数理解析研究所講究録
第 1799 巻 2012 年 163-166

2011 年度冬の LA シンポジウム [S4]

距離遺伝 2 部グラフ上のハミルトン閉路アルゴリズム

An algorithm for the Hamiltonian circuit problem on bipartite distance-hereditary graphs

高須賀将秀*　　平田富夫*

1 はじめに

ハミルトン閉路問題は有名な NP 完全問題であるが，グラフを制限することで多項式時間で解ける場合がある．本研究では距離遺伝 2 部グラフに制限することで多項式時間でハミルトン閉路を発見するアルゴリズムを提案する．このグラフに対しては既に多項式時間のアルゴリズムが提案されているが [4]，それとは違ったアプローチのアルゴリズムを提案する．提案するアルゴリズムはよりシンプルでグラフクラスの拡張や改良がしやすいと考えられる．

無向グラフ $G=(V,E)$ に対し，G のすべての頂点をちょうど 1 回通る閉路をハミルトン閉路と呼ぶ．ハミルトン閉路問題とは，グラフ $G=(V,E)$ を入力とし，G にハミルトン閉路が存在するかどうかを判定する問題である．

n 頂点の無向グラフに対するハミルトン閉路に対し各種の指数時間アルゴリズムが提案されているが，最近モンテカルロ法を使った $O(1.657^n)$ 時間のアルゴリズムが報告された [2]．また，2 部グラフに対しては，$O(1.414^n)$ 時間のアルゴリズムが報告されている．

グラフを制限することで，この問題を多項式時間で解くことができる場合がある．これまでの研究で，プトレマイックグラフ (Ptolemaic graph) に対し $O(|V|)$ の計算時間のアルゴリズムが報告されている [8]．プトレマイックグラフとはコーダル (chordal) でかつ距離遺伝 (distance hereditary) なグラフである．また，2 部グラフでかつ距離遺伝なグラフに対し $O(|V|(|V|+|E|))$ の計算時間のアルゴリズムが与えられている [4]．本論文では $O(|V|^2)$ のアルゴリズムを与える．なお，コーダルな 2 部グラフに対してはこの問題は NP 完全である [3]．

距離遺伝グラフに対し，$O(|V|+|E|)$ のアルゴリズムが報告されている [5][6] が，本論分のアルゴリズムはこれらより単純で実装やグラフクラスの拡張がしやすいと考えられる．

2 縮小グラフ

BDHG $G=(V^+,V^-,E)$ において，V^+,V^- をそれぞれグループ (同値類) に分け，そのグループを新たな頂点とした縮小グラフ G^r を提案する．

まず，グループの分け方について述べる．R は頂点集合 V 上の関係で，${}_{v_i}R_{v_j}$ は $N(v_i)=N(v_j)$ であることを表すとする．V のグループ分けとは R による V の同値分割のことである．この同値類 $\gamma_i(1\leq i\leq t)$ から次のようにしてグラフ $G^r=(V^r,E^r)$ を構成する．V^r の各頂点は各同値類 γ_i に対応し，G において 2 つの同値類間に辺があるとき，対応する G^r の頂点間に辺を引く．

次に，$\gamma: V\rightarrow V^r$ を G の頂点を縮小グラフ G^r の頂点に写像する関数とする．つまり，v がグループ γ_i に属しているとき，$\gamma(v)=\gamma_i$ である．また，$\|\gamma_i\|$ をグループ γ_i に属している頂点数と定義する．BDHG と縮小グラフは相互に変換可能である．

2.1 縮小グラフに関する性質

ここでは，縮小グラフに関する重要な性質について述べる．

命題 2.1. [7] G を少なくとも 1 本以上の辺が存在する BDHG とすると，その縮小グラフ G^r には次数 1 の頂点が少なくとも 1 つ存在する．

証明. 省略 □

*名古屋大学大学院情報科学研究科

命題 2.2. [7] γ_i を縮小グラフ G^r 上の次数 1 の任意の頂点とする. y を対応する G 上のグループ γ_i に含まれる頂点とし, $x \in N(y)$ とする. このとき, グラフ G が $BDHG$ であるならば $G \backslash \{x, y\}$ も $BDHG$ である.

証明. 省略

3 拡張条件について

$G = (V^+, V^-, E)$ は $2n$ 頂点の 2 部グラフで, ハミルトン閉路を持つとする. 明らかに $|V^+| = |V^-| = n$ である. X を $V^+(V^-)$ の任意の頂点集合とする ($|X| < n$). X の隣接頂点の集合を $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v)$ と表す. このとき, $|X| < |N(X)|$ が成り立っている. なぜなら, G がハミルトン閉路を持つからである. 次の条件を G の拡張条件と呼ぶ.

$$\text{拡張条件}: \forall_X \ |X| < n \Rightarrow |X| < |N(X)|$$

この拡張条件は, G にハミルトン閉路が存在するための必要条件であるが, G が一般的な 2 部グラフの場合 十分条件ではない. ここでは, G が BDHG の場合, この条件が G にハミルトン閉路が存在するための十分条件であることを示す.

補題 3.1. [7] グラフ G は BDHG であるとする. γ_i を縮小グラフ G^r 上の次数 1 の頂点とする. G 上の対応するグループ γ_i において任意に 1 個頂点を選ぶ. それを y とし, $x \in N(y)$ とする. G にハミルトン閉路が存在するとき, そしてそのときのみ $G \backslash \{x, y\}$ にハミルトン閉路が存在する.

証明. 省略 □

補題 3.2. [7] $2n$ 頂点のグラフ G は BDHG であるとする. このとき, G において拡張条件が成立するならば $G \backslash \{x, y\}$ においても拡張条件が成立する.

証明. 省略 □

定理 3.3. [7] グラフ $G_{2n} = (V^+, V^-, E)$ を $2n$ 頂点の BDHG で, $|V^+| = |V^-| = n$ であるとする. このとき, G において拡張条件が成立するならばハミルトン閉路が存在する.

証明. 省略 n に関する帰納法で証明する.

まず, グラフが 4 頂点のとき, 拡張条件が成立するので, G_{2n} は完全 2 部クリークとなり, ハミルトン閉路は存在する.

G_{2n} において定理の命題が成立すると仮定して, $G_{2(n+1)}$ においてもこの命題が成立することを示す. $G_{2(n+1)}$ は BDHG なので命題 2.1 より $G^r_{2(n+1)}$ において次数 1 の頂点 γ_i が存在する. また, 補題 3.2 より, $G_{2(n+1)}$ から $y \in \gamma_i, x \in N(y)$ を取り除いた $G_{2(n+1)} \backslash \{x, y\}$ において拡張条件が成立する. 帰納法の仮定より $G_{2(n+1)} \backslash \{x, y\}$ においてハミルトン閉路が存在する. よって, 補題 3.1 より, $G_{2(n+1)}$ においてもハミルトン閉路が存在する. □

4 アルゴリズム

$G = (V^+, V^-, E)$ を $2n$ 頂点の BDHG とする. ただし, $|V^+| = |V^-| = n$ である. 本節では G にハミルトン閉路があるか否かを判定するアルゴリズムを提案する.

既存アルゴリズム [4] はグラフの生成構造を表す OVE 列を用いるため, 計算時間が増大する. 我々は, 異なるるアプローチによるアルゴリズムを提案する. それは BDHG G を縮小グラフ G^r というよりシンプルなグラフに置き換え, そのグラフ上でハミルトン閉路を探索していく手法である. このアルゴリズムは縮小グラフとこれまでに証明した補題を用いてハミルトン閉路の有無を判定し, 縮小グラフのサイズを再帰的に小さくしていく.

4.1 アルゴリズムの詳細

G^r は次のように実装される. まず, G^r 上の頂点の次数が 1 である頂点をリスト L_1 に記憶しておく. また, G^r 上の各頂点 $\gamma_i (1 \le i \le t)$ に属している G 上の点の個数を $\|\gamma_i\|$ で表す. G^r 上の頂点 γ_i の隣接頂点のリストを $\mathrm{NL}(\gamma_i)$, 各頂点の次数を $\deg(\gamma_i)$ として記憶しておく. このとき, $NL(\gamma_i)$ の中身は頂点番号の小さい順にソートされているものとする.

アルゴリズムの詳細は次のとおりである. まず, G から G^r を作る. L_1 の中から任意に 1 頂点を選び, その頂点を γ_p とする. γ_p の隣接頂点は点を γ_q とする.

$\|\gamma_p\| \geq \|\gamma_q\|$ ならば，“ハミルトン閉路は存在しない”と出力する (定理 3.3)．そうでないならば，G^r から頂点 γ_p を取り除き，“G^r の更新”を行う．アルゴリズムは上の操作を繰り返す (Algorithm1)．

“G^r の更新”は次のとおりである．補題 3.1 より，グループ γ_p の頂点がなくなるまで頂点 x, y の削除を繰り返す．γ_p の頂点がなくなるので，G^r では頂点 γ_p が削除される．また，$\|\gamma_q\|$ の値を $\|\gamma_p\|$ だけ減少し，頂点 γ_q の次数の値 $\deg(\gamma_q)$ を 1 だけ減少する．ここで，もし γ_q の次数が 1 になるのであれば γ_q をリスト L_1 に加える．Algorithm2 の 1 行目から 6 行目がこの削除の処理を行っている．

その後，G^r 上の頂点 γ_q の隣接頂点集合 $\mathrm{NL}(\gamma_q$ と γ_k の隣接頂点集合 $\mathrm{NL}(\gamma_k)$ が一致するような頂点 γ_k を見つけ出す．そのようなグループ γ_k と γ_q は 1 つのグループにまとめられるので，それらのグループに属している頂点のリストを足し合わせる．そうすると G^r においては γ_k の隣接頂点は次数が 1 減少する．もし $\deg(\gamma_k)$ の値が 1 となったら γ_k を L_1 に加える．Algorithm2 の 7 行目から 16 行目がこの処理を行っている．

このアルゴリズムは縮小グラフを元に動作しているため，全体の計算量は縮小グラフの頂点数 t に依存する．アルゴリズム 1 の 10 行目の while は縮小グラフの更新回数分，つまり高々 t 回行われる．アルゴリズム 2 の 7 行目の G^r 上の γ_q の隣接頂点集合が一致する頂点を探す．これは，$\deg(\gamma_q) = \deg(\gamma_k)$ となる範囲で k を探せばよいが，1 頂点の比較で一致しているか $O(t)$ の計算時間がかかるため，Search k such $\mathrm{NL}(\gamma_k) = \mathrm{NL}(\gamma_q)$ は $O(t^2)$ かかる．

4.2 アルゴリズムの実装

上で述べたアルゴリズムでは縮小グラフ G^r の隣接リスト $\mathrm{NL}(\gamma_i)(1 \leq i \leq t)$ を用いてるため，全体の計算時間は $O(t^3)$ であった．各隣接リストの中身はソートされているので，これら t 個の隣接リストからトライを構成すれば Algorithm2 の 7 行目は $O(t)$ の時間で実行できる．

図 1 左のような縮小グラフに対するトライ木を同図 1 右に示した．縮小グラフの頂点とトライ木の四角で囲まれた頂点は対応している．トライ木において，根から四角で囲まれた頂点 γ_i へ至る路をたどることで $\mathrm{NL}(\gamma_i)$ が得られる．なお，この四角で囲まれた頂点 γ_i

Algorithm 1

1: BDHG G から対応する縮小グラフ G^r を作る
2: L_1 を G^r 上の次数 1 の頂点のリストとする
3: $\mathrm{L}(\gamma_i)$ を G 上のグループ γ_i に属している頂点のリストとする
4: $\|\gamma_i\|$ を G 上のグループ γ_i に属している頂点の個数とする
5: $\mathrm{NL}(\gamma_i)$ を G^r 上の頂点 γ_i の隣接頂点のリストとする
6: $\deg(\gamma_i)$ を頂点 γ_i の次数とする
7: **if** $|V^r| = 2$ **then**
8: 　“ハミルトン閉路が存在する”と出力する
9: **end if**
10: **while** $|V^r| > 2$ **do**
11: 　$\deg(\gamma_p) = 1$ である頂点 γ_p を選択する
12: 　r_q を r_p に隣接する頂点とする
13: 　**if** $\|\gamma_p\| \geq \|\gamma_q\|$ **then**
14: 　　“ハミルトン閉路は存在しない”と出力する
15: 　**else**
16: 　　G^r **の更新** [Algorithm2]
17: 　**end if**
18: **end while**
19: “ハミルトン閉路が存在する”と出力する

Algorithm 2 “G^r の更新”

1: $\|\gamma_q\| = \|\gamma_q\| - \|\gamma_p\|$
2: $\mathrm{NL}(\gamma_q = \mathrm{NL}(\gamma_q) \backslash \{\gamma_p\}$
3: $\deg(\gamma_q) = \deg(\gamma_q) - 1$
4: **if** $\deg(\gamma_q) = 1$ **then**
5: 　$\mathrm{L}_1 := \mathrm{L}_1 \cup \{\gamma_q\}$
6: **end if**
7: **Search k** such that $\mathrm{NL}(\gamma_k) = \mathrm{NL}(\gamma_q)$
8: **if** such k exists **then**
9: 　$\|\gamma_k\| = \|\gamma_k\| + \|\gamma_q\|$
10: 　**FOR** $x \in \mathrm{NL}(\gamma_k)$
11: 　　$\deg(z) = \deg(z) - 1$
12: 　　**if** $\deg(z) = 1$
13: 　　　$\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_1 \cup \{z\}$
14: 　　**end if**
15: 　**end FOR**
16: **end if**

へのポインタを配列 n に記憶しておくことで, トライ内の (四角で囲まれた) 頂点へのアクセスが定数時間でできるようにしておく.

縮小グラフの更新では頂点 $\gamma_i(1 \leq i \leq t)$ と辺 $e_i(1 \leq i \leq h)$ の削除が行われる. これをトライ上で実行するが, 縮小グラフの各辺についてトライ上での更新はアルゴリズム全体を通して 1 回ずつしか行われない. そのため, アルゴリズム全体の計算量は $O(t+h)$ になる. グラフが密の場合, t は $|V|$ よりかなり小さくなることが期待でき, 既存のアルゴリズムより効率が向上する. $t = O(|V|)$ のときは, 提案アルゴリズムの計算量は $O(|V| + |E|)$ である.

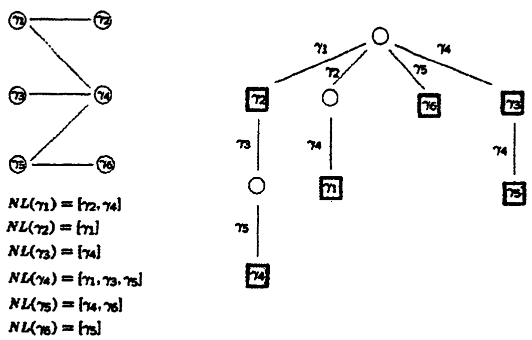

図 1: トライ木

5 結論

本研究では BDHG に対するハミルトン閉路問題のアルゴリズムを提案した. 縮小グラフと拡張条件という新しい概念を用いたことが既存研究と異なる点である.

既存アルゴリズムの計算時間は $O(|V|(|V|+|E|))$ で辺の数が大きくなると計算量が大きくなる. つまり, FT 操作が多い BDHG に対しては計算量が大きくなる. しかし, 本論文で提案するアルゴリズムは計算量が縮小グラフの頂点数に依存するため, そのような問題に対して高速に問題を解くことができる.

参考文献

[1] Hans-Jürgen Bandelt and Henry Martyn Mulder. Distance-Hereditary Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, pp. 182–208, 1984.

[2] Andreas Börklund. Determinant Sums for Undirected Hamiltonicity. *Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp. 173 – 182, 2010.

[3] Haiko Müller. Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, Vol. 156, pp. 291–298, 1996.

[4] Haiko Müller and Falk Nicolai. Polynomial time algorithms for Hamiltonian problems on bipartite distance-hereditary graphs. *Information Processing Letters 46*, pp. 225–230, 1993.

[5] Maw-Shang Chang Ruo-Wei Hung. Linear-time algorithms for the Hamiltonian problems on distance-hereditary graphs. *Theoretical Computer Science*, Vol. 341, pp. 411–440, 2005.

[6] Tsan-Sheg Hsu Ming-Tat Ko Sun-Yuan Hsieh, Chin-Wen Ho. The Hamiltonian problem on distance-hereditary graphs. *DISCRETE APPLIED MATHEMATICS*, pp. 508–524, 2006.

[7] Masahide Takasuka and Tomio Hirata. 距離遺伝 2 部グラフ上のハミルトン閉路アルゴリズム. 2012.

[8] TAKAHARA Yoshiriro, TERAMOTO sachio, and UEHARA Ryuhei. Longest Path Problem on Ptolemaic Graphs. *JAIST Repository*, pp. 170–177, 2008.