

# Julia 集合の描画アルゴリズムとその精度評価

吉田 怜史

SATOSHI YOSHIDA

防衛大学校 理工学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, NATIONAL DEFENSE ACADEMY \*

藤村 雅代

MASAYO FUJIMURA †

防衛大学校 数学教育室

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL DEFENSE ACADEMY ‡

後藤 泰宏

YASUHIRO GOTOH

防衛大学校 数学教育室

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL DEFENSE ACADEMY §

## Abstract

Julia 集合を鮮明に描画する方法としては, Y. Fisher らにより導入された距離限界法 (DEM) と呼ばれる描画アルゴリズムが有効である. しかし, このアルゴリズムで用いる距離の近似式の導出には, ある種の関数の近似列を用いているため, 精度を評価することは難しい. そのため距離の近似式を双曲距離の立場から再構成することで, 近似式の精度の計算を可能にした.

## 1 はじめに

Y. Fisher らによる距離限界法 (Distance Estimator Method) と呼ばれる 2 次多項式の Julia 集合の描画アルゴリズム ([1] 参照) について紹介するとともに, このアルゴリズムに用いられる近似式の精度評価を行う. このアルゴリズムは Julia 集合の点そのものではなく, Julia 集合の  $\varepsilon$ -近傍を描画するため, 特に内点を持たない充填 Julia 集合を鮮明に描画できる. ただし, DEM では無限遠点の吸引鉢の任意の点から Julia 集合までの距離の近似式を導く過程で Böttcher 写像の近似列を用いているため, 近似式そのものの精度を計算することは困難である. そのため本稿では双曲距離を用いた距離の近似式の再構成を行うことで, 具体的なアルゴリズムの精度の計算を可能にした.

2 章では以下で必要となる Julia 集合の性質と双曲距離などに関する諸結果について述べる.

3 章では Y. Fisher らによる Julia 集合の描画アルゴリズム DEM の構成方法について紹介する.

---

\*em49033@nda.ac.jp

†The second author is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 22540240.

‡masayo@nda.ac.jp

§gotoh@nda.ac.jp

4章ではDEMにより使われる距離の近似式を双曲距離を用いて再構成するとともに、それを元に具体的なアルゴリズムの精度の評価を行う。さらに得られた評価の理論値がほぼ最良であることを、いくつかの例を通して見ていく。

## 2 準備

まずは今回用いる複素力学系の用語の定義及び基本的な性質について紹介を行う。この章の詳しい内容については [2], [3], [4], [5] 及び [6] を参考にされたい。

単位円板を  $\Delta$  と表し、リーマン球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の有理関数  $R$  について、 $R$  による  $n$  回の反復合成を  $R^n = \overbrace{R \circ \cdots \circ R}^n$  と表記する。以下、 $\deg R \geq 2$  とする。また、 $R(z_0) = z_0$  となる点  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  を  $R$  の不動点、 $R^N(z_0) = z_0$  (周期:  $N \in \mathbb{N}$ ) となる点  $z_0$  を周期点という。周期点における微分係数  $\lambda = (R^N)'(z_0)$  を乗法因子と呼び、周期点を乗法因子  $\lambda$  の値によって以下の4つに分類する。本稿では特に超吸引周期点に関する考察を行う。

- $|\lambda| > 1$  のとき  $z_0$  を反発周期点
- $|\lambda| = 1$  のとき  $z_0$  を中立周期点
- $0 < |\lambda| < 1$  のとき  $z_0$  を吸引周期点
- $|\lambda| = 0$  のとき  $z_0$  を超吸引周期点

**吸引鉢** 点  $z_0$  が有理関数  $R$  における吸引周期点または超吸引周期点であるとき、 $R$  による反復合成により周期的に、 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  に収束する点の集合を  $z_0$  の吸引鉢と呼び、 $A(z_0)$  と表記する。

$$A(z_0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{周期的に } R^n(z) \rightarrow z_0\}.$$

**正規族** 領域  $D \subset \hat{\mathbb{C}}$  で定義され、 $\hat{\mathbb{C}}$  に値を持つ関数からなる空でない族  $\mathcal{F}$  が正規族 (normal family) であるとは、 $\mathcal{F}$  の元からなる任意の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  をとれば、その中に必ず  $D$  上で広義一様収束する部分列がとれることである。

**Fatou 集合** 有理関数  $R$  の反復合成による族が点  $z$  の近傍で正規族になるような  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  の集合を  $R$  の Fatou 集合と定義し  $F(R)$  と表記する。

**Julia 集合** Fatou 集合の補集合  $J(R) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(R)$  を Julia 集合と呼ぶ。Julia 集合の性質として以下のものが知られている。

- $J(R) = J(R^n)$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- $J(R)$  は孤立点を持たない閉集合。
- $J(R) = R(J(R)) = R^{-1}(J(R))$  ( $J(R)$  の完全不変性).
- $J(R) \neq \emptyset$ .
- $J(R)$  は  $R$  の反発周期点の閉包。

以降については、有理関数  $R$  は多項式  $P$  の場合に限定して議論する。多項式において無限遠点は常に超吸引不動点である。特に任意の2次多項式は、ある  $c \in \mathbb{C}$  で  $P_c(z) = z^2 + c$  と共役となる。以下では  $P_c(z) = z^2 + c$  の形の2次多項式のみを扱う。

無限遠点の吸引鉢  $A(\infty)$  は以下のような性質を持つ.

- $A(\infty) \subset F(P_c)$
- $\partial A(\infty) = J(P_c)$

**Mandelbrot 集合  $\mathcal{M}$**  2次多項式  $P_c$  の反復合成により原点の軌道が無限遠点に収束しないパラメータ  $c$  の集合を Mandelbrot 集合と呼び,  $\mathcal{M}$  と表記する.

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(0) \not\rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}.$$

2次多項式のパラメータ  $c$  について  $c \in \mathcal{M}$  であることと, 対応する  $P_c$  の Julia 集合が連結であることは同値である. このとき, 特に無限遠点の吸引鉢  $A(\infty)$  は単連結になる. また,  $c \notin \mathcal{M}$  のとき, 対応する Julia 集合は完全不連結となる. 2次多項式の Julia 集合の例をいくつか紹介する.

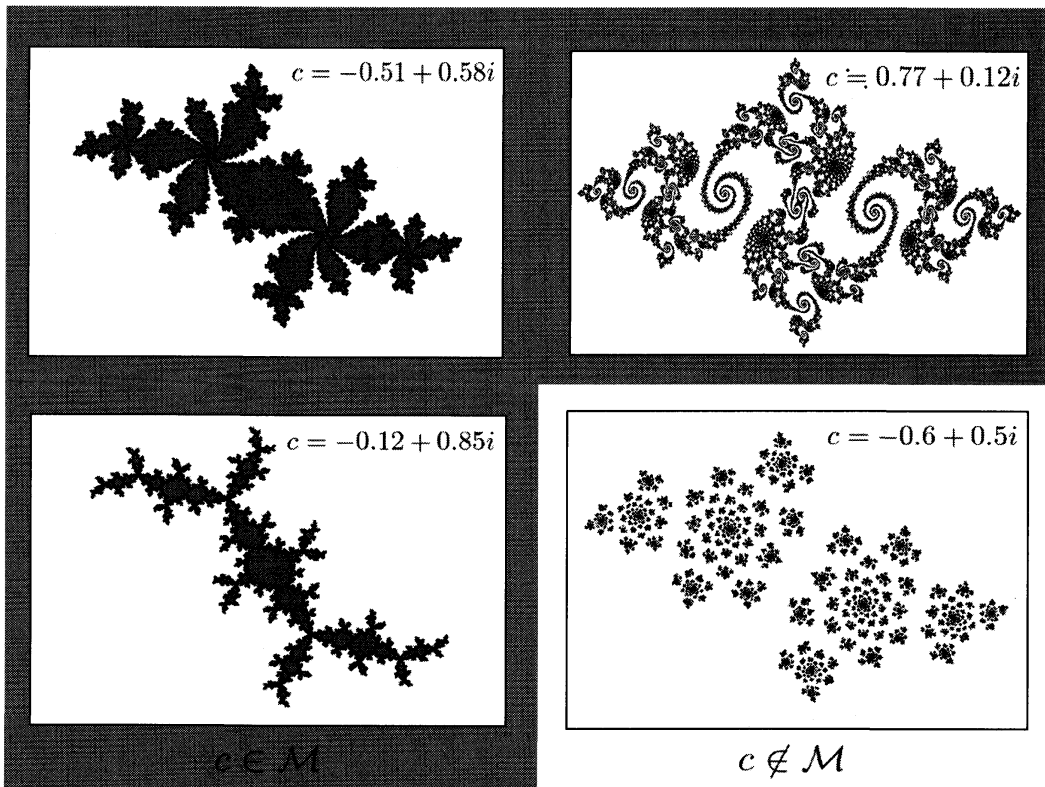


図 1:  $P_c(z) = z^2 + c$  の Julia 集合の例. 境界の黒い部分が Julia 集合である.

Y. Fisher らによる近似式は次の 2 つの結果を元に構成される. 以下では常に  $c \in \mathcal{M}$  とする.

**定理 (Böttcher の定理)**

次を満たす等角写像  $\varphi : A(\infty) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\Delta}$ , が存在する.

$$\varphi(P_c^n(z)) = \varphi(z)^{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ただし, 等角写像  $\varphi$  は  $\varphi_n(z) = (P_c^n(z))^{1/2^n}$  とするとき,  $\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$  で与えられる.

この  $\varphi$  を Böttcher 写像と呼ぶことにする.

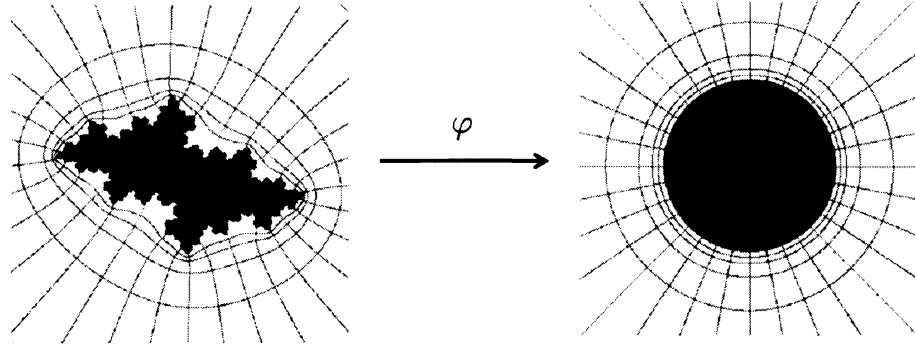


図 2: Böttcher 写像  $\varphi$  は  $A(\infty)$  から単位円板の外への等角写像である.

**定理 (Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理)**

$f : D \rightarrow \Omega$  が平面領域間の等角写像であり,  $z_0 \in D$  のとき, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{4}|f'(z_0)|d(z_0, \partial D) \leq d(f(z_0), \partial \Omega) \leq 4|f'(z_0)|d(z_0, \partial D).$$

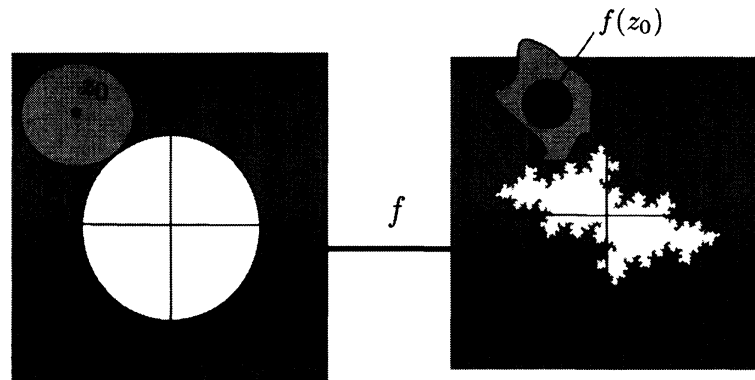


図 3:  $D = \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$ ,  $\Omega = A(\infty) \setminus \{\infty\}$ ,  $f = \varphi^{-1}$  のときの図.

我々の目標である近似式の精度評価のためには, Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理の精密化である Köbe の歪曲定理と双曲距離についての準備が必要になる.

**定理 (Köbe の歪曲定理)**

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  が  $|z| < 1$  上で等角ならば, 次が成り立つ.

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

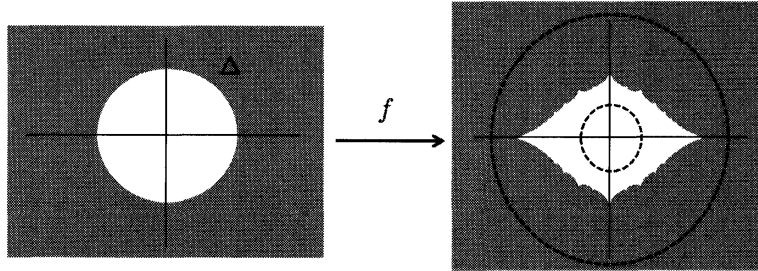


図 4: Köbe の歪曲定理により  $|f(z)|$  及び  $|f'(z)|$  の評価が出来る.

**双曲距離** 単位円板  $\Delta$  上の双曲距離を次式で定義する.

$$\rho_{\Delta}(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \quad (z \in \Delta).$$

さらに一般の双曲型領域  $\Omega$  上での双曲距離  $\rho_{\Omega}(z)|dz|$  は, 普遍被覆写像  $\psi: \Delta \rightarrow \Omega$  で写すことにより, 次のように定義される. ただし  $z = \psi(\zeta)$  ( $\zeta \in \Delta, z \in \Omega$ ) とする.

$$\rho_{\Omega}(z)|dz| = \rho_{\Delta}(\zeta)|d\zeta|.$$

双曲距離は被覆写像により不変であり, 特に等角不変となる. そのため新たに双曲距離を定義した  $\Omega$  から被覆写像で写すことにより, さらに別の双曲型領域上の双曲距離を計算することが出来る.

正則写像  $f: D \rightarrow D'$  により双曲距離は増加しない. すなわち,

$$\rho_{D'}(w)|dw| \leq \rho_D(z)|dz| \quad (\text{ただし } w = f(z)).$$

特に,  $f: D \hookrightarrow D'$  (包含写像) のとき,

$$\rho_{D'}(z) \leq \rho_D(z) \quad (z \in D).$$

また, 双曲距離を用いることで Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理は次のような形で表すことが出来る.

**定理 (Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理 (双曲距離を用いての言い換え))**

$\Omega \subset \mathbb{C}$  を単連結領域,  $B$  を  $z_0$  を中心とした円板で,  $B \subset \Omega, \partial B \cap \partial \Omega \neq \emptyset$  ならば, 次が成り立つ.

$$\rho_B(z_0) \leq 4\rho_{\Omega}(z_0).$$

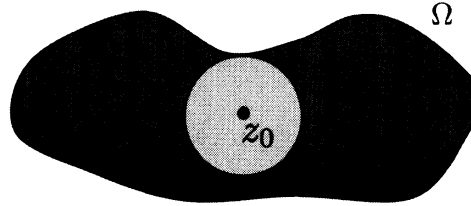


図 5: 点  $z_0$  の  $\Omega$  での双曲距離と  $B$  での双曲距離との評価ができる。

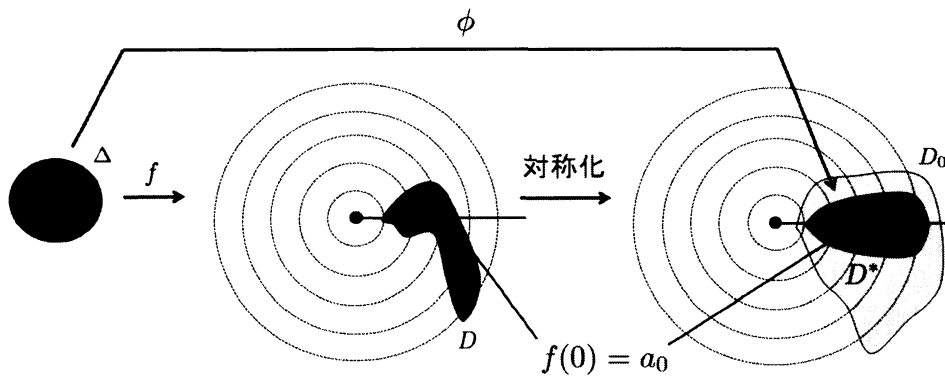
双曲距離を用いて距離の評価を考える際に領域の対称化 (Circular symmetrization) と呼ばれる操作を行う。そのために必要な基本的な性質を紹介する。

**定理 (対称化定理 ([7, p.128] 参照))**

単位円板  $\Delta$  上で正則な関数  $w = f(z) = a_0 + a_1z + \dots$  に対し,  $D = f(\Delta)$  とおく。また,  $D^*$  を原点を起点として  $a_0$  方向への半直線に対して  $D$  を原点を中心とする半径方向に対称化した領域, また,  $D_0$  を  $D^*$  を含む単連結領域とする。そのとき,

$$w = \phi(z) = a_0 + a'_1z + \dots$$

が  $\Delta$  から  $D_0$  上への等角写像ならば  $|a_1| \leq |a'_1|$  となり,  $|\phi'(0)| \geq |f'(0)|$  が成り立つ。



特に関数  $f : \Delta \rightarrow D$  が等角であれば,  $\rho_\Delta(a_0) = \frac{2}{|f'(0)|}$  及び  $\rho_{D_0}(a_0) = \frac{2}{|\phi'(0)|}$  より, 不等式  $|\phi'(0)| \geq |f'(0)|$  は  $\rho_{D_0}(a_0) \leq \rho_D(a_0)$  と言い換えられる。

### 3 Y. Fisher のアルゴリズム

この章では DEM と呼ばれる 2 次多項式の Julia 集合が連結な場合の描画アルゴリズムで使われる吸引鉢  $A_0(\infty) = A(\infty) \setminus \{\infty\}$  上の点から Julia 集合までの距離の Y. Fisher らによる近似式を紹介する ([1] 参照). 近似式は Böttcher 写像  $\varphi$  に Kőbe の  $\frac{1}{4}$  円定理を用いて評価した後に, Böttcher 写像  $\varphi$  を等角写像列  $\varphi_n$  で近似することで得られる。具体的には, 次のようになる。

Böttcher 写像  $\varphi$  は  $A_0(\infty)$  から  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$  への等角写像であるから, Kőbe の  $\frac{1}{4}$  円定理より,

$$\frac{1}{4}|\varphi'(z)|d(z, J(P_c)) \leq d(\varphi(z), \partial(\varphi(A_0(\infty)))) = |\varphi(z)| - 1 \leq 4|\varphi'(z)|d(z, J(P_c)).$$

ゆえに,

$$\frac{1}{4|\varphi'(z)|}(|\varphi(z)| - 1) \leq d(z, J(P_c)) \leq \frac{4(|\varphi(z)| - 1)}{|\varphi'(z)|}.$$

ここで,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  ( $A(\infty)$  上広義一様収束) である. そのため  $n$  が十分大きければ, 次のように近似できる. ただし  $a \approx b$  は,  $C^{-1} \leq a/b \leq C$  となる定数  $C \geq 1$  がとれることを意味する.

$$d(z, J(P_c)) \approx \frac{1}{|\varphi'_n(z)|} (|\varphi_n(z)| - 1).$$

さらに  $z_n = P_c^n(z)$ ,  $z'_n = (P_c^n)'(z)$  とし,  $|\varphi'_n(z)| - 1 \approx \log |\varphi_n(z)|$  と近似すると, 次が成り立つ.

$$\frac{|\varphi_n(z)| - 1}{|\varphi'_n(z)|} \approx \frac{\log |\varphi_n(z)|}{|\varphi'_n(z)|} = \frac{\frac{1}{2\pi} \log |P_c^n(z)|}{\frac{1}{2\pi} |P_c^n(z)|^{\frac{1}{2\pi} - 1} |(P_c^n)'(z)|} = \frac{\log |z_n|}{|z_n|^{\frac{1}{2\pi} - 1} |z'_n|}.$$

ここで  $|z_n|^{\frac{1}{2\pi}} = |\varphi_n(z)| \rightarrow |\varphi(z)|$  であるから  $z_0$  が  $J(P_c)$  の近くを動くとするれば  $|z_n|^{\frac{1}{2\pi}}$  は 1 に近い値になる. よってこの部分を見捨て,  $n$  を十分大きくとるなら次が成り立つ.

$$d(z, J(P_c)) \approx \frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|. \quad (1)$$

また,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= P_c^{n+1}(z) = P_c(P_c^n(z)) = P_c(z_n) = z_n^2 + c, \\ z'_{n+1} &= (P_c^{n+1})'(z) = P'_c(P_c^n(z)) \cdot (P_c^n)'(z) = P'_c(z_n) \cdot z'_n = 2z_n \cdot z'_n. \end{aligned}$$

これにより,  $z_n, z'_n$  は次の漸化式により帰納的に計算していくことが出来る.

$$\begin{aligned} z_0 &= z, & z_{n+1} &= z_n^2 + c \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ z'_0 &= 1, & z'_{n+1} &= 2z_n z'_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

以上より,  $A_0(\infty)$  の任意の点  $z$  から  $J(P_c)$  までの距離の近似式 (1) と, その計算方法が得られた. これが DEM アルゴリズムである.

#### アルゴリズム (DEM)

$\forall z \in J$  と初期化

**Step1** 新たな点  $z$  をとる.  $\tilde{z} := z$

**Step2** 反復計算

if  $\tilde{z} \notin J$  then **Step1**  $\wedge$

while  $count < \text{反復上限}$  and  $|\tilde{z}| < \text{大きな数}$  do

$\tilde{z} = \tilde{z}^2 + c$ ,  $count = count + 1$

end while

**Step3** 判定

if  $count = \text{反復上限}$  then  $z \in J$

else  $Dist :=$  “ $z$  から  $J$  までの距離” を計算

if  $Dist < \varepsilon$  then  $z \in J$

else  $\Delta(z, Dist)$  の内部の各点  $\notin J$

end if

end if

**Step1**  $\wedge$

## 4 近似式の再構成と精度評価

最初に DEM の距離の近似式を双曲距離を用いて再構成し、次にその再構成の過程で発生する誤差を評価する。

### 4.1 近似式の再構成

前章の Y. Fisher らによる距離の近似式の導き方では、Böttcher の定理による等角写像  $\varphi$  の近似列  $\varphi_n$  を用いていることから、式 (1) の誤差を計算することは難しい。そもそも  $|z_n|$  が大きければ、近似が良くなるという数学的な裏付けもない。しかし、双曲距離を用いた方法で近似式の再構成を行うことにより、具体的な精度の計算が可能になる。特に  $|z_n|$  が大きければ、誤差は一樣に評価できることが示される。まずは、そのための準備として単位円板  $\Delta$  上で定義した双曲距離を元に単位円板の外側 ( $\mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$ ) での双曲距離を構成する。

#### 補題 1

領域  $D_0 = \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$  上の双曲距離は次の形で与えられる。

$$\rho_{D_0}(z)|dz| = \frac{|dz|}{|z| \log |z|}.$$

**証明** 一次変換  $\varphi_1(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$  と被覆写像  $\varphi_2(w) = e^w$  により  $\Delta$  を  $D_0$  に写す。双曲距離は被覆写像で不変であるので、 $D_0$  上での双曲距離を計算が出来る。 ■

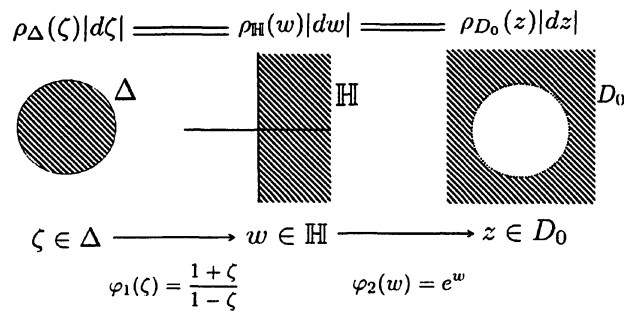


図 6:  $D_0 = \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$  上の双曲距離の構成

$D = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\Delta}$  とするとき、Böttcher の定理により次のような可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} A(\infty) & \xrightarrow{P_c^n} & A(\infty) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ D & \xrightarrow{z^{2^n}} & D \end{array}$$

図 7: Böttcher 写像による可換図 (1)



さらに、この図7から分岐点  $\infty$  を除外する。分岐点を除外することで等角写像及び被覆写像からなる以下のような可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} A_0(\infty) & \xrightarrow{P_c^n} & A_0(\infty) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ D_0 & \xrightarrow{z^{2^n}} & D_0 \end{array}$$

図 8: Böttcher 関数による可換図 (2)

双曲距離は被覆写像により不変であるので、可換図式に現れる全ての領域上で双曲距離は等しいことがわかる。ただし  $Z = P_c^n(z)$ ,  $W = \varphi(Z)$ ,  $w = \varphi(z)$  となる。このとき、 $W = z^{2^n}$  で、

$$\begin{array}{ccc} A_0(\infty) & \xrightarrow{P_c^n} & A_0(\infty) \\ \left. \begin{array}{c} \rho_{A_0(\infty)}(z)|dz| = \rho_{A_0(\infty)}(Z)|dZ| \\ \varphi \downarrow \quad \parallel \quad \downarrow \varphi \end{array} \right\} & & \\ \left. \begin{array}{c} \rho_{D_0}(w)|dw| = \rho_{D_0}(W)|dW| \\ D_0 \xrightarrow{z^{2^n}} D_0 \\ \parallel \quad \parallel \\ \frac{|dw|}{|w| \log |w|} \quad \frac{|dW|}{|W| \log |W|} \end{array} \right\} & & \end{array}$$

この図式を元に近似式の精度評価を行うが、その方針は以下のようなものである。

まずは Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理により、点  $z \in A_0(\infty)$  と  $J(P_c)$  の距離は、点  $w = \varphi(z) \in D_0$  と  $\Delta$  の距離を用いて次のように評価できる。

$$\frac{|dz|}{d(z, J(P_c))} \approx \frac{|dw|}{d(w, \partial D_0)}. \quad (2)$$

$d(w, \partial D_0)$  は  $w \in D_0$  から  $\Delta$  までの距離であり、さらに  $|w|$  が十分 1 に近いとき、 $|w| \approx 1$  かつ  $\log |w| \approx |w| - 1$  と近似でき、

$$\frac{|dw|}{d(w, \partial D_0)} = \frac{|dw|}{|w| - 1} \approx \frac{|dw|}{|w| \log |w|}. \quad (3)$$

この右辺は  $D_0 (= \mathbb{C} \setminus \Delta)$  での双曲距離に一致していることが分かる。式 (2)、及び式 (3) により、

$$\frac{|dz|}{d(z, J(P_c))} \approx \frac{|dw|}{|w| \log |w|}. \quad (4)$$

さらに、 $Z = P_c^n(z)$  が十分大きい値をとるとき、Köbe の歪曲定理により  $\varphi(Z) \approx Z$  と近似すると、

$$\frac{|dW|}{|W| \log |W|} \approx \frac{|dZ|}{|Z| \log |Z|} \quad (5)$$

が成り立つ。以上により、次のような図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 A_0(\infty) & \xrightarrow{P_c^n} & A_0(\infty) \\
 \left. \begin{array}{c} \rho_{A_0(\infty)}(z)|dz| = \rho_{A_0(\infty)}(Z)|dZ| \\ \varphi \quad \parallel \quad \parallel \quad \varphi \\ \rho_{D_0}(w)|dw| = \rho_{D_0}(W)|dW| \end{array} \right\} & & \\
 D_0 & \xrightarrow{\parallel z^{2^n} \parallel} & D_0 \\
 \frac{|dz|}{d(z, J(P_c))} \approx \frac{|dw|}{|w| \log |w|} & \quad \quad & \frac{|dW|}{|W| \log |W|} \approx \frac{|dZ|}{|Z| \log |Z|}
 \end{array}$$

よって次のような近似式が成り立つ。

$$\frac{|dz|}{d(z, J(P_c))} \approx \frac{|dZ|}{|Z| \log |Z|}$$

さらに  $Z = P_c^n(z) = z_n$  であるので、 $Z$  は漸化式  $z_n$  を用いて表すことができる。

$$d(z, J(P_c)) \approx \frac{|Z| \log |Z|}{\left| \frac{dZ}{dz} \right|} = \frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|. \tag{6}$$

これにより、Böttcher 写像  $\varphi$  の近似列  $\varphi_n$  を用いずに (1) の近似式を再構成することが出来た。あとは上の図における2つの誤差、つまり初期値  $z$  に依存する誤差 (4) 式と反復後の値に依存する誤差 (5) 式を具体的に計算することで、近似式 (1) の精度の評価が得られる。

### 4.2 Böttcher 写像に対する歪曲評価

近似式の誤差を具体的に計算する準備として、Köbe の歪曲定理を用いて Böttcher 写像の絶対値  $|\varphi(z)|$  とその微分係数の絶対値  $|\varphi'(z)|$  の評価を考える。Julia 集合  $J(P_c)$  は原点对称であることから、無限遠点の吸引鉢の半分の領域を考えることにする。そこで次のような可換図式を考える。このとき  $g$  は原点を含まない単連結領域で定義された  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$  上への等角写像となる。

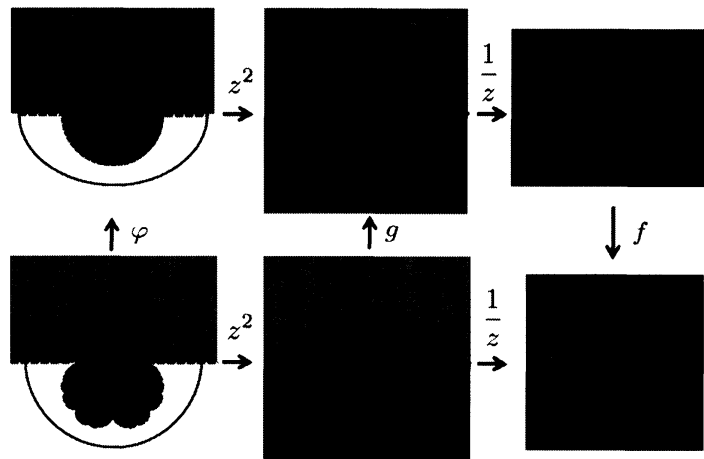


図 9: Köbe の歪曲定理による Böttcher 写像の評価

このとき、次のような評価が得られる。

**補題 2**

$|g(z)|$  及び  $|g'(z)|$  は次のように評価できる。

$$\frac{|z| - 2 + \sqrt{|z|^2 - 4|z|}}{2} \leq |g(z)| \leq \frac{|z| + 2 + \sqrt{|z|^2 + 4|z|}}{2},$$

$$\frac{(|g(z)| - 1)^3}{|g(z)| + 1} \leq |g'(z)| \cdot |z|^2 \leq \frac{(|g(z)| + 1)^3}{|g(z)| - 1}.$$

**証明** 写像  $f(z) = 1/g^{-1}(1/z)$  に Kőbe の歪曲定理を用いることで、補題の主張が得られる。 ■

さらに、補題 2 の結果に  $g(z) = (\varphi(\sqrt{z}))^2$  を代入すれば、

**補題 3**

$|z| \geq 2$  とすると、 $|\varphi(z)|$  及び  $|\varphi'(z)|$  は次のように評価できる。

$$\frac{1}{2} \left( |z| + \sqrt{|z|^2 - 4} \right) \leq |\varphi(z)| \leq \frac{1}{2} \left( |z| + \sqrt{|z|^2 + 4} \right), \quad (7)$$

$$\frac{(|\varphi(z)|^2 - 1)^3}{|\varphi(z)|(|\varphi(z)|^2 + 1)} \leq |\varphi'(z)| \cdot |z|^3 \leq \frac{(|\varphi(z)|^2 + 1)^3}{|\varphi(z)|(|\varphi(z)|^2 - 1)}. \quad (8)$$

### 4.3 反復後の値に依存する誤差の計算

反復後の値に依存する誤差については補題 3 の評価から、

**補題 4**

$R \geq 4, |Z| \geq R$  とすると、反復後の値に依存する誤差は次のように評価できる。

$$\left( 1 - \frac{4}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}} < \frac{\frac{|dW|}{|W| \log |W|}}{\frac{|dZ|}{|Z| \log |Z|}} < \left( 1 + \frac{4}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (9)$$

**証明** 十分大きな誤差の評価については、近似式 (5) の比を計算することで評価できる。  $W = \varphi(Z)$  であり、さらに  $|\varphi'(z)|$  の評価式 (8) を代入することで反復後の値に依存する誤差を考える。

$$f_1(|\varphi(Z)|) \cdot \frac{\log |Z|}{|Z|^2} \leq \frac{|\varphi'(Z)||Z| \log |Z|}{|\varphi(Z)| \log |\varphi(Z)|} \leq f_2(|\varphi(Z)|) \cdot \frac{\log |Z|}{|Z|^2}. \quad (10)$$

ただし、

$$f_1(t) = \frac{(t^2 - 1)^3}{t^2(t^2 + 1) \log t}, \quad f_2(t) = \frac{(t^2 + 1)^3}{t^2(t^2 - 1) \log t},$$

とする。  $f_1(t)$  は  $1 < t$  で単調増加、  $f_2(t)$  は  $3 < t$  では単調増加である。 それにより、式 (10) の上からの評価に  $|\varphi(z)|$  の評価式 (7) の上からの評価を代入し、下からの評価についても同様に代入すると、次のような評価式が得られる。

$$\left( 1 - \frac{4}{|Z|^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\log |Z|}{\log \left( \frac{|Z| + \sqrt{|Z|^2 - 4}}{2} \right)} \leq \frac{|\varphi'(Z)||Z| \log |Z|}{|\varphi(Z)| \log |\varphi(Z)|} \leq \left( 1 + \frac{4}{|Z|^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\log |Z|}{\log \left( \frac{|Z| + \sqrt{|Z|^2 + 4}}{2} \right)}. \quad (11)$$

再び (7) より、

$$\left( 1 - \frac{4}{|Z|^2} \right)^{\frac{3}{2}} < \frac{|\varphi'(Z)||Z| \log |Z|}{|\varphi(Z)| \log |\varphi(Z)|} < \left( 1 + \frac{4}{|Z|^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

式 (12) の中央の項は近似式 (5) の比を意味しており、  $|Z| \geq R$  とすることで補題の主張が得られる。 ■

#### 4.4 初期値 $z$ に依存する評価

初期値  $z \in A_0(\infty)$  に依存する誤差については領域の包含関係による双曲距離の評価と, Kőbe の  $\frac{1}{4}$  円定理 (双曲距離) を用いて計算する. そのための準備として, 次のような領域を考える (図 10,11).

- $B = \Delta(z, r)$ , ただし  $r = d(z, J(P))$ .
- $\Omega = \varphi(B)$ .
- $\Omega'$ :  $\Omega$  を対称化した領域. (対称化定理参照)
- $\tilde{D}$ :  $\hat{C}$  から  $\bar{\Delta}$  とスリットを除いた領域. (図 11 参照)
- $D$ :  $\bar{\Delta}$  を除く半平面. (図 11 参照)

これらの領域は全て  $z$  に依存して決まる.

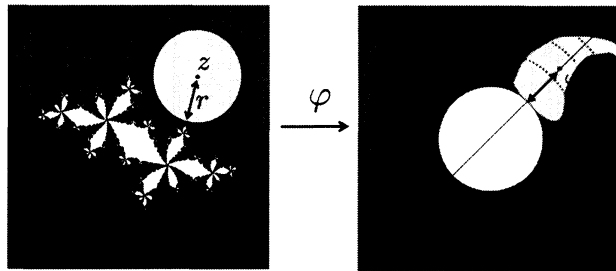


図 10: 円板  $B$  と領域  $\Omega$  のイメージ

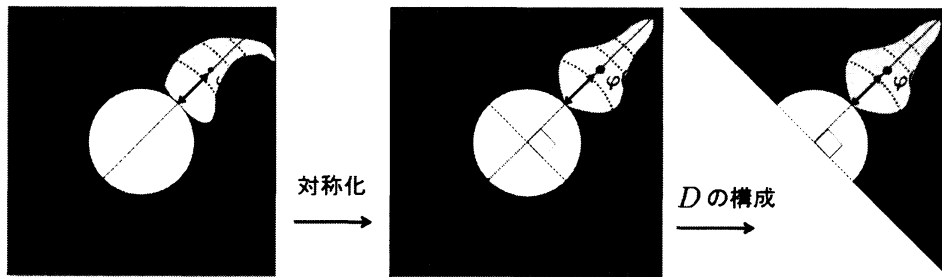


図 11: 領域  $\Omega, \Omega', \tilde{D}, D$  のイメージ

領域  $\tilde{D}$  を扱うのは単連結領域にするためであり, さらに対称化を行うことで, 常に  $\Omega' \subset D$  になる. この包含関係  $\Omega' \subset D$  及び対称化定理により, 双曲距離について次のような評価が成り立つ.

$$\rho_D(\varphi(z)) \leq \rho_{\Omega'}(\varphi(z)) \leq \rho_{\Omega}(\varphi(z)) = \frac{\rho_B(z)}{|\varphi'(z)|}.$$

また, Kőbe の  $\frac{1}{4}$  円定理 (双曲距離を用いての言い換え) により領域  $\Omega'$  と領域  $\tilde{D}$  の双曲距離について次のように評価できる.

$$\frac{\rho_B(z)}{4|\varphi'(z)|} = \frac{1}{4}\rho_\Omega(\varphi(z)) \leq \rho_{\tilde{D}}(\varphi(z)).$$

次に具体的に領域  $D$  及び  $\tilde{D}$  上の双曲距離を計算する.

### 補題 5

領域  $D$  上の点  $z$  における双曲距離は次で与えられる.

$$\rho_D(z) = \frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|} \left( \frac{|\varphi(z)|^2 + 1}{|\varphi(z)|^2 - 1} \right).$$

**証明** 必要なら点  $\varphi(z)$  を一次変換により, 実軸上の点  $|\varphi(z)| \in D$  に写す. それにより領域  $D$  で双曲距離は次のような合成関数  $h: D \rightarrow \Delta$  により構成することが出来る.

$$h(z) = h_6 \circ h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(z).$$

ただし,

$$h_1(z) = z^2, \quad h_2(z) = \frac{1}{z}, \quad h_3(z) = \sqrt{z}, \quad h_4(z) = \frac{i-z}{i+z}, \quad h_5(z) = z^2, \quad h_6(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

これらの関数は全て一次変換又は被覆写像であるので, 合成関数  $h$  により双曲距離  $\rho_D(z)$  が計算できる. ■

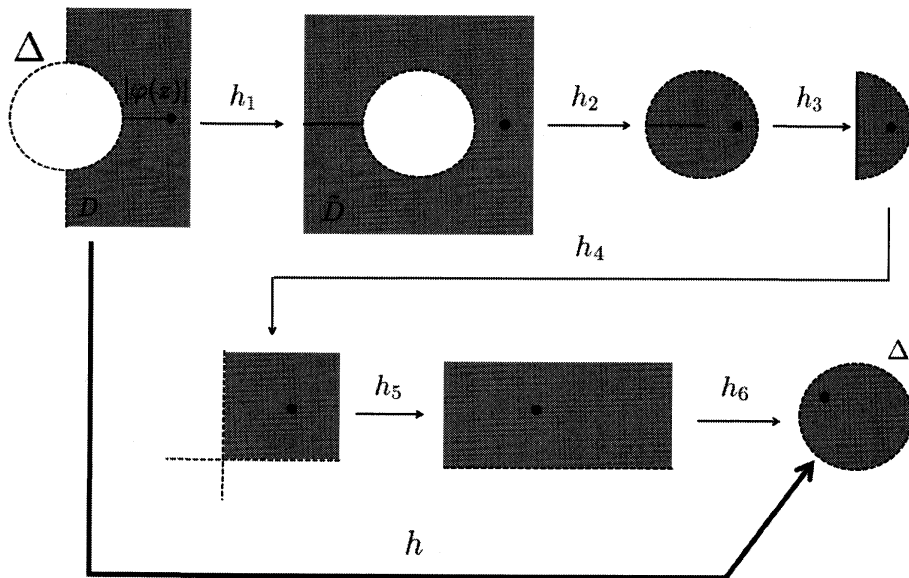


図 12: 領域  $D$  での双曲距離の構成のイメージ

### 補題 6

領域  $\tilde{D}$  上の点  $z$  における双曲距離は次で与えられる.

$$\rho_{\tilde{D}}(z) = \frac{|\varphi'(z)|}{2|\varphi(z)|} \left( \frac{|\varphi(z)| + 1}{|\varphi(z)| - 1} \right).$$

**証明** 図 12 で  $|\varphi(z)| \in \tilde{D}$  と取りなおし, 補題 5 と同様に写像  $h_6 \circ h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2(z)$  を考えればよい. ■

## 補題 7

Böttcher 写像による Julia 集合への距離の評価は次のように与えられる.

$$\frac{|\varphi(z)|}{|\varphi'(z)|} \left( \frac{|\varphi(z)| - 1}{|\varphi(z)| + 1} \right) \leq d(z, J(P_c)) \leq \frac{2|\varphi(z)|}{|\varphi'(z)|} \left( \frac{|\varphi(z)|^2 - 1}{|\varphi(z)|^2 + 1} \right) \quad (13)$$

**証明** 円板  $B$  上の中心の点  $z$  における双曲距離は次の形で与えられる.

$$\rho_B(z) = \frac{2}{d(z, J(P_c))}.$$

これを補題 5, 6 の結果に代入し, 式変形することで補題の主張が得られる. ■

## 4.5 Milnor による評価式との比較

Milnor は  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$  上の距離を [4] で与えている. この距離を Julia 集合の場合に書き直すと, 次式のようになる.

$$\frac{|\varphi(z)|^2 - 1}{4|\varphi(z)||\varphi'(z)|} \leq d(z, J(P_c)) \leq \frac{|\varphi(z)|^2 - 1}{|\varphi'(z)|}.$$

今回算出した評価式は, Milnor の距離を書きなおしたものよりも, 高い精度の評価式になっている.

$$\frac{|\varphi(z)|^2 - 1}{4|\varphi(z)||\varphi'(z)|} \leq \frac{|\varphi(z)|}{|\varphi'(z)|} \left( \frac{|\varphi(z)| - 1}{|\varphi(z)| + 1} \right) \leq d(z, J(P_c)) \leq \frac{2|\varphi(z)|}{|\varphi'(z)|} \left( \frac{|\varphi(z)|^2 - 1}{|\varphi(z)|^2 + 1} \right) \leq \frac{|\varphi(z)|^2 - 1}{|\varphi'(z)|}$$

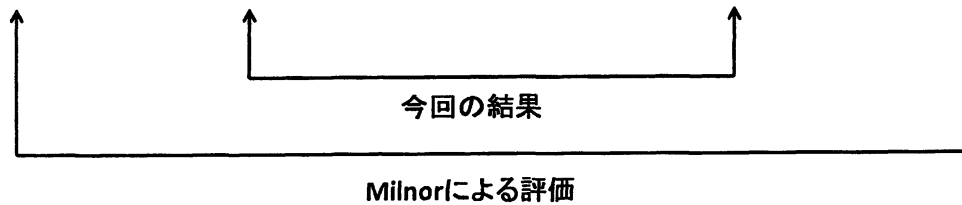


図 13: 今回の結果と Milnor による評価との比較

Milnor による評価式はグリーン関数を用いて表されているので, 今回の結果もグリーン関数で表し, 両者を比較した. 今回の結果は, 精度が高いだけではなく, グリーン関数では簡明な形で表現できていることが分かる. ただし  $G(z)$  は  $A(\infty)$  で定義された無限遠点に極をもつグリーン関数とする.

- Milnor による評価式

$$\frac{\sinh G(z)}{2|G'(z)|e^{G(z)}} \leq d(z, J(P_c)) \leq \frac{2 \sinh G(z)}{|G'(z)|}.$$

- 今回の結果

$$\frac{\tanh(G(z)/2)}{|G'(z)|} \leq d(z, J(P_c)) \leq \frac{2 \tanh G(z)}{|G'(z)|}.$$

さらに  $G(z)$  の値を横軸として評価の精度をグラフ化した. これを見ると今回の結果は  $G(z)$  の値が大きくなるほど, 精度の高い評価が得られることが分かる.

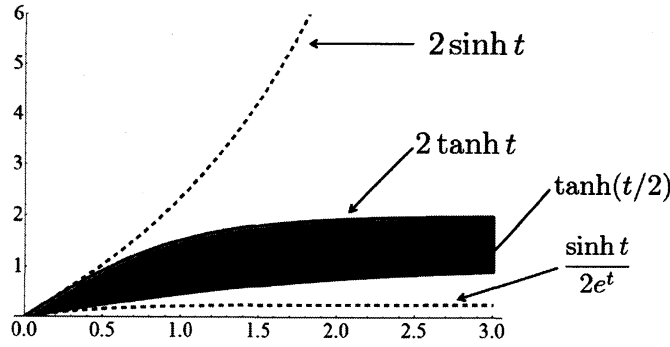


図 14: 今回の結果と Milnor による評価の比較. 今回の結果は橙色で示した範囲になる.

#### 4.6 初期値 $z$ に依存する誤差の評価の簡略化

初期値  $z$  に依存する誤差を Böttcher 写像を用いない形に簡略化する. 連結な Julia 集合は領域  $\{|z| \leq 2\}$  に含まれるので初期値  $z$  は  $|z| \leq L = 2 + \varepsilon$  の範囲で考えれば十分である.

##### 補題 8

初期値  $z$  に依存する誤差は次のように簡略化できる. ただし  $z \in A_0(\infty)$ ,  $|z| \leq L = 2 + \varepsilon$  とする.

$$\frac{\sqrt{L^2 + 4} - 2}{L \log\left(\frac{\sqrt{L^2 + 4} + L}{2}\right)} < \frac{d(z, J(P_c))}{\frac{|\varphi(z)|}{|\varphi'(z)|} \log |\varphi(z)|} < 2. \quad (14)$$

**証明** Böttcher 写像により  $A(\infty)$  上の任意の点  $z$  は  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \widehat{\Delta}$  上に写るので,  $1 < |\varphi(z)|$  となる. まず, 式 (13) より,

$$\frac{(|\varphi(z)| - 1)}{(|\varphi(z)| + 1) \log |\varphi(z)|} \leq \frac{d(z, J(P_c))}{\frac{|\varphi(z)|}{|\varphi'(z)|} \log |\varphi(z)|} \leq \frac{(|\varphi(z)|^2 - 1)}{(|\varphi(z)|^2 + 1) \log |\varphi(z)|}. \quad (15)$$

上下からの誤差の評価式は, いずれも  $1 < |\varphi(z)|$  で単調減少になる. そのため上からの評価は  $|\varphi(z)| \rightarrow 1 + 0$  のとき上限の値をとり, そのときの値は 2 となる. 一方, 下からの評価は  $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2}(|z| + \sqrt{|z|^2 + 4}) \leq \frac{1}{2}(|L| + \sqrt{|L|^2 + 4})$  となることから,  $|z| = L$  のとき最小の値をとることが分かる. さらに  $|\varphi(z)|$  及び  $|\varphi'(z)|$  は式 (7) より, 下からの評価を代入することで主張の評価式が得られる. ■

#### 4.7 DEM における距離の近似式の精度評価

以上の結果から次の主定理が得られる.

##### 定理 9

DEM で用いられる距離の近似式の精度は次のように評価できる.  $L = 2 + \varepsilon$ ,  $R \geq 2$  とする. そのとき  $|z| \leq L$  に対して  $|z_n| > R$  とすると,

$$C_1(R, L) < \frac{d(z, J(P))}{\frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|} < C_2(R).$$

ただし,

$$C_1(R, L) = \frac{\sqrt{L^2 + 4} - 2}{L \log\left(\frac{\sqrt{L^2 + 4} + L}{2}\right)} \left(1 + \frac{4}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$C_2(R) = 2 \left(1 - \frac{4}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

**証明** 評価式全体の誤差は, 初期値  $z$  に依存する誤差 (14) と反復後の値に依存する誤差 (5) のそれぞれの上下からの誤差の積で表せる. これは補題の結果から計算できる. ■

特に, 評価式の誤差が反復回数  $n$  の値に依らず,  $R$  の大きさのみで定まる定数で評価できることが示された.

#### 4.8 誤差の理論値

主定理の  $L$  及び  $R$  に具体的に数値を代入して, 具体的に評価式の誤差の理論値を計算した例を紹介する.  $R = 10, L = 2.1$  としたとき,

$$0.4399 < \frac{d(z, J(P_c))}{\frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|} < 2.1212.$$

$R = 1000, L = 2.1$  としたとき,

$$0.4677 < \frac{d(z, J(P_c))}{\frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|} < 2.00120012.$$

この理論値の例から, 誤差の評価は Kőbe の  $\frac{1}{4}$  円定理に大きく依存していることが分かる.

#### 4.9 実際の距離との比較

実際の Julia 集合までの距離と DEM における距離の評価式の値を比較することで, 今回の結果がほぼ最良であることを見ていく. 評価の理論値はいずれも  $R = 1000, L = 2.1$  とした. まずは  $c = -2, z = 2.1$  としたときには, 評価式の誤差は次のような値になる.

$$\frac{d(z, J(P_c))}{\frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|} \doteq 0.496.$$

この値は誤差の評価の理論値の下限にほぼ一致していることが分かる. また, このとき  $J(P_c) = [-2, 2]$  である.

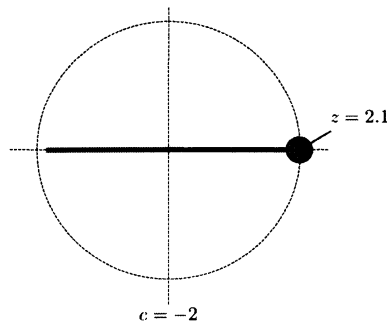


図 15: 距離の評価の比較 (誤差の理論値の下限に近い場合の例)



このとき、実際の評価式の誤差は理論値の下限に近い値になっていることが分かる。次に  $c = 0.375611 + 0.22189i$ ,  $z = -0.317786 + 0.870849i$  としたときは、評価式は次のような値を取る。

$$\frac{d(z, J(P_c))}{\frac{|z_n|}{|z_0|} \log |z_n|} \doteq 1.656.$$

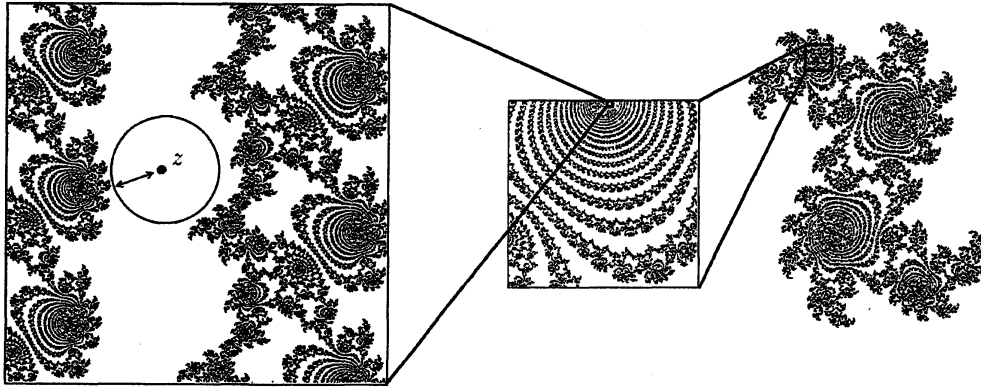


図 16: 距離の評価の比較 (誤差の理論値が上限に近い場合の例)

この値は評価の理論値の上限に近い値になっていることが分かる。実際の Julia 集合までの距離と評価式の値との誤差はパラメータ  $c$  に大きく依存する値なので、これらの値を上手く選べば、さらに理論値の上限に近い誤差を持つ例があると思われる。これらの例から今回の結果がほぼ最良であることが確認できた。

## 参考文献

- [1] H. Peitgen, et al., *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag (1988).
- [2] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems* GTM132., Springer Verlag (2000).
- [3] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex Dynamics* UTX, Springer Verlag (1993).
- [4] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press (2006).
- [5] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press (2000).
- [6] 辻正次, 複素函数論, 槇書店 (1968).
- [7] W. K. Hayman, *Multivalent Functions*, Cambridge University Press (1994).