

## Experimental Study of Formation of Vortex Crystal Configuration in Pure Electron Plasma

京都工芸繊維大学工芸科学研究科 三瓶明希夫 (Akio Sanpei)  
Department of Electronics,  
Kyoto Institute of Technology

広島大学大学院先端物質科学研究科 伊藤清一 (Kiyokazu Ito)  
Graduate School of Advanced Sciences of Matter,  
Hiroshima University

金沢大学理工研究域 曾我之泰 (Yukihiro Soga)  
College of Science and Engineering,  
Kanazawa University

大阪大学理学研究科 青木順 (Jun Aoki)  
Graduate School of Science,  
Osaka University

京都大学人間・環境学研究科 際本泰士 (Yasuhito Kiwamoto)  
Graduate School of Human and Environmental Studies,  
Kyoto University

### 1 はじめに

一様磁場中に閉じこめられた電子プラズマは巨視的には二次元の非圧縮性、非粘性流体 (二次元 Euler 流体) と等価であり、点渦系の集まりとして捉えることが可能なことが知られている [1, 2, 3]. このとき、 $(x, y)$  を磁場に垂直な座標であるとする、電子密度  $n(x, y)$  と渦度  $\zeta(x, y)$ 、ポテンシャル  $\phi(x, y)$  と流線  $\psi(x, y)$ 、粒子数  $N$  と循環  $\Gamma$  が対応する. 非中性プラズマの分野では、この性質を利用して二次元理想流体における渦運動の実験が盛んに行われてきた. 滑らかな円筒壁に囲まれた離散的な渦糸群の運動は力学的な運動方程式で表されることがよく知られており [4, 5], 電子プラズマ柱の渦糸としてのハミルトニアン性が確認されている [6, 7, 8]. 本稿では、純電子プラズマ実験において実際に観測された渦運動と構造形成を紹介し、読者の興味を喚起することを目的とする.

### 2 非中性プラズマ中の渦結晶の形成

渦が規則的な配列を成す”渦結晶”は、非中性プラズマ中に現れる自発的な構造形成現象として、最も興味深い現象の一つである. 強く磁化された純電子プラズマを用いて、不安定な初期分布から渦結晶が形成される過程の実現は、Fine らカリフォルニア大学サンディエゴ校のグループによって初めて行われた [9]. 筆者の所属していた京都大学のグループでは、渦糸の循環  $\Gamma$  や位置及び本数を細密に制御した初期状態から実験し、その相互作用と時間発展に注目してきた.

図 1 は Hollow 状の渦度分布からの渦結晶形成の実験結果を表している. Hollow 分布は不安定な初期配位であり、流体力学では Kelvin-Helmholtz 不安定と呼ばれ、非中性プラズマ物理学では

Diocotron 不安定と称される不安定性が起こる。Shear を持つ回転の中でこの変形が進行すると密度の集中がおこり、各塊が有限の断面を持つ渦パッチに成長する。図では方位角方向にモード数  $m = 6$  の不安定性が強く生じて、二次元乱流へと発展している [10]。渦糸間の相互作用の結果、比較的強度の高い数本の渦糸が生き残り、準定常な結晶構造を形成する ( $t = 140 \sim 5000 \mu\text{sec}$ )。

図 1 の様な渦結晶形成は古典的な流体においても研究されており、同一符号の渦度パッチの二次元乱流の自由緩和についての数値的研究において、秩序構造が自発的に形成される事が観測されている [10, 11, 12, 13]。また、超流動ヘリウムの中の量子化された渦糸も同様のパターンを示す事が知られている。非中性プラズマにおける Hollow 状の渦度分布からの渦結晶形成過程については、実験 [14] 及び数値計算 [15] において、詳細な検討が為されている。

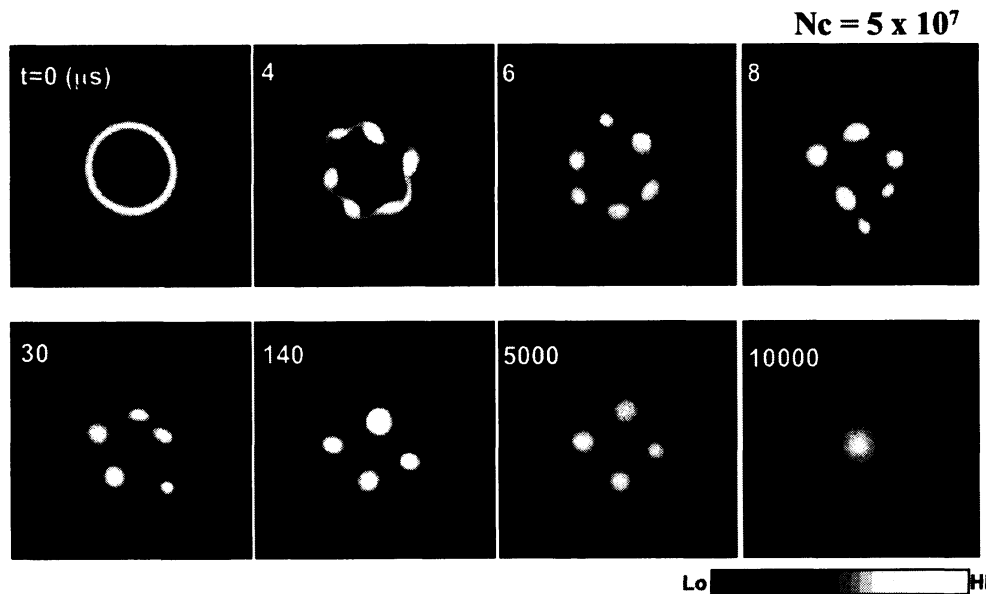


図 1: Hollow 状の渦度分布からの渦結晶形成

これらの渦結晶構造の形成機構を統一的に理解しようという試みは幾つか存在し、相互作用する渦糸のダイナミクスは二次元乱流の理論・計算研究の主題の一つとなっている [16, 17, 18, 19, 20]。渦糸の形成に不安定過程を利用する代わりに、我々は渦糸の循環  $\Gamma$  や位置及び本数も明確にして、ダイナミクスを調査してきた。図 2 は 19 本の渦糸から始まる渦度分布の時間発展を表す。渦は不規則に運動し、断続的な合体を繰り返す。合体によって数を減らした渦糸は生き残った本数に応じて様々な配列を形成する。参考文献 [21] に規則的配列の美しい“カタログ”があるので、参照されたい。

緩和の過程で、比較的弱い渦糸は薄いシート状に引き延ばされ、近くに来た強い渦糸に巻き込まれる。シートのかげらの幾つかは吸収されず、凹凸のある背景渦度分布 (Background vorticity distribution: BGVD) を形成する。自発的に形成された背景渦度は、生き残った渦糸間の相互作用に強く影響する [9, 22]。結晶構造への渦緩和過程における、強い渦パッチ (渦糸) と渦糸の周りの空間を満たす低レベル渦度の相互作用の重要な役割は、実験的には Fine *et al.* [9] に、つづいてシミュレーション研究では Schecter *et al.* [22] によって、初めて明らかにされた。さらに、Jin らが提唱した Regional Maximum Entropy Theory (RMET) では、渦糸のエントロピーが保存されて、背景渦のエントロピーが最大となるという拘束条件を入れる事で、観測された結晶パターンを上手く再現し、背景渦が渦糸の結晶化に必要であるとした [20]。

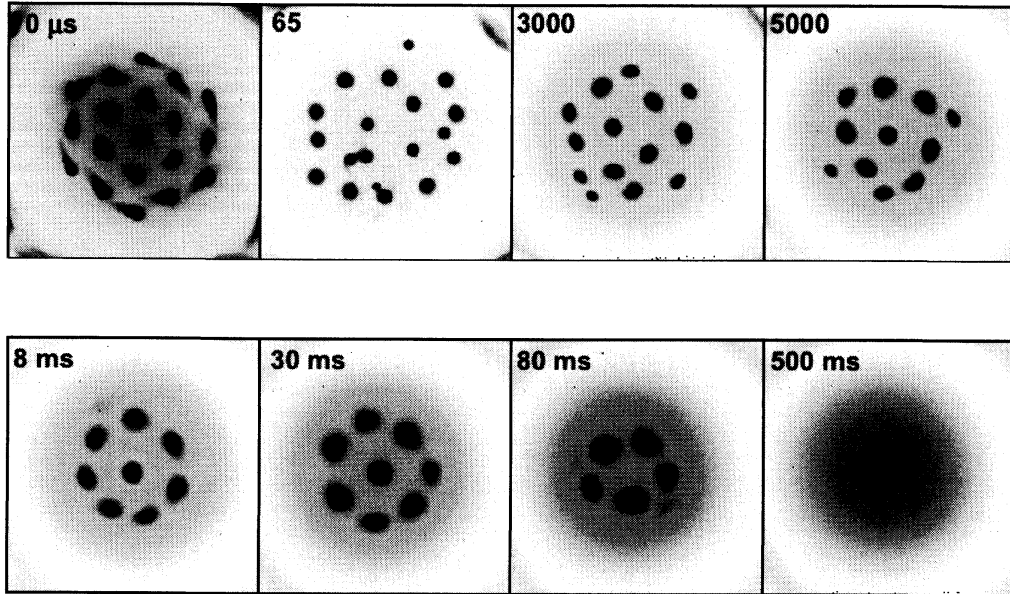


図 2: 真空中に 19 本渦糸を入射した場合の時間発展.

### 3 背景渦度の役割

#### 3.1 渦糸の運動への影響

ここで、結晶化に対する背景渦度の役割に注目するために、BGVD と渦糸の相互作用の最も簡単な場合として、BGVD 中に一本の渦糸を入射した場合の時間発展を図 3 に示す [23]. このとき電子の総数は夫々  $N_b = 1.9 \times 10^8$ ,  $N_c = 1.2 \times 10^7$  である. 以降, 添字  $b$  は BGVD を,  $c$  は渦糸をそれぞれ表すものとする. 各画像の輝度は渦度の大きさを表わし, 黒い点は渦糸を表している. 初め背景渦は山型の密度分布をもっており, その周辺部 (画像右下) に渦糸を入射した. 図 3 から, 渦糸は約 16 倍の  $\Gamma$  をもつ背景渦の速度場の中で周方向に回転しつつ, 背景の渦度分布の勾配を登り, 中心に向うことが観測される. 渦糸と背景渦度分布の相互作用の特徴として,

1. 渦糸は背景渦の密度勾配を登る
2. 渦糸の径方向の速度は, 背景分布の勾配とともに増加する
3. 渦糸の径方向の速度は,  $\Gamma_c$  の増加関数である

以上の事柄が知られている.

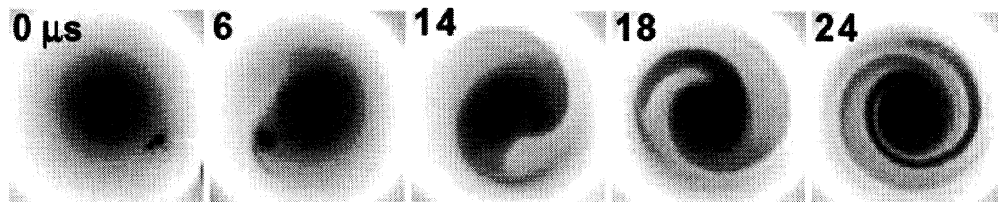


図 3: 背景渦中の 1 本の渦糸の時間発展 [23].

渦糸が BGVD の勾配を登る物理機構は以下の様に解釈できる. 渦糸は自身の周りの背景渦度を時計回りにかき回しながら前進する. この時進行方向に回される渦度は半径の大きい位置にある低い渦度であり, 後ろに回されるのは半径の小さな位置にある高い渦度である. この結果渦糸の前と後ろにはそれぞれ渦度の低い部分と高い部分が双極子状に形成される. この時, 渦糸が背景

渦に励起した摂動分布は長時間維持される。この双極渦は局所的には背景渦の中心に向う速度場を形成するため、渦糸は中心に向う速度成分を得ることになる。

次に渦糸が複数ある場合を考えてみる。渦糸同士の合体は、渦糸の数を減らしつつ進行する渦緩和における基本的な現象である。逆に2本の渦糸がある距離を保ち続ける状態もまた、準平衡状態である結晶構造形成の本質に関わる現象である。BGVDがない場合の2本の渦糸が合体する条件は広く研究されてきた [6, 24, 25]。背景に薄い渦が加わると、渦糸は急速に合体するか、近接した渦対を形成する [8, 26]。合体/渦対形成へ導く要因は、秩序形成への緩和過程における分岐現象の例として興味深いものである。図4は背景渦と2本の渦糸からなる系の時間発展の例を示す [26]。実験シーケンス上、渦糸の入射時刻は  $t = 10 \mu\text{sec}$  であるが、電子ビーム源から渦糸が遊離する時刻は  $15 \sim 20 \mu\text{sec}$  となっている。上段の画像では、渦糸が  $100 \mu\text{s}$  までに背景渦の中心に向かって近づき、合体する。合体は渦糸が数回公転する時間以内で起こる。それに対して背景渦の初期分布を僅かに変えた下段の画像では、2本の渦糸は  $5\text{ms}$  (渦糸が約100回転する時間) 以上もの長時間にわたり、分離状態を保つ。渦糸の初期の運動は上段とほとんど同じであるが、渦糸が自身の直径の4-5倍の距離まで近づいたところで反発し、渦対を形成する。これらの事柄から、BGVDは渦糸の軌道及び渦糸同士の相互作用に強く影響することは明らかである。

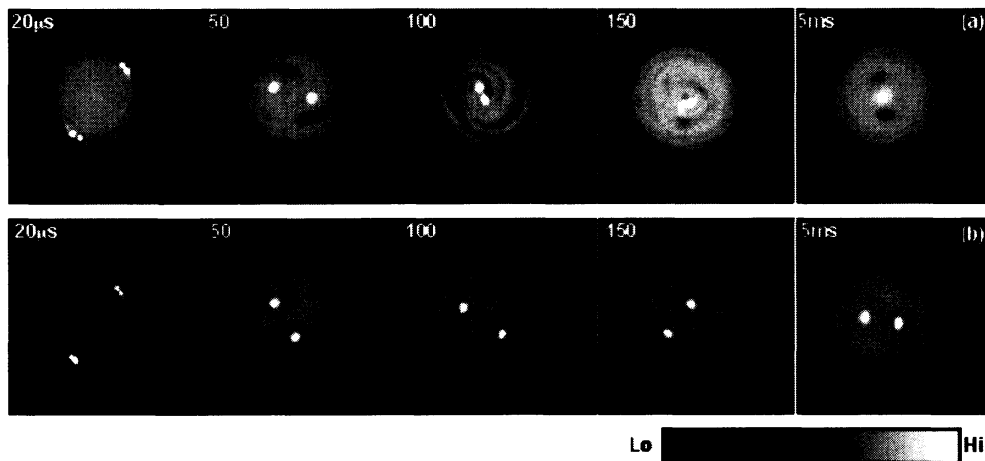


図4: 背景渦中の2本の渦糸の時間発展を表す [26]。初期背景渦の総電子数は  $\Gamma_b \propto N_b / 10^8 = 3.55$ (a),  $3.39$ (b) である。等しい電子数 ( $\Gamma_c \propto N_c / 10^7 = 0.6$ ) からなる2本の渦糸を背景渦上に対称的に置き初期条件とする。

### 3.2 BGVD中の渦糸の結晶化

結晶構造形成におけるBGVDの寄与を詳しく調べる為、二次元結晶構造の単位セルを形成する最小要素である三本の渦糸のダイナミクスに焦点を当てる [27]。図5で(a)真空中と(b)BGVD中の三本の渦糸の時間変化を比較する。初期状態で渦糸は等しい循環  $\Gamma_c$  を持ち、一直線に並んでいる。真空中では、渦糸は定常的な構造を示す事なく、 $\tau_R \approx 50 \mu\text{sec}$  の周期で軌道運動を続ける [18]。1secのタイムスケールでは、残留中性粒子との衝突が電子渦糸のダイナミクスに粘性として働く。 $t > 100 \text{ms}$  のタイムレンジでは、残留ガスとの衝突か、壁への衝突によって、渦糸の数が減る傾向にある。

しかし、図5(b)に示されるように、BGVDが存在すると、渦糸の運動は限られた領域に留まり、その相対位置関係が秩序構造を作るに至る。初期のBGVDは最大渦度  $\zeta_b = \zeta_{c0}/60$ 、循環  $\Gamma_b/\Gamma_c = 12.7$  をもつ連続的な分布である。最初に、渦糸は  $\tau_R \approx 25 \mu\text{sec}$  で軌道運動を行う ( $t = 75, 150 \mu\text{s}$ )。渦糸周りの回転のズレ (differential rotation) により、BGVD中に微細構造が作られる。背景

渦度の揺動の最大レベルは  $|\delta\zeta_b/\zeta_b| = |\delta n_b/n_b| = 0.49$  である。渦糸周りの摂動渦度は、次の節で述べる ring hole 構造を後に形成する。

発展の後期では、渦糸は対称配位に落ち着き、0.15mm 以下の微視構造に関しては粗視化の避けられない観測では、BGVD は滑らかになる ( $t = 5, 10$  ms)。真空中では、このような対称配位は、同じ  $\Gamma$  を持つ三本の渦糸が、正三角形の頂点に置かれた時にのみ形成される。しかし、BGVD 中と異なり、正三角形配位は長時間維持されない。

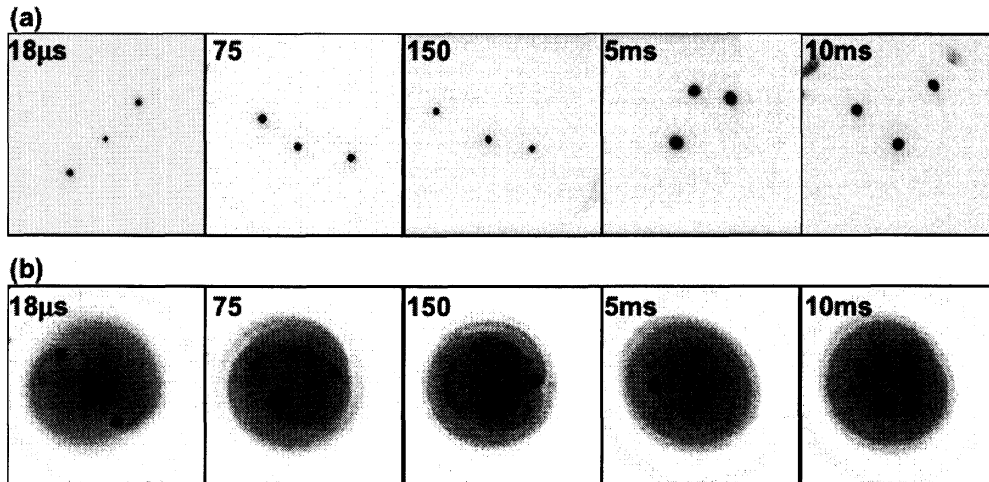


図 5: (a) 真空中と (b)BGVD 中の三本の渦糸の時間変化。BGVD 中では渦糸が正三角形の頂点に落ち着くことが観測される [27].

### 3.3 BGVD 中の ring hole 構造形成

渦糸の対称配位形成では、渦糸周りに渦度の低い ring hole 構造を伴うことがしばしば観測される。ring hole は、不均一な背景渦の一部が渦糸に掻き回される過程で作られる [28, 29]。図 4 (b) でも ring hole 構造が観測されている。図 6 は、ほぼ同じ初期状態の BGVD に様々な循環比の渦糸を入射した場合に、 $t \geq 5$  ms で観測された準定常状態を示す [27]。各渦糸の周りに、異なるサイズの ring hole の形成が観測される。我々の実験結果によれば、BGVD は循環が極端に不均衡な渦糸でも正三角形配位の形成を可能にする。多数の渦糸が作る渦結晶の形成過程について見ると、ring hole 構造の形成は Fine の実験 [9] と Schecter のシミュレーション [22] でも観測された。

図 6 に示された各実験について、ring hole の循環  $\Gamma_h$  を見積もると、 $\Gamma_c$  と  $\Gamma_h$  は良い相関があり、 $\Gamma_c$  が増えるほど  $\Gamma_h$  は増加する。しかし  $\Gamma_h$  は  $\Gamma_c$  の 20% 以下であり、実効的な循環  $\Gamma_{eff} = \Gamma_c - \Gamma_h \propto (N_c - N_h)/10^6$  は (7.9, 7.5, 8.2 : (a)), (13, 6.1, 6.6 : (b)), (14, 7.3, 6.2 : (c)) であり、不均衡のままである。前述の RMET では、渦の結晶化には渦糸の  $\Gamma$  が完全にキャンセルされないことが重要であるとされている [20]。上記のような ring hole 構造形成は、渦糸が一本しかない場合でも観測されており、初期の BGVD の配位や時間発展にも強い依存性がある [28]。

第 3 章の実験及び解析結果から、BGVD が渦糸の挙動に強く影響し、結晶化に重要な役割を果たしている事が見て取れる。局所的に密度が高い渦糸の運動により BGVD の中に作られた微細な空間構造は、渦糸間相互作用に大きく影響する。空間構造の形成時間は、渦糸と背景渦の強度や形状に依存し、これが秩序構造形成の時間に影響を及ぼす。渦発展の微妙な分岐を初期背景渦の違いに一意的に関連づけることは困難であり、むしろ緩和途上の構造との関連が本質的であることを表している。

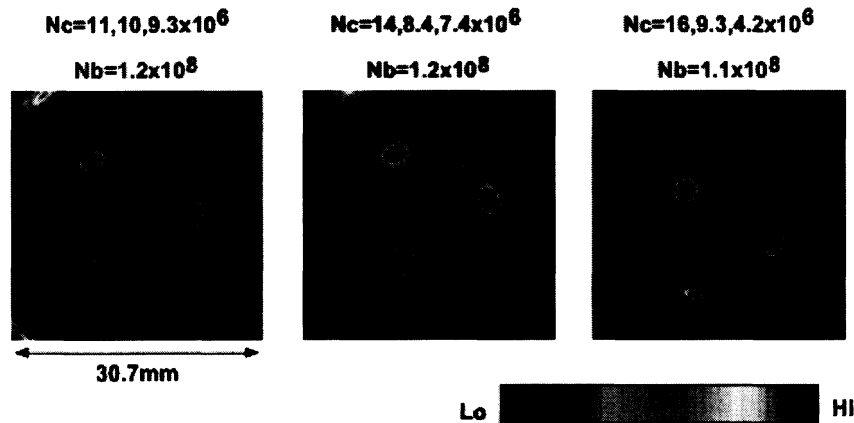


図 6: BGVD 中の三本の渦糸の準定常状態 [27]. 渦糸の周りに ring hole 構造の形成が確認される.

#### 4 積分量の時間変化

渦度分布が渦結晶や対称的な単一山構造を準定常的に示す現象を表す目的で、いくつかの積分量の中の 하나가極値を示し、残りは保存されると要請する selective decay の考え方がしばしば要請される。その代表は Jin and Dubin による RMET [20] である。彼らは実験観測結果である秩序構造のパターンを、この理論モデルによって再現した。具体的には諸積分量を保存させ、渦糸の数と  $\Gamma$  を与えて BGVD のエントロピーが最大になるように渦糸の位置を決めるという手法である。

ここでは二次元 Euler 流体と電子プラズマの等価性を利用して、緩和過程における諸物理量の変化について実験的立場から検討する [30]。図 5(b) の緩和過程について、積分量の時間発展を調べる。計測で得た  $n(r, \theta)$  より、渦糸と BGVD の静電エネルギー (fluid kinetic energy に比例)

$$H_\phi = \int \int d\theta r dr \left( -\frac{1}{2} e\phi(r, \theta, t) \right) n(r, \theta, t); \quad (1)$$

正準角運動量 (fluid angular impulse に比例)

$$P_\theta = \int \int d\theta r dr \left( -\frac{2e\pi B_0}{\epsilon_0} r^2 \right) n(r, \theta, t); \quad (2)$$

エンストロフィー

$$Z_2 = \frac{1}{2} \int d^2 r \zeta^2 = \int \int d\theta r dr \left( \frac{en(r, \theta, t)}{\epsilon_0 B_0} \right)^2 \quad (3)$$

を各々求めた。図 7(a) に示されているこれらの積分量は初期値で規格化してある。

実験的に、BGVD に関わる各積分量と渦糸のエネルギーは保存される。反対に、渦糸のエンストロフィー  $Z_2$  は最も減少しやすく、正準角運動量  $P_\theta$  はエネルギーほどには保存されない。500  $\mu$ s 以内では、渦糸の  $Z_2$  は保存されている。ここでは、渦糸は BGVD の存在によって若干修正された軌道運動を行っている。  $t > 500 \mu$ s では、渦糸の  $Z_2$  は緩やかに減少する。この減少の開始時間は秩序構造形成の時間スケールに対応している様に見える。この渦糸の  $Z_2$  の減少は正三角形配位が形成された後も続く。  $t > 1000 \mu$ s では正準角運動量  $P_\theta$  も減少する。これは渦糸位置の平均半径の減少が原因と考えられる。

上記の積分量に加え、エントロピーの評価も可能である。エントロピーの表式は、さまざまである。例えば coarse-graining が不可避な画像計測によって得られる分布に対応するように、microscopic な渦度エレメントを配置する方法の数を数える方法などが提案されている [20]。

$$S[\zeta] = - \int d^2 r [p \ln p + (1-p) \ln(1-p)] \quad (4)$$

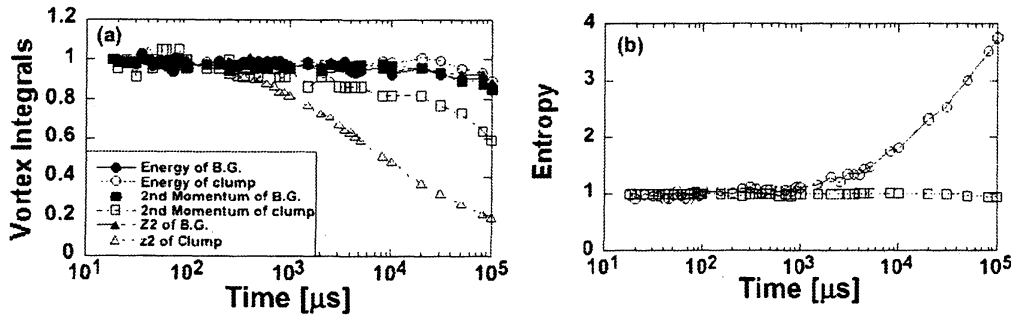


図 7: (a) 渦糸と BGVD の積分量  $H_\phi$ ,  $P_\theta$ ,  $Z_2$  を時間の関数としてプロットしたもの. 渦糸の  $Z_2$  と  $P_\theta$  は減衰する. (b) 流体エントロピー  $S[\zeta]$  を系全体 (○) と BGVD (□) について, 時間の関数としてプロットしたもの. 系全体のエントロピーは増加するが, BGVD のエントロピーはほぼ一定である [30].

ここで  $p = n/n_{max}$  であり, 面積の単位はピクセルの和である. 図 7(b) は系全体と BGVD のエントロピーを時間の関数としてプロットしたものである. BGVD が強い渦糸によって良く掻き回されているにも関わらず, BGVD のエントロピーには時間変化が見られない. 逆に, 系全体のエントロピーは増加する. 画像データと対比して見ると, これは渦糸の変形に起因することが解る.

渦糸が有限の断面を持ち, 変形することは本実験の条件である比較的弱い磁場 ( $B_0 = 0.048$  T) では避けられない. 背景渦度が強く mixing をうけて微細な構造が顕著に現れない限り, エントロピーの変化としてすくい上げることは難しい. 以上の事柄から, 統計物理的手法のみでなく, 力学的な問題として扱うアプローチも有効だと考えられる.

## 5 まとめ

純電子プラズマ実験において実際に観測された渦運動と構造形成を紹介した. 背景渦度分布が渦糸の挙動に強く影響し, 結晶化に重要な役割を果たしている. 渦糸周りに形成される ring hole 構造を観測した. 結晶化の統計物理学的解析において保存性や極値化を要請される積分量について, 実験結果を示した.

## 参考文献

- [1] R. H. Levy, Phys. Fluids **11**, 920 (1968).
- [2] R. J. Briggs, J. D. Daugherty and R. H. Levy, Phys. Fluids **13**, 421 (1970).
- [3] 際本泰士, 日本物理学会誌 **56**, 253 (2001).
- [4] 「巽友正: 新物理学シリーズ 21-流体力学」(培風館 1982) .
- [5] P. H. Chavanis, Phys. Rev. E **64**, 026309 (2001).
- [6] T. B. Mitchell, C. F. Driscoll and K. S. Fine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1371 (1993).
- [7] Y. Kiwamoto, A. Mohri, K. Ito, A. Sanpei and T. Yuyama, *Non-neutral Plasma Physics III* (AIP1999) pp.99.
- [8] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, A. Mohri, T. Yuyama and T. Michishita, J. Phys. Soc. Jpn. (Lett.) **68**, 3766 (1999).

- [9] K. S. Fine, A. C. Cass, W. G. Flynn and C. F. Driscoll, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3277 (1995).
- [10] J. C. MacWilliams, *J. Fluid Mech* **146**, 21 (1984).
- [11] R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo, *J. Phys. A* **21**, 1221 (1988).
- [12] G. F. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2735 (1991).
- [13] T. Watanabe, T. Iwayama and H. Fujisaka, *Phys. Rev. E* **57**, 1636 (1998).
- [14] Y. Kawai, Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, Y. Soga, J. Aoki, and K. Itoh, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 104502 (2006).
- [15] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, T. Ebisuzaki, T. Hatori, T. Kato, *Phys. Plasmas* **10**, 3188 (2003).
- [16] L. Onsager, *Nuovo Cinmeto* **6**, 276 (1949).
- [17] G. Joyce and D. Montgomery, *J. Plasma Phys.* **10**, 107 (1973).
- [18] H. Aref, *Phys. Fluids.* **22**, 393 (1979).
- [19] R. A. Smith and T. M. O'Neil, *Phys. Fluids B* **2**, 2961 (1990).
- [20] D. Z. Jin and D. H. E. Dubin, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4434 (1998).
- [21] Y. Kiwamoto, N. Hashizume, Y. Soga, J. Aoki, and Y. Kawai, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 115002 (2007).
- [22] D. A. Schecter, D. H. E. Dubin, K. S. Fine and C. F. Driscoll, *Phys. Fluids.* **11**, 905 (1999).
- [23] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei and A. Mohri, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3173 (2000).
- [24] K. S. Fine, C. F. Driscoll, J. H. Malmberg and T. B. Mitchell, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 588 (1991).
- [25] M. V. Melander, N. J. Zabusky and J. C. McWilliams, *J. Fluid Mech.* **195**, 303 (1988).
- [26] Y. Soga, Y. Kiwamoto, A. Sanpei and J. Aoki, *Phys. Plasmas* **10**, 3922 (2003).
- [27] A. Sanpei, Y. Kiwamoto, K. Ito, Y. Soga, *Phys. Rev. E.* **68**, 016404 (2003).
- [28] A. Sanpei, Y. Kiwamoto and K. Ito, *J. Phys. Soc. Jpn. (Lett.)* **70**, 2813 (2001).
- [29] D. Durkin and J. Fajans, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4052 (2000).
- [30] A. Sanpei, K. Ito, Y. Soga, J. Aoki and Y. Kiwamoto, *Hyperfine Interactions* **174**, 71 (2007).