式としての関数」は、与えられた変化量 x を元手にして新たな変化量を作っていくシステムとして機能するのであった。このような情勢のもとで $X dx$ という式を考えると、これが、ルジャンドルの言葉にも登場した「微分式」にほかならない。

「積分」の概念は関数に対してではなく、微分式を対象にして考えられている。微分式 $X dx$ の積分とは、等式

$$dy = X dx$$

を満たす変化量 y のことを指し、この y を

$$y = \int X dx$$

と表示する。そこで積分の問題というのは何かというと、なるべく多くの種類の微分式の積分を具体的に求めることであり、そのためにさまざまな工夫が案出されたのが、無限解析のはじまりのころの情景である。関数 X の形が簡単なものであれば、三角関数や

対数を元手にして Xdx の積分 y を表示することが可能であり、その状況は今日の微積分のテキストにも紹介されている通りである。今日では「三角関数を使って積分を計算する」などという言い方をしますが、そのところをルジャンドルはあるいは「円弧を用いて積分する」と言い、またあるいは「円関数を用いて積分する」と言い表している。

「円弧を用いる」という言い方にはオイラー以前の無限解析の雰囲気が強くただよっている。変数変換を工夫して積分の形を変形し、円弧を表示する積分、すなわち円積分に帰着させることができたなら、それで積分計算は完了する。円弧の長さは既知と見られているからである。微分式 Xdx の形が複雑になると、円弧や対数だけでは足らなくなるため、無限解析のはじまりのころの数学者は楕円や双曲線の弧を持ち出して、それらを表示する積分に帰着させようとして工夫を凝らした。

微分式 Xdx における関数 X の意味を広く取り、「 x の変化の仕方に相互に依存しながら変化する変化量」、あるいは「 x が取る個々の値に対し、対応する値がそのつど確定する変化量」というふうに理解すると、微分式 Xdx の積分の意味合いはとたんに不明瞭になってしまう。オイラーはすでにそのような場合をも考察しようとしたが、オイラーが意図したことが具体化するにはコーシーを待たなければならなかった。

「新しい計算」と「積分」についてはこれでよいとして、さてその次に気に掛かるのは、「これらの「超越的なもの」は、円関数と対数に続く一番はじめの序列を占める」という文言である。「超越的なもの」にもいろいろな種類がありそうだが、それらに序列をつけて配列すると、円関数（というよりも、ここでは円弧というほうが適切である）と対数の次に真っ先に登場するのが「楕円の弧や双曲線の弧」であるというのが、文言の中味である。

積分の概念に立ち返って微分式 Xdx の積分と呼ばれる変化量 $y = \int Xdx$ を考えると、この変化量はひんぱんに超越的になる。これはどのような意味かという、 y 自身が超越的というのではなく、「 x に関して超越的」という意味である。さらに言い換えると、「 x と y の間に代数的な関係が存在しない」ということにほかならない。

微分計算を楕円や双曲線に適用して弧の長さを算出すると、弧の線素、すなわち弧の無限小部分の長さを表す微分式 Xdx が手に入る。この場合、 X は x と定量を用いて代数的に組み立てられる簡単な形の微分式で、加減乗除のほかには「平方根を開く」という程度の演算しか使われないが、それでも弧長を表す積分 y は x に関して超越的である。

楕円や双曲線は古くから円錐曲線としてよく知られていた曲線であることでもあり、積分の計算にあたって、円の次に利用するものとして楕円や双曲線が念頭に浮かぶのはいかにも自然である。この素朴な連想により、楕円や双曲線は多種多様な「超越的なもの」の間で「一番はじめの序列を占める」ことになった。

それなら「二番目の序列」にはどのような「超越的なもの」が位置を占めるのかという、そういうものは存在しないのではないかと思う。無限解析のはじまりの時点で積分の算出が問題になり、数学者たちの関心を集め、円弧や対数に帰着させることが試みられた。これはさほどの困難もなくできたが、そもそもどこに問題があったのかというと、簡単な形の微分式の積分がすぐに超越的になってしまい、正体をつかむのがむずかしかったのである。

これに関連してファニャノの論文などが思い起こされるが、ファニャノは「レムニスケートを測定する方法 第一論文」という論文の前書きでレムニスケート曲線に言及した。ベルヌーイ兄弟（ヨハンとヤコブ）はイソクロナ・パラセントリカ、すなわち測心等時曲線の弧長を測定しようとして、それをレムニスケート曲線の弧長測定に帰着させることに成功し、これによってレムニスケート曲線が有名になったというのであった。このようなことがつまり、「曲線の世界」における積分計算の実体なのであり、ここから「曲線」の一語を抜いて描写を重ねていくと「微分方程式の世界」への道が開かれていく。そのような観点に立って、これを実行したのがオイラーであった。

ファニャノの言葉の先をもう少し回想すると、ファニャノはベルヌーイ兄弟の成果を踏まえたとて、レムニスケート曲線の弧長測定をさらに楕円や双曲線の弧長測定に帰着させた。ファニャノはこう言っている。

レムニスケートよりもいっそう簡単な何かある他の曲線を媒介としてレムニスケートを作図するとき、イソクロナパラセントリカのみならず、レムニスケートに依拠して作図することの可能な他の無数の曲線の、いっそう完全な作図が達成されることは明らかである。

このファニャノの言葉はそのままルジャンドルの言葉に連繋する。

4. 超越的な変化量の世界

ここまでのところでわかったことを振り返ると、「超越的なもの」というのはどうやら「超越的な変化量」のことと理解してよさそうであり、それなら無限解析のはじまりのころからの伝統がそのまま踏襲されていることになる。円や楕円や双曲線の弧を表示する積分は超越的な変化量だが、オイラーが認識していたように、一般に積分の世界は超越的な変化量の宝庫である。ルジャンドルはその情景を指して「さまざまな位数の *transcendantes* 」と言い表したのであろうから、ここに「関数」の一語を割り当てて「超越関数」とするのはやはり早計で、ひとまず「さまざまな位数の超越量」というくらいにしておくのが適切と思う。ただし、少し後に「関数」の一語がいわば復活し、「楕円関数」という用語が使われることになる。ここで「関数」は *fonctions* の訳語である。「楕円関数」という用語はルジャンドルによる造語で、顧みれば第一部のタイトルからしてすでに「楕円関数」となっていた。

ルジャンドルの言葉にもどると、「新計算」が進歩するためには、楕円や双曲線に帰着される積分のすべてを、周知の一困難へと帰着させていかなければならないのだとルジャンドルは明言した。ここではとりあえず「周知の一困難」という訳語をあてたが、原語は *un point de difficulté bien connu* である。*bien connu* は「よく知られている」という意味の形容句であるから、ここには別段、問題はないが、*un point de difficulté* を「ひとつの困難」と訳出するのはあまりよくないと思う。訳しにくいのが、*point de depart* であれば「出発点」がぴったりであり、これにならうなら「困難点」とでもなりそうなどころだが、熟さない日本語になってしまう。

ルジャンドルが言いたいことを付度すると、さまざまな困難がそこに集約されていくような「困難のポイント」が存在し、その一点さえ突破すれば新たな地平が開かれてい

くのだというほどのことであろうと思う。次に引く一文に、そのあたりの消息が現われている。

この道筋を通して積分される諸式はおびただしい数にのぼる。だが、それらの結果を連結するものは存在せず、ひとつの理論が形成されるにはほど遠い状態であった。ひとりのきわめて聡明なイタリアの幾何学者が、深遠な思索へとむかう道を切り開いた。彼は、与えられたあらゆる楕円上に、もしくはあらゆる双曲線上に、その差がある代数的な量に等しくなるような二つの弧を無限に多くの仕方で指定することができることを示した。同時に、レムニスケートは、そのさまざまな弧を、たとえそれらの弧の各々が高位の「超越的なもの」であるとしても、円弧と同様に代数的に倍加したり分割したりできるという、特異な性質を備えていることを明らかにした。

ここで語られているイタリアの幾何学者とはファニャノのことである。

5. 曲線の理論から関数の理論へ

ファニャノに続いてオイラーの名が語られる。

オイラーは、際立った幸運とみなされる天の配剤により、もっともこのような偶然は偶然をあらしめる力のある者にしか訪れないのではあるが、類似の形をもつ分離した二項から成る微分方程式の完全代数的積分見いだした。それらの二項の各々は円錐曲線の弧を用いるほかに積分の手だてのないものである。

オイラーはここに言われている形の微分方程式の積分を求めようとして壁にぶつかっていたが、そこにファニャノから数学論文集が送られてきた。オイラーはその論文集の中に困難を乗り越えるヒントを発見したのだが、この数学史上に名高いエピソードについては、すでに何度か触れる機会がありました。ファニャノに触発されたオイラーは二篇の論文を書き、それが今日の楕円関数論の源泉になった。

「オイラーはこの重要な発見に誘われて、オイラー以前には見られなかったような非常に一般的な仕方で、同じ楕円の弧や同じ双曲線の弧ばかりではなく、一般に式 $\int \frac{Pdx}{R}$ に含まれるあらゆる「超越的なもの」を比較した。ここで、 p は x の有理関数、 R は、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ は定数として、 $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4}$ という形の冪根である。

楕円や双曲線の弧は $\int \frac{Pdx}{R}$ という形の式に包摂されますが、一般的な視点に立脚してこのような形の式を考察すると、曲線とは無関係な「超越的なもの」が出現します。曲線とは無関係に微分方程式が書き下されて、しかもその積分を見つけることができることをオイラーは示したのである。無限解析が「曲線の理論」を離れていこうとする具体的な契機がここにある。

オイラーによって見いだされた積分はあまりにもめざましかったので、特別に幾何学者たちの注意を引かずにはおかなかった。ラグランジュはこの積分を解析学の通常の手順の中に取り込もうと欲し、きわめて巧妙な方法により、これに成功した。その方法の適用は下位の「超越的なもの」から「オイラーの「超越的なもの」」へと、だんだんと高まっていく。だが、ラグランジュはオイラーの結果よりも一般的な結果に到達しようと試みたものの、うまくいかなかった。

ルジャンドルの歴史的回想は、このあたりから次第に佳境に入っていく。

附録 ヤコビとルジャンドルの往復書簡一覧

書簡総数 23 通.

内訳

ヤコビからルジャンドルへの書簡は 11 通.

ルジャンドルからヤコビへの書簡は 12 通.

第 1 書簡 ヤコビからルジャンドルへ / 1827 年 8 月 5 日

第 2 書簡

ルジャンドルからヤコビへ / 1827 年 11 月 30 日

第 3 書簡

ヤコビからルジャンドルへ / 1828 年 1 月 12 日

第 4 書簡

ルジャンドルからヤコビへ / 1828 年 2 月 9 日

第 5 書簡

ヤコビからルジャンドルへ / 1828 年 4 月 12 日

第 6 書簡

ルジャンドルからヤコビへ / 1828 年 4 月 14 日

第 7 書簡

ルジャンドルからヤコビへ / 1828 年 5 月 11 日

第 8 書簡

ルジャンドルからヤコビへ / 1828 年 6 月 16 日

第 9 書簡

ヤコビからルジャンドルへ / 1828 年 9 月 9 日

第 10 書簡

ルジャンドルからヤコビへ / 1828 年 10 月 15 日

第 11 書簡

ヤコビからルジャンドルへ / 1829 年 1 月 18 日

第 12 書簡

ルジャンドルからヤコビへ / 1829 年 2 月 9 日

第 13 書簡

ヤコビからルジャンドルへ／ 1829 年 3 月 14 日

第 14 書簡

ルジャンドルからヤコビへ／ 1829 年 4 月 8 日

第 15 書簡

ヤコビからルジャンドルへ／ 1829 年 5 月 23 日

第 16 書簡

ルジャンドルからヤコビへ／ 1829 年 6 月 4 日

第 17 書簡

ヤコビからルジャンドルへ／ 1829 年 6 月 14 日

第 18 書簡

ルジャンドルからヤコビへ／ 1829 年 7 月 16 日

第 19 書簡

ヤコビからルジャンドルへ／ 1829 年 8 月 19 日

第 20 書簡

ヤコビからルジャンドルへ／ 1830 年 7 月 2 日

第 21 書簡

ルジャンドルからヤコビへ／ 1830 年 10 月 1 日

第 22 書簡

ヤコビからルジャンドルへ／ 1832 年 5 月 27 日

第 23 書簡

ルジャンドルからヤコビへ／ 日付なし