

水波・内部波の非線形二次元相互作用

九大・応力研 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)

1 はじめに

水の波や内部波の研究は、応用数学、流体力学的な観点や海洋環境における変動を調べる目的など、多面的な視点からの重要性を持つ。特に波長の長い変動において、秩序だった構造としての孤立波の伝播が重要であることが、大気や海洋での観測例 [1] からわかる。この特徴的な現象に関して、これまでの研究は主に一次元的な波動の伝播についてであったが、水平二次元の領域を伝播する二次元的な波動の相互作用は一次元のものとは本質的に異なるということが、最近の研究の中で解ってきた [2]。よく知られた「相互作用前後で形を変えずに伝播する」という現象だけでなく、相互作用による新たなソリトンの生成など（共鳴相互作用）が見られる場合がある。

水面波については、Miles[3]に始まる多くの研究がある [4, 5]。特に、伝播方向が非常に近い（弱二次元的）場合の相互作用を表すモデル方程式である Kadomtsev-Petvishvili(KP) 方程式 [6] が理論的によく調べられており、最近 Kodama らのグループによって新しいクラスの解が見つかった [7, 8]。

また、成層流体中の内部波に関しても、いくつかの研究がある。成層流体中の非線形波動を表すモデル方程式として、よく知られた Korteweg-de Vries(KdV) 方程式の他に、Benjamin-Ono(BO) 方程式、さらにこの二つを極限として持つ Intermediate Long Wave (ILW) 方程式などが知られている。内部波としての孤立波の二次元相互作用を調べるために、KP 方程式と同様の拡張を行った二次元 BO 方程式や二次元 ILW 方程式が数値的に調べられた [9, 10]。その結果、それぞれの方程式に従う孤立波の相互作用は、共鳴相互作用と定性的に類似していることが明らかになった。

さて、これまでの研究では、壁などの反射問題に対応していることもあり、同振幅の孤立波同士の相互作用が調べられてきた。しかしながら、Kodama らのグループの解析により、異なる振幅同士の相互作用についても興味深い現象があることがわかってきた。これを数値計算で調べるには、境界条件に関する技術的な困難があったが、最近 Navier-Stokes 方程式の数値計算に対して提案された方法（window method [11]）を適用することによって解決できることがわかった [12]。

本研究では、この Windows 法について説明を行った後、その適用例として、Benney-Luke(BL) 方程式の孤立波の数値計算について述べる¹。BL 方程式は、二次元水面波の伝播を表す方程式であり、KP 方程式の弱二次元性の仮定が無い場合にも成り立つ。その場合の孤立波の相互作用を調べることは興味深い。

なお本研究は、及川正行教授（福岡工大）、Prof. Kenichi Maruno(Univ. Texas Pan-American)、Prof. Yuji Kodama (Ohio State Univ.)、Prof. Bao-Feng Feng(Univ. Texas Pan-American) との共同研究である。

2 Windows method による非線形モデル方程式の計算法

Schlatter[11] らは、周期境界でない問題に対しても高精度のスペクトル法を用いる工夫として windows method を提案した。この方法は、

1. 従属変数を窓関数により変換する。
2. 新しい従属変数によって記述された方程式を導き、解を得る。
3. 求めた新従属変数の解から元の従属変数の解を得る。

とする方法である。

具体的に KP 方程式

$$(4u_t + F_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0, \quad F = 3u^2 \quad (1)$$

を例として述べる²。ここでは、 x 方向には十分広い領域を取って周期境界条件を課す事ができるとする。その場合、窓関数は y 方向のみに依存する関数ととることができる。考える領域が $y = (0, L)$ である場合

$$W(y) = 10^{-a^n \left| \frac{2y}{L} - 1 \right|^n} \quad (2)$$

の形をとる。この関数は、領域の両端 $y = 0, L$ で 0 に近づき、両端から離れた領域の中央部で 1 を取る。ここで、 a, n はそれぞれ境界上の値と両端付近の増加率に関係したパラメータである。ここでは $a = 1.111$, $n = 27$ とする。この窓関数の選択は Schlatter[11] の論文のものを用いている。

¹講演では、KP 方程式での結果についても述べたが、ここでは省略する。

²方程式の係数は変数変換によって変えられることに注意する。基礎方程式などからの導出などは [6] を参照されたい。

これを用いて以下のように変数変換を行う。

$$\tilde{u} \equiv W(y)u, \quad \tilde{F} \equiv W(y)F. \quad (3)$$

この新しい変数を用いて、KP方程式を書き換える。 $\tilde{u}_{xxx} = W u_{xxx}$, $\tilde{u}_{yy} = W_{yy}u + 2W_y u_y + W u_{yy}$, などの関係式を用いると、以下の式を得る。

$$\left(4\tilde{u}_t + \tilde{F}_x + \tilde{u}_{xxx}\right)_x + 3\tilde{u}_{yy} = 3\tilde{W}_{yy}u + 6\tilde{W}_y u_y. \quad (4)$$

右辺にある付加的な項は、窓関数の性質から y の境界付近でほぼ 0 となるため、この方程式全体は周期境界条件を満たしており、通常のスเปクトル法で解くことができる。

そして、求められた \tilde{u} から、想定している境界条件「相互作用領域外の定常進行孤立波が無限遠まで伸びている」を使って実際の u を復元する。相互作用領域外での任意の時点での場の値は定常進行孤立波解（1-ソリトン解）から解析的に求められる³。

3 BL方程式のソリトン二次元相互作用

ここでは、Windows method を用いた水の波の計算として BL 方程式を数値的に調べた例を示す。最近、近似的な 2 ソリトン解が求められ、相互作用についての理論的な枠組みが与えられた。方程式の導出も含めそのような理論的な背景についての詳細は [13] に詳しい。

3.1 BL方程式のソリトン解

BL 方程式の具体的な形は、

$$\left(1 - \frac{\beta}{3}\Delta\right) f_{tt} - \Delta f + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} |\nabla f|^2 + f_t \Delta f\right) = 0. \quad (5)$$

ここで、 f は底面での速度ポテンシャル、 α, β は、同程度の微小パラメーターである。この方程式の定常進行波解（1-ソリトン解）は、

$$f = \frac{2\beta}{3\alpha} \Omega \left(1 + \tanh \frac{\theta}{2}\right), \quad \theta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} - \Omega t + \theta^0. \quad (6)$$

ただし、パラメーター \mathbf{K}, Ω はソリトン分散関係

$$D_{BL}(\Omega, \mathbf{K}) \equiv \Omega^2 - |\mathbf{K}|^2 - \frac{\beta}{3} \Omega^2 |\mathbf{K}|^2 = 0, \quad (7)$$

³なお、この復元の方法について、Schlatter[11] はいくつかの方法を与えているが、ここでのやり方は最も簡単なものである。

を満たす。BL 方程式に微小パラメーターに関する近似を考えることにより、双線形形式での式を得ることができる [13]:

$$\left[D_t^2 - (D_x^2 + D_y^2) - \frac{\beta}{3} D_t^2 (D_x^2 + D_y^2) \right] \tau \cdot \tau = 0.$$

ここで、 τ は $f = -\frac{4\beta}{3\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \ln \tau$ で決まる変数である。また双線形演算子

$$D_x f \cdot g \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) f(x)g(x') \Big|_{x'=x}$$

はソリトン方程式でソリトン解を導出する場合に良く使われるが、それだけでなく、いくつかの非線形方程式において解を求める際に使われている。双線形形式に書けたことにより、2ソリトン解が構成される。

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad A_{12} = -\frac{D_{BL}(\Omega_1 - \Omega_2, \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)}{D_{BL}(\Omega_1 + \Omega_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)}, \\ \theta_i &= \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{x} - \Omega_i t + \theta_i^0 = K_i^x x + K_i^y y - \Omega_i t + \theta_i^0, \quad D_{BL}(\Omega_i, \mathbf{K}_i) = 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

この解が存在するためには、パラメーター \mathbf{K}_i によって決まる A_{12} が正であるという条件を満たさないといけないことに注意する。

3.2 BL 方程式の初期値問題の数値計算

以下に BL 方程式を数値的に解くが、その際に BL 方程式を以下のように分割して書く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \eta_0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\eta_0 (\nabla \cdot \mathbf{g}), \quad \mathbf{g} = \nabla \tilde{f} = \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial x}, \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \right), \\ \eta_0 &= \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \left(1 - \frac{\beta}{3} \Delta \right) \eta_0 = -\rho - \alpha |\mathbf{g}|^2 + \alpha h. \end{aligned} \quad (9)$$

この方程式を windows method で解く。変換後の変数であらわされた方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{g}} + (W_x \partial_x, W_y \partial_y) \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial t} = \nabla \tilde{\eta}_0 - (W_x \partial_x + W_y \partial_y) \eta_0, \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} &= -\tilde{F}_{NL1}, \quad F_{NL1} \equiv -\eta_0 (\nabla \cdot \mathbf{g}), \\ \left(1 - \frac{\beta}{3} \Delta \right) \tilde{\eta}_0 &= -\tilde{\rho} - \alpha \tilde{F}_{NL2} + \alpha \tilde{h} - \frac{\beta}{3} (W_{xx} + W_{yy} + 2W_x \partial_x + 2W_y \partial_y) \eta_0, \quad F_{NL2} \equiv |\tilde{\mathbf{g}}|^2 \end{aligned}$$

である。なお、ここでは x, y 両方向で窓関数を考えており、窓関数は x, y の関数となっているが、その性質は 1次元のときと基本的に変わらない。

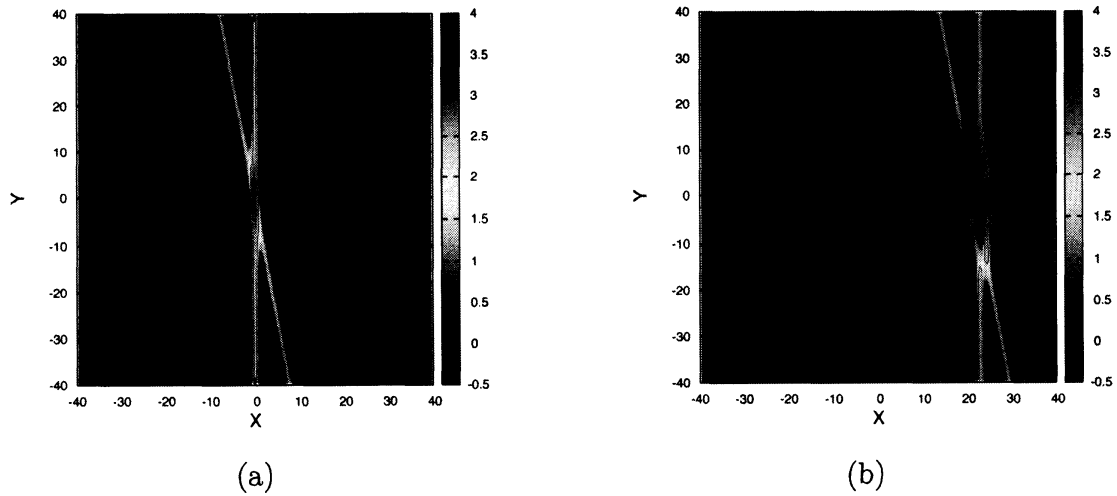


図 1: $\Psi = 11$ での二つの孤立波の相互作用。(a) $T = 0$, (b) $T = 20$ 。

時間発展は Crank-Nicholson 法で定式化し、非線形項の計算では反復法を用いている。計算点は X, Y 方向にそれぞれ 1024 点を取り、格子間隔は両方向で 0.1、時間間隔は 0.005 としている。方程式のパラメーターについては、 $\alpha = \beta = 0.09$ とする。

初期条件として、直線的に伸びるソリトンを重ね合わせたものを用いる。今後結果を示す変数として ρ (式 (9) 参照) を使うが、それで表すと、

$$\rho = \frac{\beta}{3\alpha} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \theta_1 + \frac{\beta}{3\alpha} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \theta_2, \quad \theta_i = \mathbf{K}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \Omega_i t, \quad \Omega_i^2 - |\mathbf{K}_i|^2 - \frac{\beta}{3} \Omega_i^2 |\mathbf{K}_i|^2 = 0. \quad (10)$$

である。ソリトンを表すパラメーターとして、ここでは $\mathbf{K}_1 = (2\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{K}_2 = (2 \cos \Psi, 2 \sin \Psi)$ とする。このとき、それぞれのソリトンの振幅は固定値をとり、また \mathbf{K}_1 で決まるソリトンは Y 軸に平行に伸びている一方、 \mathbf{K}_2 で決まるソリトンは角度 Ψ の方向に伸びている。この角度の違いにより、相互作用の結果が変わることを以下に示す。このパラメーターで対応する 2 ソリトン解 (8) を作ると、存在するための条件が満たされない角度があり、それとの対応も以下で見る。

最初に $\Psi = 11$ の結果を図 1 に示す。この角度は、前節の 2 ソリトン解 (8) が存在可能な角度となっている。初期に置かれた孤立波の相互作用により、領域中央部に新しい孤立波が二本形成される。この波は元にあった 2 本の孤立波と 2 箇所相互作用を行いつつ、外側に広がりながら進行する。それぞれ相互作用する場所でのパターンは、KP ソリトン解の P-type⁴ に対応するパターンと考えられる。

次に、 $\Psi = 80$ の結果を図 2 に示す。この角度も 2 ソリトン解が存在できる角度である。

⁴以降に出てくる KP 方程式の解のタイプについては [14] を参照されたい。

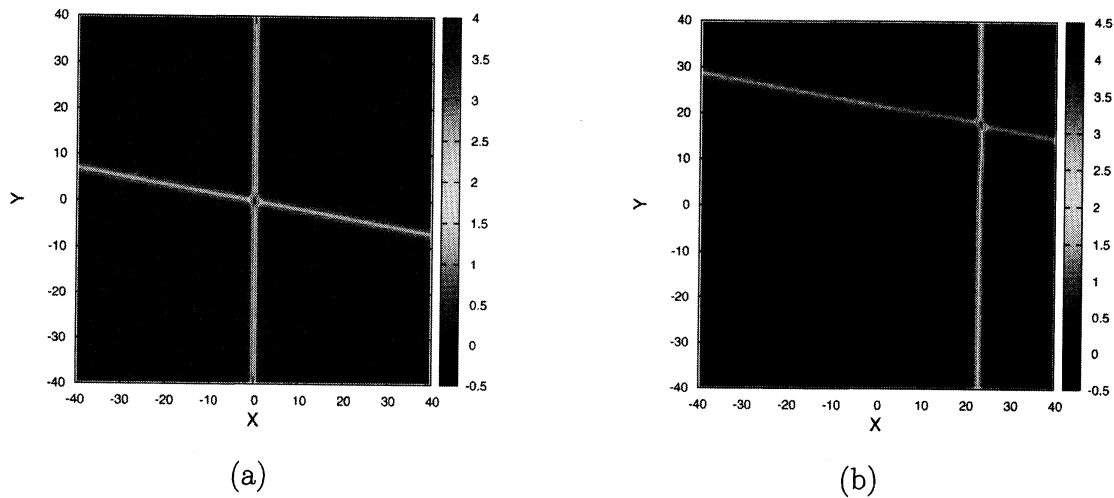


図 2: $\psi = 80$ での二つの孤立波の相互作用。(a) $T = 0$, (b) $T = 20$ 。

十分時間がたった後も、相互作用の影響は位相ずれのみである。新しいソリトンの形成を伴わないこの場合は、KP ソリトン解の O-type の解に対応している。

2 ソリトン解 (8) が存在しない角度での結果として、 $\Psi = 45$ の結果を図 3 に示す。孤立波の相互作用により振幅の大きな波 (stem) が生成される。その後方にも孤立波が伸び、元の波と相互作用を行っている。stem の形成を伴うこの場合は、KP ソリトン解の T-type の解に対応している。

この stem の性質について、もう少し詳しく調べたものを図 4 に示す。まず stem の長さは時間とともに線形に増加することが、図 4(a) からわかる。その増加率は一定であり、その値は相互作用の角度とともに減少する。この増加率の値を角度でプロットすると (図 4(b))、この減少はほぼ線形で減少していることがわかる。一方、臨界角度に近くなると、その減少は線形からずれるが、臨界角度近くでは stem の長さが短いため、測定に誤差が生じている可能性もあり、今後調べる必要がある。なお、臨界角度近くのデータを除いて線形に増加率が落ちるとすると、増加率が 0 となる角度は 72 度付近であり、これは理論による 2 ソリトン解の存在できる臨界角度とほぼ一致する。以上の傾向は対応する KP 方程式の数値計算の結果 [7] に非常に類似している。

最後に、KP 方程式の Wronskian 解 [14] のような複雑なソリトン解の存在を調べる。Wronskian 解のうちでもっともシンプルな (2, 1) ソリトン解は無限遠に伸びる 3 本のソリトンが 1 点で交差している Y 字型の解で、ソリトンのパラメーター K_i, Ω_i が共鳴条件「 $K_1 = K_2 + K_3$ かつ $\Omega_1 = \Omega_2 + \Omega_3$ 」を満たす。このような相互作用が BL 方程式で

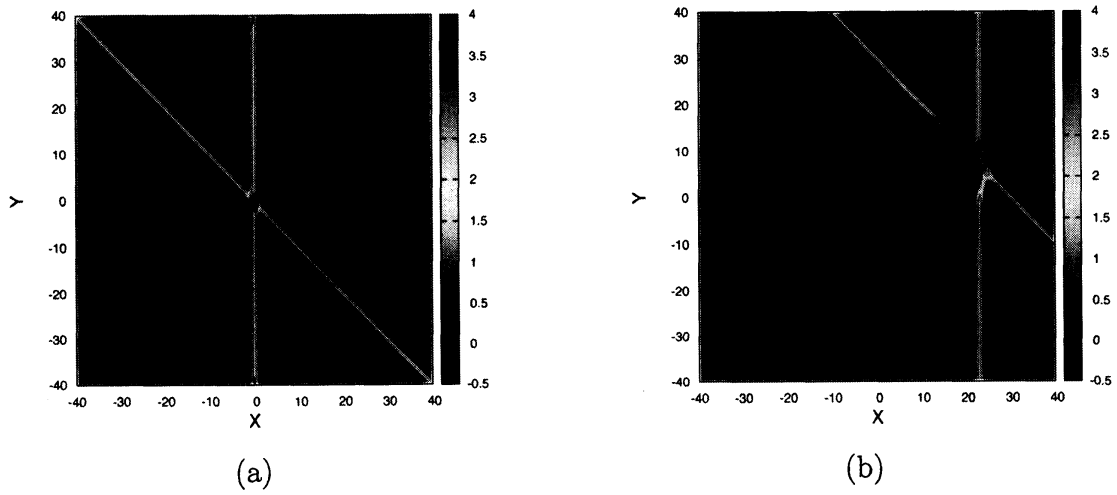


図 3: $\Psi = 45$ での二つの孤立波の相互作用。(a) $T = 0$, (b) $T = 20$ 。

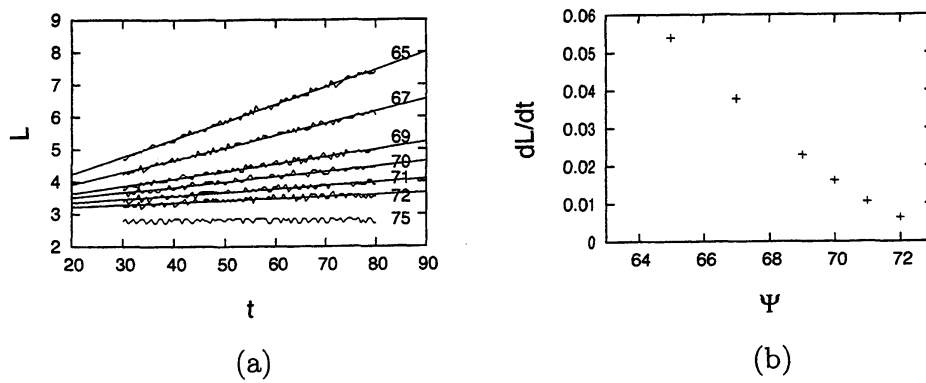


図 4: 共鳴相互作用によって生じる stem の長さ。(a): 時間発展による stem の長さ L の時間変化。図中の数字は相互作用の角度 Ψ を表す。(b): 相互作用の角度に対する時間変化率。

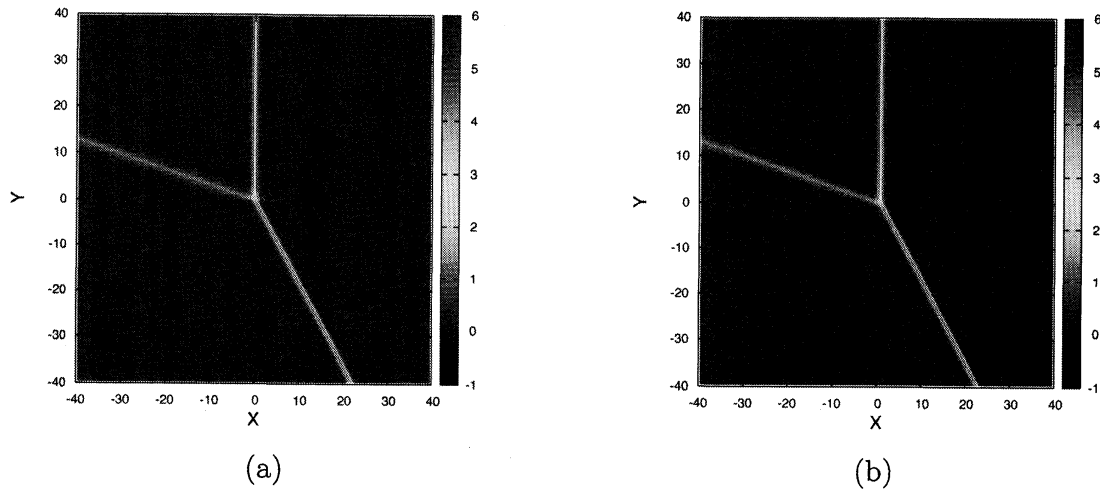


図 5: 共鳴条件を満たす 3 本のソリトンの相互作用。(a) $T = 0$, (b) $T = 80$ 。三本の波の重なる場所が原点近くに留まるよう、計算領域を適宜ずらす処理を行っている。

も可能なのかを調べるため、共鳴条件を満たす 3 本のソリトンを組み合わせた初期値の時間発展を図 5 に示す。 $T = 0$ において 3 本のソリトンが原点から伸びている。ここから時間発展を行うと、過渡状態としての小さな波が初期に生じるが、3 本のソリトンはそれぞれ安定に進行している。このパターンは KP 方程式での $(2, 1)$ ソリトン解と類似している。

4 まとめ

非線形孤立波の二次元的相互作用について、BL 方程式での相互作用を例に取り、windows method を用いて数値的に調べた結果を示した。

二次元局在解があるような系とは違い、ここで取り上げている水波、内部波は一次元的に峰が伸びている直線的なソリトン解がより基本的である。その相互作用を数値的に調べる場合に、境界の処理は重要な要件である。KP 方程式の理論は、より複雑な相互作用についても分析されている。それに対応した BL 方程式での相互作用や、また違う方程式系での相互作用を数値的に調べたいと考えており、その際に windows method は有用であろう。

参考文献

- [1] Global Ocean Associates, "An Atlas of Internal Solitary-like Waves and their Properties (Second Edition)", <http://internalwaveatlas.com/> (ウェブサイト).
- [2] Oikawa, M. and Tsuji, H., "Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems", *Fluid Dyn. Res.*, 38(2006) 868-898.
- [3] Miles, J. W., "Resonantly interacting solitary waves", *J. Fluid Mech.* 79(1977), 171-179.
- [4] Funakoshi, M. "Reflection of obliquely incident solitary waves" *J. Phys. Soc. Japan* 49 (1980) 2371-2379.
- [5] Tanaka, M. "Mach reflection of a Large-amplitude solitary wave" *J. Fluid Mech.* 248(1993) 637-661.
- [6] Johnson, R.S. , "A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves", Cambridge University Press (1977).
- [7] Kodama Y., Oikawa, M., and Tsuji, H., "Soliton solutions of the KP equation with V-shape initial waves" *J. Phys. A* 42(2009) 312001(9pp).
- [8] Chakravarty, S. and Kodama, Y., "Soliton Solutions of the KP Equation and Application to Shallow Water Wave", *Stud. Appl. Math* 123 (2009) 83-151.
- [9] Tsuji, H. and Oikawa M., "Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth", *Fluid Dyn. Res.*, 29(2001) 251-267.
- [10] Tsuji, H. and Oikawa M., "Two-dimensional interactions of solitons in a two-layer fluid of finite depth" *Fluid Dyn. Res.*, 42(2010) 065506
- [11] Schlatter, P., Adams, N.A. and Kleiser, L., "A windowing method for periodic inflow/outflow boundary treatment of non-periodic flows", *J. Comp. Phys.*, 206(2005) 505-535.
- [12] Kao, C.-Y., Kodama, Y., "Numerical study of the KP equation for non-periodic waves", *Mathematics and Computers in Simulation* (2010), doi:10.1016/j.matcom.2010.05.025

[13] 丸野健一, 児玉裕治, 辻英一, Bao-Feng Feng, "浅水域における2次元弱非線形孤立波の相互作用の解析: Mach 反射における Benney-Luke 方程式と KP 方程式" 九州大学応力研研究集会講究録 23AO-S7

[14] Kodama Y., "KP solitons in shallow water", J. Phys. A 43(2010) 434004(54pp).