数理解析研究所講究録
第 1791 巻 2012 年 158-163

P2/P1 有限要素を用いた離散版ソレノイダル拡張定理の証明とその応用について

Proof of discrete solenoidal extension theorem using P2/P1 finite elements with some applications

柏原 崇人 (東京大学大学院数理科学研究科) [*1]
Takahito Kashiwabara (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

1 概要

非圧縮ストークス方程式に対する摩擦型境界条件問題は，混合型変分不等式で記述されることが知られている．このような変分不等式の解の存在と一意性は，古典的な混合法や楕円型変分不等式の理論からは直ちには従わず，「ソレノイダル拡張定理」という補題を用いて証明が完結する．そのため，有限要素法で構成した近似問題において同様の方針で解の存在と一意性を示そうとすると，この補題の離散版が必要になる．本稿では，P2/P1 要素に対して成り立つ inf-sup 条件を用いて離散版のソレノイダル拡張定理が成り立つことを証明する．

2 摩擦型境界条件問題に対する解の存在と一意性の証明

Ω を 2 次元の多角形領域とし，その境界 Γ は $\Gamma=\overline{\Gamma}_0\cup\overline{\Gamma}_1$, $\Gamma_0\cap\Gamma_1=\emptyset$ と分かれているとする．さらに，Γ_1 は多角形のちょうど 1 辺に一致すると仮定する．Γ_0 で粘着境界条件，Γ_1 で摩擦型境界条件滑り境界条件を満たすストークス方程式を考える：

$$\begin{cases}-\nu\Delta u+\nabla p=f, \quad \operatorname{div} u=0 \quad \text{in } \Omega,\\ u=0 \quad \text{on } \Gamma_0,\\ u_n=0, \quad |\sigma_\tau|\le g, \quad \sigma_\tau u_\tau+g|u_\tau|=0 \quad \text{on } \Gamma_1.\end{cases} \tag{1}$$

ここで，ν,u,p,f,g はそれぞれ粘性係数，流速ベクトル，圧力，外力ベクトル，摩擦係数である．n, τ は Γ 上の外向き単位法ベクトルと単位接ベクトルを表し，$u_n=u\cdot n$, $u_\tau=u\cdot\tau$ とする．応力ベクトル σ は応力テンソル $\mathbb{T}=-p\mathbb{I}+\nu(\nabla u+(\nabla u)^T)$ により $\sigma=\mathbb{T}n$ で定義され，$\sigma_n=\sigma\cdot n$, $\sigma_\tau=\sigma\cdot\tau$ とおく．境界値問題 (1) は次の混合型変分不等式 (mixed-type variational inequality) で定式化されることが知られている [2]：

$$\begin{cases}a(u,v-u)+b(v-u,p)+j(v_\tau)-j(u_\tau)\ge(f,v-u)_{L^2(\Omega)^2} & (\forall v\in V_n),\\ b(u,q)=0 & (\forall q\in\mathring{Q}).\end{cases} \tag{2}$$

[*1] tkashiwa@ms.u-tokyo.ac.jp

ただし，$V_n = \{v \in H^1(\Omega)^2 \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_0,\ v_n = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$, $\mathring{Q} = L^2_0(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega q\,dx = 0\}$ であり，$a(u,v) = \frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\,dx$, $b(v,q) = -\int_\Omega \mathrm{div} v\, q\,dx$, $j(v_\tau) = \int_{\Gamma_1} g|v_\tau|\,ds$ である．

注意　Γ_1 が多角形 Ω のちょうど 1 辺に一致するという仮定を置くのは，話を簡単にする (n, τ が Γ_1 上定数になるなど) ためだけではない．より重要な理由は，Γ_1 が Ω の 2 辺以上にまたがると，Ω の頂点で n や τ が定義できなくなることである．ただし，上記の V_n の定義において「$u_n = 0$」を「$\Gamma_1 \cap \{\Omega$の頂点$\}$ では $u = 0$」と解釈するなら，以下の議論を Γ_1 が Ω の 2 辺以上にまたがる場合に拡張することができる．

(2) の解の存在・一意性を示そう．試験関数 $v \in V_n$ を $V_{n,\sigma} = V_n \cap V_\sigma$ と $\mathring{V} = H^1_0(\Omega)^2$ に制限してみる (ここで $V_\sigma = \{v \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathrm{div}\, v = 0\}$ とおいた)．すると，(u,p) が (2) の解ならば，それは楕円型変分不等式：

$$a(u, v-u) + j(v_\tau) - j(u_\tau) \geq (f, v-u)_{L^2(\Omega)^2} \qquad (\forall v \in V_{n,\sigma}), \tag{3}$$

および混合型の方程式：

$$\begin{cases} a(u,v) + b(v,p) = (f,v) & (\forall v \in \mathring{V}) \\ b(u,q) = 0 & (\forall q \in \mathring{Q}) \end{cases} \tag{4}$$

を満たさなければならない．(3)–(4) に解が一意に存在することは，古典的な楕円型変分不等式の理論 [4] と混合法の理論 [3] から直接従う．つまり，(2) の解の候補が一つしかないことはわかった．しかし，$v \in V_n \setminus (V_{n,\sigma} \cup \mathring{V})$ に対しても (2) が成り立つことを示さないと解の存在は言えたことにならない．このステップを完成させるには次の補題が必要となる：

> 補題 (ソレノイダル拡張定理) $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)^2$ が $\int_\Gamma \eta_n\,ds = 0$ を満たすとき，$w \in V_\sigma$ が存在して $w = \eta$ on Γ が成り立つ．

証明は [3, p.24] にある．それでは，全ての $v \in V_n$ に対して (2) が成り立つことを示そう．ソレノイダル拡張定理より，ある $w \in V_\sigma$ が存在して $w = v$ on Γ, 特に $w_\tau = v_\tau$ on Γ_1 とできる．

$$\begin{aligned} &a(u, v-u) + b(v-u, p) + j(v_\tau) - j(u_\tau) - (f, v-u)_{L^2(\Omega)^2} \\ =\,& \underbrace{a(u, w-u) + j(w_\tau) - j(u_\tau) - (f, w-u)}_{\geq 0} + \underbrace{a(u, v-w) + b(v-w, p) - (f, v-w)}_{=0} \geq 0 \end{aligned}$$

となるので，確かに (u,p) は (2) の解になっており，これで証明が終わる．

3　摩擦型境界条件問題の有限要素近似

[5] において，(2) に対する次の有限要素近似問題を提案した：

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) + b(v_h - u_h, p_h) + j_h(v_{h\tau}) - j_h(u_{h\tau}) \geq (f, v_h - u_h)_{L^2(\Omega)^2} & (\forall v_h \in V_{nh}), \\ b(u_h, q_h) = 0 & (\forall q_h \in \mathring{Q}_h). \end{cases} \tag{5}$$

ただし，$\{\mathscr{T}_h\}_h$ を $\overline{\Omega}$ の正則な三角形分割の族（h は $\mathscr{T}_h$ に属する三角形の辺長の中で最大のものを表す）として，P2/P1 要素による近似空間 V_h, Q_h は次で定義される：

$$
\begin{aligned}
V_h &= \{v_h \in C(\overline{\Omega})^2 \mid v_{h|_T} \in P_2(T)^2 \quad (\forall T \in \mathscr{T}_h)\},\\
Q_h &= \{q_h \in C(\overline{\Omega}) \mid q_{h|_T} \in P_1(T) \quad (\forall T \in \mathscr{T}_h)\}.
\end{aligned}
$$

$P_2(T)$, $P_1(T)$ は T 上の 2 次多項式及び 1 次多項式の全体を表す．$V_{nh} = V_h \cap V_n$, $\mathring{Q}_h = Q_h \cap \mathring{Q}$ とおく．$j_h(v_{h\tau})$ は $j(v_{h\tau}) = \int_{\Gamma_1} g|v_{h\tau}|\,ds$ の複合シンプソン近似である．

このように離散化した混合型変分不等式の解の存在・一意性を，前節の連続問題の場合と同様の証明で示したい．そのためには上記のソレノイダル拡張定理の離散版が必要となる：

<u>定理 (離散版ソレノイダル拡張定理)</u> $\eta_h \in \{v_{h|\Gamma} \mid v_h \in V_h\}$ が $\int_\Gamma \eta_{hn}\,ds = 0$ を満たすとき，$w_h \in V_{h,\sigma}$ が存在して $w_h = \eta_h$ on Γ が成り立つ．ただし，$V_{h,\sigma} = \{v_h \in V_h \mid b(v_h, q_h) = 0 \quad (\forall q_h \in Q_h)\}$ である．

$V_{h,\sigma}$ と V_σ の間に包含関係はなく，離散版ソレノイダル拡張定理は連続版からは従わないため，これを示すことは自明ではない．一方で，この定理さえ示せば，(5) の解の存在と一意性は連続問題の場合と完全にパラレルな方法で証明できる（第 5 節参照）．

4　離散版ソレノイダル拡張定理の証明

任意の $\eta_h \in \{v_{h|\Gamma} \mid v_h \in V_h\}$ をとり，それを V_h の元 $\hat{w}_h$ に拡張しておく．この $w_h \in V_h$ に対し，$(w_h^*, p_h^*) \in \mathring{V}_h \times \mathring{Q}_h$（ここで $\mathring{V}_h = V_h \cap \mathring{V}$ と書いた）を求める次の混合型方程式を考える：

$$
\begin{cases}
a(w_h^*, v_h) + b(v_h, p_h^*) = 0 & (\forall v_h \in \mathring{V}_h),\\
b(w_h^*, q_h) = -b(\hat{w}_h, q_h) & (\forall q_h \in \mathring{Q}_h).
\end{cases}
\tag{6}
$$

よく知られているとおり，P2/P1 要素に対しては inf-sup 条件

$$
\beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \le \sup_{v_h \in \mathring{V}_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)^2}} \qquad (\forall q_h \in \mathring{Q}_h)
\tag{7}
$$

が成り立つので，(6) には一意な解 (w_h^*, p_h^*) が存在する．そこで $w_h = w_h^* + \hat{w}_h$ とおけば，$w_h^* \in \mathring{V}_h$ なので $w_h = \hat{w}_h = \eta_h$ on Γ である．さらに (6) の第 2 式から，全ての $q_h \in \mathring{Q}_h$ に対し $b(w_h, q_h) = 0$ が成り立つ．後は $b(w_h, 1) = 0$ となることを示せばよいが，実際

$$
b(w_h, 1) = -\int_\Omega \operatorname{div} w_h\,dx = -\int_\Gamma w_{hn}\,ds = -\int_\Gamma \eta_{hn}\,ds = 0
$$

となることが分かる．したがって $w_h \in V_{h,\sigma}$ であり，これで証明が終わる．

<u>注意</u>　η_h を $\hat{w}_h$ へ拡張する際に，離散安定なリフト作用素 [1, Theorem 5.1] を用いれば，η_h と最終的に得られる w_h の間の評価として次が得られる：

$$
\|w_h\|_{H^1(\Omega)^2} \le C \|\eta_h\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)^2}.
$$

ただし C は h に依らない定数である.

5 応用 1: 摩擦型境界条件の近似問題に対する解の存在証明

(5) の解の存在と一意性を示そう. まず, 楕円型変分不等式の存在と一意性の理論 [4] より,

$$a(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_{h\tau}) - j_h(u_{h\tau}) \geq (f, v_h - u_h)_{L^2(\Omega)^2} \qquad (\forall v_h \in V_{nh} \cap V_{h,\sigma})$$

を満たす $u_h \in V_{nh} \cap V_{h,\sigma}$ がただ 1 つ存在する. すると, inf-sup 条件 (7) より,

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f, v_h) \qquad (\forall v \in \mathring{V}_h)$$

を満たす $p_h \in \mathring{Q}_h$ がただ 1 つ存在する. 後は任意の $v_h \in V_{nh}$ に対して (5) の第 1 式が成り立つことを言えばよい. Γ 上 $v_{hn} = 0$ なので, 離散版ソレノイダル拡張定理から, $v_h|_\Gamma$ を $w_h \in V_{h,\sigma}$ に拡張できる. よって,

$$\begin{aligned}
&a(u_h, v_h - u_h) + b(v_h - u_h, p_h) + j_h(v_{h\tau}) - j_h(u_{h\tau}) - (f, v_h - u_h)_{L^2(\Omega)^2} \\
&= \underbrace{a(u_h, w_h - u_h) + j_h(w_{h\tau}) - j_h(u_{h\tau}) - (f, w_h - u_h)}_{\geq 0} \\
&\qquad\qquad + \underbrace{a(u_h, v_h - w_h) + b(v_h - w_h, p_h) - (f, v_h - w_h)}_{=0} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

となるので, (u_h, p_h) が (5) の解であることが示された.

6 応用 2: 非標準的な inf-sup 条件の証明

摩擦型滑り境界条件問題 (1) の代わりに, n と τ の役割を入れ替えた摩擦型漏れ境界条件問題

$$\begin{cases}
-\nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\
u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \\
u_\tau = 0, \quad |\sigma_n| \leq g, \quad \sigma_n u_n + g|u_n| = 0 \quad \text{on } \Gamma_1.
\end{cases}$$

を考えることもできる. この場合の弱形式は, ([2] 参照)

$$\begin{cases}
a(u, v-u) + b(v-u, p) + j(v_n) - j(u_n) \geq (f, v-u)_{L^2(\Omega)^2} & (\forall v \in V_\tau), \\
b(u, q) = 0 & (\forall q \in Q).
\end{cases} \tag{8}$$

ここで, $V_\tau = \{v \in H^1(\Omega)^2 \,|\, v = 0 \text{ on } \Gamma_0,\ v_\tau = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$, $Q = L^2(\Omega)$ であり, $j(v_n) = \int_{\Gamma_1} g|v_n|\, ds$ である. 圧力の空間が $\mathring{Q} = L^2_0(\Omega)$ ではなく, 定数関数も含んだ Q になっていることに注意したい. これは, 摩擦型漏れ境界条件に現れる σ_n が u だけでなく p にも依存することと関係しており, 摩擦型滑り境界条件のときと異なり圧力の加法定数を無視できないことを示唆している.

その結果，(8) の有限要素近似を考えて誤差評価を行う際，通常の $\mathring{V}_h$-$\mathring{Q}_h$ 型 inf-sup 条件 (7) だけでは不十分になり，$V_{\tau h}$-Q_h 型の inf-sup 条件

$$\beta\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{v_h \in V_{\tau h}} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)^2}} \qquad (\forall q_h \in Q_h) \tag{9}$$

が必要になる．ただし，$V_{\tau h} = V_\tau \cap V_h$ である．

(9) を，離散版ソレノイダル拡張定理の証明と類似のテクニックで示そう．

命題 (非標準的な inf-sup 条件) Γ_1 の端点を L, M とし，L と M の中点 N がある $T \in \mathscr{T}_h$ の頂点になっていると仮定する．このとき (9) が成り立つ．

(証明)　任意の $p_h \in Q_h$ に対し，$\frac{b(u_h, p_h)}{\|u_h\|_{H^1(\Omega)^2}} \geq \beta\|p_h\|_{L^2(\Omega)}$ となる $u_h \in V_{\tau h}$ と $\beta > 0$ が存在することを示せばよい．

まず，$\eta_h \in \{v_{h|\Gamma} \,|\, v_h \in V_{\tau h}\}$ を次で定める：

$$\begin{cases} \eta_h = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \\ \eta_{h\tau} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ \eta_{hn}(L) = \eta_{hn}(M) = 0,\ \eta_{hn}(N) = -2(p_h, 1)_{L^2(\Omega)}/|\Gamma_1|, \\ \Gamma_1 \setminus \{N\} \text{ 上では } \eta_{hn} \text{ は 1 次関数.} \end{cases}$$

ただし $|\Gamma_1|$ は Γ_1 の長さである．直接計算により

- $\int_{\Gamma_1} \eta_{hn}\, ds = -(p_h, 1)_{L^2(\Omega)}$,
- $\|\eta_h\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)^2} \leq C\|\eta_h\|_{H^1(\Gamma_1)^2} \leq C|(p_h, 1)_{L^2(\Omega)}| \leq C\|p_h\|_{L^2(\Omega)}$,

となる．離散安定なリフト作用素 [1, Theorem 5.1] を用いて η_h を $\hat{u}_h \in V_h$ に拡張すると，$\hat{u}_h \in V_{\tau h}$ かつ $\|\hat{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C\|\eta_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)^2} \leq C\|p_h\|_{L^2(\Omega)}$ とできる．

次に，$\mathring{V}_h$-$\mathring{Q}_h$ 型 inf-sup 条件より，混合型方程式

$$\begin{cases} a(u_h^*, v_h) + b(v_h, p_h^*) = 0 & (\forall v_h \in \mathring{V}_h), \\ b(u_h^*, q_h) = (p_h, q_h)_{L^2(\Omega)} - b(\hat{u}_h, q_h) & (\forall q_h \in \mathring{Q}_h). \end{cases}$$

はただ 1 つの解 $u_h^* \in \mathring{V}_h$, $p_h^* \in \mathring{Q}_h$ を持ち，次のノルム評価が成り立つ：

$$\|u_h^*\|_{H^1(\Omega)} + \|p_h^*\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|p_h + \operatorname{div}\hat{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|p_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{u}_h\|_{H^1(\Omega)}) \leq C\|p_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

今，$u_h = \hat{u}_h + u_h^*$ とおけば，$\|u_h\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C\|p_h\|_{L^2(\Omega)}$ である．さらに，

$$b(u_h, q_h) = (p_h, q_h)_{L^2(\Omega)} \qquad (\forall q_h \in \mathring{Q}_h),$$

及び

$$b(u_h, 1) = -\int_\Omega \operatorname{div} u_h\, dx = -\int_\Gamma u_{hn}\, ds = -\int_\Gamma \hat{u}_{hn}\, ds = -\int_\Gamma \eta_{hn}\, ds = (p_h, 1)_{L^2(\Omega)},$$

が成り立つから，全ての $q_h \in Q_h$ に対して $b(u_h, q_h) = (p_h, q_h)_{L^2(\Omega)}$ となる．したがって特に $q_h = p_h$ ととれば，

$$\frac{b(u_h, p_h)}{\|u_h\|_{H^1(\Omega)^2}} = \frac{\|p_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_h\|_{H^1(\Omega)^2}} \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C} \|p_h\|_{L^2(\Omega)},$$

を得るので，これで証明が終わる．

注意 N があるT $T \in \mathscr{T}_h$ の頂点でない場合も，$h \leq |\Gamma_1|/3$ となるぐらい h が十分小さければ，N に最も近い $T \in \mathscr{T}_h$ の頂点を N と選び直すことで，上記と同様に (9) を示せる．

7 おわりに

本稿では 2 次元の P2/P1 要素に限って離散版ソレノイダル拡張定理の証明を与えた．これ以外の有限要素空間 V_h, Q_h を考えた場合に同様の事実は成り立つだろうか．上記の証明を見れば分かるとおり，$\mathring{V}_h$-$\mathring{Q}_h$ 型 inf-sup 条件があれば離散版ソレノイダル拡張定理はその他の有限要素に対しても拡張できる．たとえば，三角形要素としては P1b/P1 要素 (MINI 要素)，P2-iso-P1 要素，四角形要素としては Q2/Q1 要素が要件を満たす．

参考文献

[1] C. Bernardi and V. Girault, *A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements*, SIAM J. Numer. Anal. **35** (1998), 1893–1916.

[2] H. Fujita, *A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions*, RIMS Kôkyûroku **888** (1994), 199–216.

[3] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equaitons*, Springer-Verlag, 1986.

[4] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, 1984.

[5] T. Kashiwabara, *On a finite element approximation of the Stokes problem under leak or slip boundary conditions of friction type*, arXiv:1012.4982 (2010).