

水の波の分岐問題における様々な非対称解

日本女子大学・理学部・数物科学科 東海林 まゆみ(Mayumi Shōji)
Department of Mathematical and Physical Sciences,
Japan Women's University
株式会社数理技研 清水 千賀(Chika Shimizu)
Artists of Computer Programming

1. はじめに

水の波の分岐問題は古典的な問題で、現在まで数学的にも数値的にも多数の研究がなされている。しかしその多くは対称な波に関するもので、非対称な波に関する研究は極めて少ない。非対称解が存在するかどうかについて、理論的な証明は未だなされていない。唯一数値解として、Zufiria (1987) によって計算された6つの山を持つ非対称解が知られているのみである。そこで我々は、Zufiria とは異なる定式化・数値計算法を用いて6つの山を持つ非対称解の存在を検証し、さらに別種の非対称解が存在するかどうかを調べてみた。また同時に、対称性破壊のメカニズムや分岐構造も確認することを目指とした。新たな非対称解として2つの山を持つ解を見つけることが出来た。そして、それらの分岐構造も調べることが出来たのでそれらを報告する。なお本報告は、現在 JJIAM に投稿中の C. Shimizu & M. Shōji [8] を要約したものである。

2. 問題の背景

非粘性非圧縮流体で2次元渦無し流れの進行波を考える。ここではすべて、流体は無
限の深さの場合を考える。外力は重力と表面張力のみが働いているものとする。波は
周期的な形状を保ちながら一定方向に一定速度で進行している。このとき考える問題
は分岐問題として定式化できる。そして、波の進行速度と重力あるいは表面張力との
大小関係によって様々な分岐解が存在することがわかっており、多数の数値計算結果
も紹介されている (H Okamoto and M Shōji [6] 他)。このように多くの研究が行われ
てきた古典的な問題であるが、それらの研究のほとんどは対称波¹の場合に限られ

¹ “対称な波”とは、波形が左右対称になるように縦軸を選ぶことができる場合を言う。そうでない場合を“非対称波”と呼ぶことにする。

ていて、非対称な波に関してはあまり解っていないのが現状である。以下に、非対称解に関してわかっている事実をまとめておく。

まず表面張力波の場合には、Crapper [1] により厳密解が与えられており、この厳密解は対称波である。そしてこの Crapper 波からは高次分岐解が存在しないことが理論的に証明されている (H. Okamoto & M. Shōji [5])。つまりもし Crapper 波以外の解が存在するとすれば、それは Crapper 波の分岐枝や自明解とは離れたところに存在することになる。しかし一方、表面張力波では自明解からの 1 次分岐解以外の解は存在し得ない、という数値的予測をしている ([5])。この予測については改めてまとめの章で言及する。以上を考えると、表面張力波の場合には非対称解は存在しないであろう、というのが我々の予測である。

重力波の場合、理論的には以下のことが示されている。Garabedian [2] は、ひと山の重力波は必ず対称波であることを数学的に証明した。またすべての重力波の分岐解は、自明解からの 1 次分岐点の近傍では対称波である、ということも Levi-Civita [4] が証明した。そしてこの証明法に習えば、2 重分岐点が存在する重力・表面張力波の場合にも同様のことが言える ([6])。つまり自明解からの 1 次分岐点近傍では解は対称波である。以上のことから理論的に明らかなことは、もし非対称な解が存在するとすれば、それは自明解からの 1 次分岐点近傍ではなく、また波形が 2 つ以上の山を持つような解であろう、ということである。

一方数値計算結果として、Zufiria が深さ有限の重力波 [9]、深さ無限の重力波 [10]、深さ有限の重力・表面張力波 [11] の場合に求めた非対称解がある。これらはいずれも対称波からの高次分岐解として得られており、波形はすべて 6 つの山を持つ解である。Zufiria の数値解の他には、非対称な解はまだ得られていない。

以上を考慮し、我々はまず対称な分岐解の分岐図式を求め、次にそれら対称解の分岐枝上に対称性破壊点が存在するかどうかを調べることから始める。もし非対称解が見つかったら、そこから分岐枝を延長し分岐構造を調べる。次に分岐パラメータを変化させて分岐構造がどのように変わるかを調べる。Zufiria の研究では分岐構造に関してはあまり明確にされていないので、分岐構造や分岐メカニズムを調べるのが我々にとって興味のある研究テーマである。

3. 問題の定式化

波は、 L -周期形状を保ちつつ、一定速度 $-c$ で左方向に進行しているものとする。この波と一緒に動く座標系を (x, y) とするとき、この動座標系で見ると波は静止し流体は右方向に一定速度 c で流れているような定常問題として考えることが出来る。自由境界が $\{(x, y) \mid y = h(x)\}$ で表されるものとする。今、周期的な条件で考えているので、領域 $\Omega_h = \{-L/2 < x < L/2, -\infty < y < h(x)\}$ において周期境界条件で考え

ればよい. 今, U と V を各々速度ポテンシャルと流れ関数とし, $f(z) = U + iV$, $z = x + iy$ とおく. このとき $f(z)$ は z に関して正則な関数であり, 考える問題は以下を満たす境界形状関数 $y = h(x)$ と複素ポテンシャル $f(z)$ を求めること, と記述できる.

$$\begin{aligned} V &= 0 && \text{on } y = h(x), \\ \frac{df}{dz} &\rightarrow c && \text{as } y \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{2} \left| \frac{df}{dz} \right|^2 + gy - \frac{T}{m} K &= \text{定数} && \text{on } y = h(x), \end{aligned}$$

ただしここで, c, m, g, T はそれぞれ, 波の進行速度, 流体密度, 重力定数, 表面張力係数, 自由境界の曲率を表す正定数である. また周期境界条件を考えているので, $h(x+L) = h(x), f(z+L) = f(z)$ を仮定する.

この問題を解く上で数学的に難しいところは, 境界が未知であることつまり自由境界問題である, ということである. この困難さへの対処法として我々は Levi-Civita [4] の定式化に習って, 下記に示すような固定領域上での問題に帰着させて考える.

問題 (by Levi-Civita) 下記の方程式を満たす 2π 周期関数 $\theta = \theta(\sigma)$ を求めよ.

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{e^{2H\theta}}{2} \right) - pe^{-H\theta} \sin \theta + q \frac{d}{d\sigma} \left(e^{H\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} \right) = 0 \quad (1)$$

ただし, $p = gL/(2\pi c^2), q = 2\pi T/(mc^2L)$. H は次式で定義される演算子である.

$$H \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\sigma + b_n \cos n\sigma) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \cos n\sigma + b_n \sin n\sigma)$$

この問題は, 2つのパラメータ p と q を分岐パラメータとする分岐問題であり, 対称波の分岐解に関し次のことは既知の事実である. 任意の p, q に対し常に $(p, q; \theta) = (p, q; 0)$ を自明解として持つ. $(p, q) = (p_0, q_0)$ が自然数 n に対して $n - p_0 - n^2 q_0 = 0$ を満たすときその点は分岐点となり, その近傍には n 個の山を持つ分岐解が存在する. このような分岐点をモード n の分岐点と呼ぶことにする. また $(p, q) = (p_0, q_0)$ が異なる二つの自然数 m, n に対して $m - p_0 - m^2 q_0 = 0$ と $n - p_0 - n^2 q_0 = 0$ を満たすときモード (m, n) の2重分岐点と呼ぶ. これは具体的に表せて $(p_0, q_0) = (mn/(m+n), 1/(m+n))$ である. 2重分岐点の周りでは複雑な分岐構造を持つことがわかっている.

一方、未知関数 θ と h は $dh(x)/dx = \tan\theta$ の関係をなす。つまり θ は、自由境界上の点における接線と x 軸とのなす角を表すものである。(1) の解が得られれば、自由境界のパラメータ表示 $\{(x(\sigma), y(\sigma)); 0 \leq \sigma < 2\pi\}$ が下記の積分で計算できる。

$$x(\sigma) = -\frac{L}{2\pi} \int_0^\sigma e^{-H\theta(\sigma')} \cos\theta(\sigma') d\sigma', \quad y(\sigma) = -\frac{L}{2\pi} \int_0^\sigma e^{-H\theta(\sigma')} \sin\theta(\sigma') d\sigma'$$

ここでは流体の深さが無限の場合を考えているので、平均水位は任意に定めてよい。簡単のため以下では、すべての波形を $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ として描いた。

方程式 (1) は次のような性質²をもつことを注意しておく。つまり、もし $\theta(\sigma)$ が解であれば、 $\theta(\sigma+\alpha)$ (ただし α は任意の実数) と $-\theta(-\sigma)$ も解である。

4. 数値計算

数値計算は、Fourier 級数展開による選点法を用いた。分岐枝の追跡法は Keller の方法 [3] に従った。以下に概略を示す。式 (1) の左辺を $f(p, q; \theta)$ とおくと、問題は $f(p, q; \theta) = 0$ の近似解を求めることである。近似解として Fourier 級数展開を N 項で打ち切った $\theta^{(N)}$ を用いる。つまり

$$\theta^{(N)}(\sigma) = \sum_{n=1}^N (a_n \sin n\sigma + b_n \cos n\sigma), \quad H\theta^{(N)}(\sigma) = \sum_{n=1}^N (-a_n \cos n\sigma + b_n \sin n\sigma)$$

とする。係数 $\{a_n, b_n\}$ ($n=1, 2, \dots, N$) が求めるべき未知数である。つまり (1) の近似方程式は

$$f^{(N)}(p, q; a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)(\sigma) = f(p, q; \theta^{(N)}(\sigma)) = 0 \quad (2)$$

である。問題は分岐パラメータの一方 (ここでは p) を固定したとき、(2) 式を満たす $\{q, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ を求めることになる。

まず対称解を考える。この場合には、 y 軸を対象軸に選ぶことができる。そうすると $\theta(\sigma)$ は奇関数となるから、すべての b_n を 0 とおいてよい。したがって未知数は q と a_n ($n=1, 2, \dots, N$) の $N+1$ 個となる。これらの未知数に対する $N+1$ 本の条件式は

下記のように決める。(0, π) 区間を $N+1$ 等分割し、 N 点 $\sigma_j = j\pi/(N+1)$ ($j=1, 2, \dots, N$)

を選点とすれば、(2) 式から N 本の条件式

$$f^{(N)}(p_0, q; a_1, a_2, \dots, a_N, 0, \dots, 0)(\sigma_j) = 0, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

² いわゆる O(2)-equivariance と呼ばれる性質

が与えられる。もう1本の条件式は、追跡したい分岐枝の方向に応じて

$$q - \gamma = 0 \quad \text{あるいは} \quad a_m - \alpha = 0 \quad (4)$$

を用いる³。ただし γ と m, α は適宜に与えられる定数である。 γ や α を順次変化させながら分岐枝を追跡していけばよい。(3)(4) 式を Newton 法で解く際の初期値としてはすでに得られている解を用いればよい。もし数回で収束しない場合にはコントロール式を適切なものに代えてやり直せば、通常はうまくいく。

非対称解を求める場合にも同様に考えていく。この場合には未知数としてさらに b_n ($n=1, 2, \dots, N$) が加わり計 $2N+1$ 個になるので、 $(\pi, 2\pi)$ 区間にも選点を置く。

つまり $\sigma_j = j\pi/(N+1)$ ($j=N+2, \dots, 2N+1$) の N 個を選点として加えれば $2N+1$ 個の未知数に対し $2N$ 本の条件式

$$f^{(N)}(p_0, q; a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N)(\sigma_j) = 0, \quad j=1, \dots, N, N+2, \dots, 2N+1 \quad (5)$$

が決まる。コントロール式としては (4) の代わりに

$$b_m - \beta = 0 \quad (6)$$

を用いる。 β は適宜に与えられる定数である。対称波と同様に、すでに得られている解を Newton 法の初期値として(5)(6) 式を解けば $b_m = \beta \neq 0$ である解が得られる。

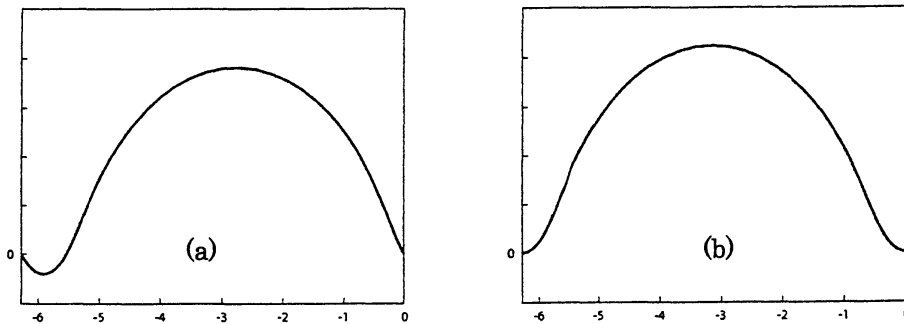


図1 (a) $b_m \neq 0$ だが非対称解ではない (b) 左の波(a)のシフト波で $\forall b_m = 0$ の対称波

ただしここで次の点に注意しなくてはならない。それは、 $b_m \neq 0$ である解が必ずしも非対称な解であるとは限らない、ということである。図1で例示する。左図 (a) の波形は左右対称ではなく、実際 $b_m \neq 0$ である。しかしこの波は図1(b)のように、 $\forall b_m$

³ 以降、これらをコントロール式と呼ぶことにする。

$=0$ (つまり左右対称) となるようにシフトすることができるので, 対称解である. 上述の方程式系 (5) (6) は, このようにシフトすれば対称波になるような解を含む系となっている. そこで解として, 非対称解だけを求めるためにはこのような対称解のシフト波を除外する条件を考慮する必要がある. そのための条件として, 我々は次の条件式を導入した.

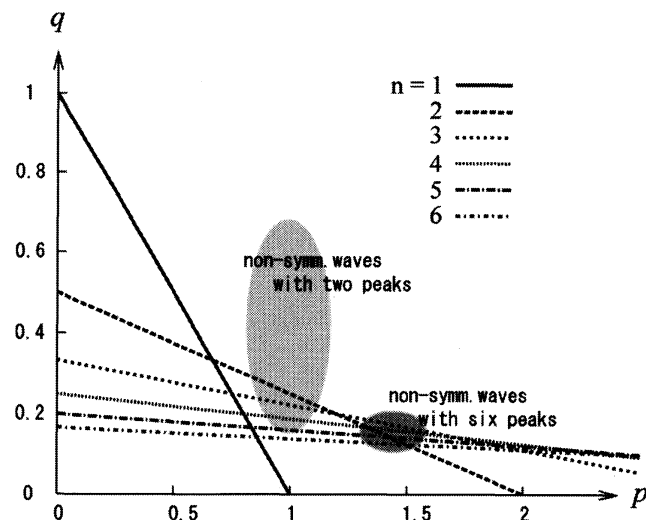
$$\theta(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^N b_n = 0 \quad (7)$$

これは波高の極大点あるいは極小点が左右の境界にくる, という条件に等しい. これにより図 1 (a) のような解を排除し, 非対称解のみを求めるように出来る. 結局, 条件式 (5) の中の 1 つを (7) 式で置き換えた方程式系を考えればよい.

5. 計算結果

Zufiria の波と同種の 6 つの山を持つ非対称解が確かに存在することを確認した. そして分岐パラメータを変えた時にその分岐構造がどのように変化するかも調べることが出来た. このような 6 つの山を持つ非対称解の分岐構造は比較的単純だが, 対称性破壊点が現れるまでの経路はやや複雑である.

またこの他に, 2 つの山を持つ新しい種類の非対称解を見つけることが出来た. こちらは非対称性が現れるまでの経路は単純だが, やや複雑な分岐構造を持つことがわかった. 図 2 は得られた非対称解の存在域を p - q 平面上に示したものである. 各直線はモード



$n(n=1 \sim 6)$ の対称解の分岐点

をプロットしたもので, 2 つの直線が交差するところは 2 重分

岐点である. 網掛け部分は, 今回の非対称解が得られた概ねの範囲を示している. 左側が 2 つの山, 右側が 6 つの山の非対称解に対応する. 以下で, これら 2 種類の非対称解の分岐構造と波形を示していく.

(I) 6 つの山を持つ非対称解

図 2 各直線は対称解の分岐点のプロット (モード 1 ~ 6 の場合). 交点は 2 重分岐点. 2 ヶ所の網掛け部分は非対称解が得られた範囲の概略図.

はじめに $p=1.41$ の場合を例に，対称性破壊点が現れるまでの経路を示す．この場合の経路は，対称解のモード6への1次分岐 \Rightarrow モード(6,2)への2次分岐 \Rightarrow モード(6,2,1)への3次分岐 \Rightarrow 対称性破壊点の出現，のようになる．

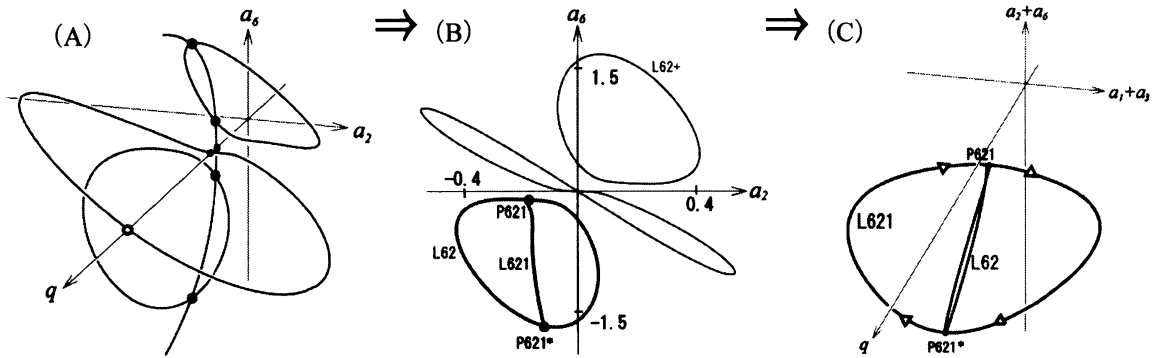


図3 $p=1.41$ の場合. モード6の1次分岐枝から対称性破壊点が現れるまでの経路を示す分岐図. マーク Δ と ∇ は対称性破壊点

図3はこの経路を分岐図で表している. (A) は2次分岐枝までを (q, a_2, a_6) -平面で描いた分岐図である. 自明解からモード2とモード6の1次分岐枝が出ている. その後モード2の枝は発散し，モード6の枝はモード4の分岐枝に合流⁴する. モード6の1次分岐枝の $a_6 > 0$ と $a_6 < 0$ の部分にモード2への2次分岐⁵が現れる. 2次分岐枝は環状になっていて，モード6の分岐枝と交差している. (B) は (A) を q 軸方向から見た分岐図式である. L62 と記した枝は $a_6 < 0$ 側の2次分岐枝を指す. そしてL62からモード1への3次分岐⁶が現れる. この3次分岐枝をL621と記すことにする. L62とL621を(C)のような別座標系で描くと，L621は環状をなし，L62上の点P621とP621*を繋ぐ形になっていることがわかる. そしてL621上， $a_1+a_3 > 0$ と $a_1+a_3 < 0$ の部分に対称性破壊点が見つかった. マーク Δ と ∇ が対称性破壊点の位置を表す. 非対称解の分岐枝はそれぞれ Δ と Δ ， ∇ と ∇ を結ぶように存在する.

図4に非対称解の分岐図と波形を示した. 一番上が分岐図で，縦軸を q ，横軸を b_2 として描いている. q 軸上の実線は対称波の分岐枝L621に対応する. L621から分岐し

⁴ 図3 (A) の q 軸上の白丸 \circ はモード4の分岐枝との合流点を表している.

⁵ 簡単のため，モード(6,2)の分岐と呼ぶことにする.

⁶ 簡単のため，モード(6,2,1)の分岐と呼ぶことにする.

た非対称波の分岐枝（破線部分）は環状になっていて、再び L621 に交わる．(a) ～ (d) は対応する位置での非対称解の波形である．波 (a) (d) は L621 に近いところにあるので、非対称性はあまりはっきりしていない．(d) の波には自己交差する部分があり物理的には意味のない波であるが、数学的には解とみなすことができる．

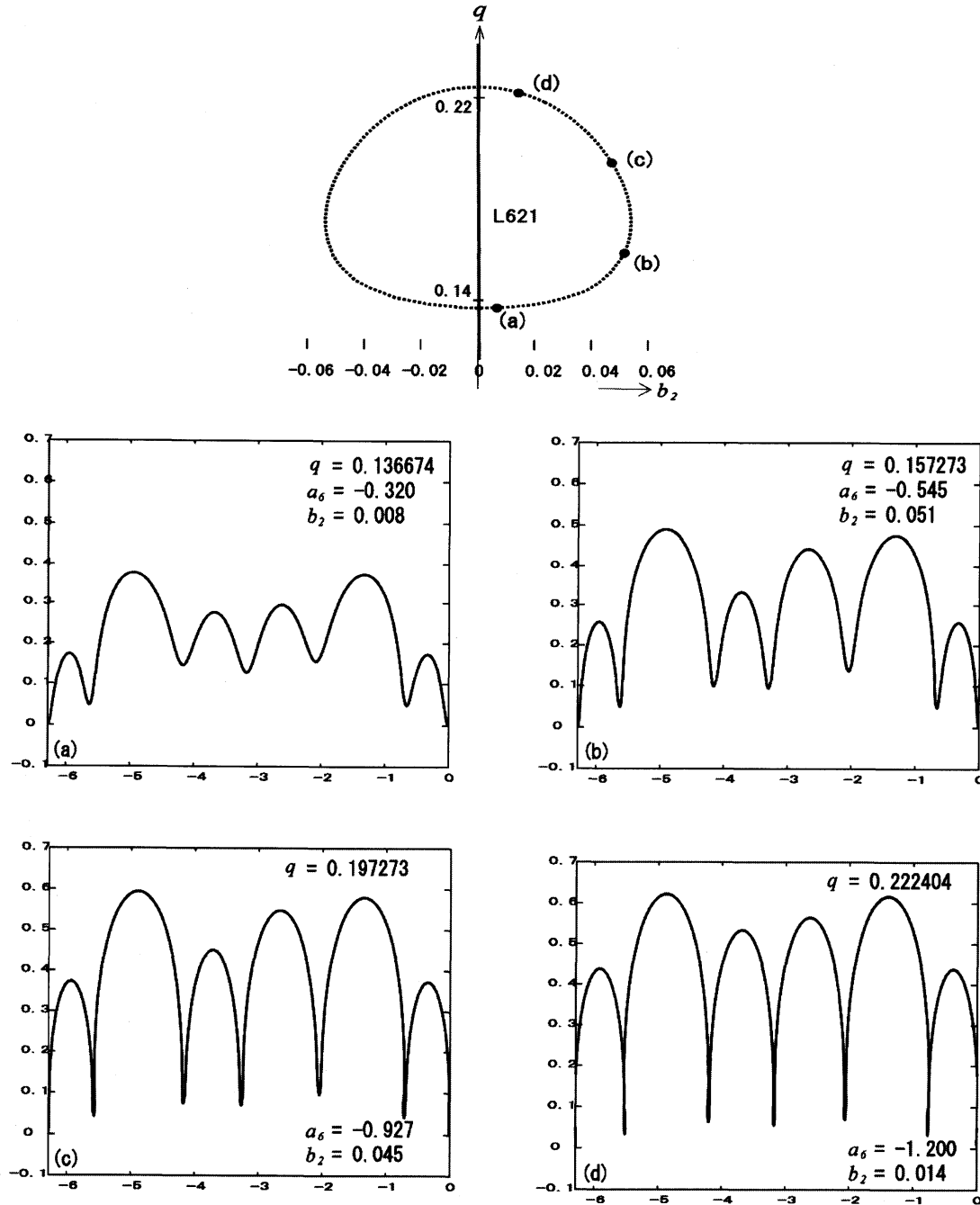


図4 $p=1.41$ の場合．非対称解の分岐枝と対応する点(a),(b),(c),(d)での波形

図5には、 $p=1.31$ と 1.303 の場合の分岐図を示した。 p が小さくなると非対称解の分岐枝のループ(破線部分)は小さくなり、 p をさらに小さくすると $1.303 > p > 1.30$ のどこかで非対称解は消滅する。

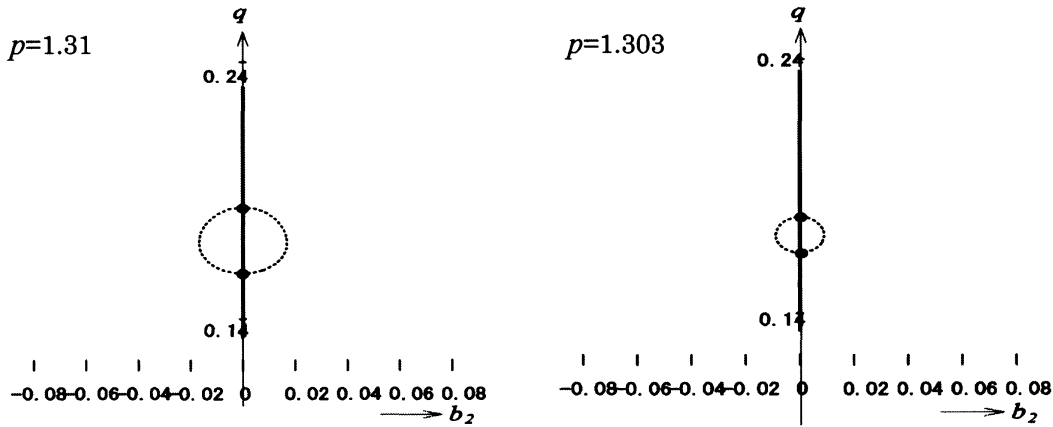


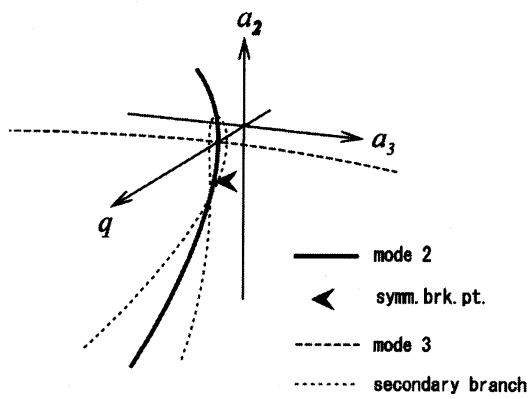
図5 p を 1.41 より小さくしたときの非対称解の分岐枝の変化

(II) 2つの山を持つ非対称解

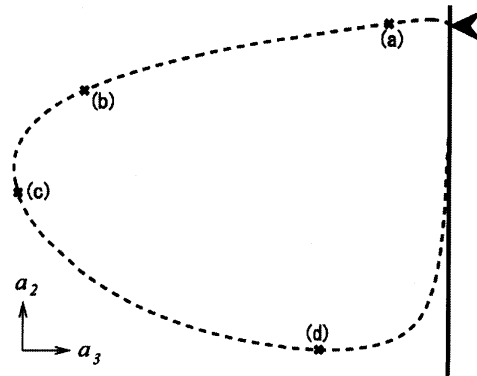
次に2つの山を持つ非対称解を示す。対称性破壊点は、対称解のモード2の1次分岐枝上に存在する場合、とモード(2,1)の2次分岐枝上に存在する場合、の二通り見つかった。いずれの場合もモード2が強く影響する解なので、波は2つの山を持つ形状をなす。

図6(A)は $p=1.200033$ のとき、モード2の対称解の1次分岐枝から非対称解の分岐が起こる様子を示す。参考までに波線でモード3の1次分岐枝とモード(3,2)の2次分岐枝を描いているが、これらは非対称解の分岐には関係しない。(A)と(B)の矢印は同じ点を示し、モード2の1次分岐枝上の対称性破壊点を指している。そこから非対称解の分岐が起こり、それを追跡していくと分岐枝は(B)の破線のように延びて、その後再びモード2の枝に漸近的に合流する。(a)～(d)は対応する位置にある非対称解の波形である。

図7(A)は $p=0.913$ のとき、モード(2,1)の2次分岐枝から非対称解の分岐が起こる様子を表している。(B)は対称性破壊点付近の拡大図である。(C)のように非対称解の分岐枝は環状で、モード(2,1)の2次分岐枝とのみ交わっている。



(A) モード2の1次分岐枝上の対称性破壊点を矢印で示している。



(B) 波線は非対称解の分岐枝。
実線はモード2の枝に対応する。

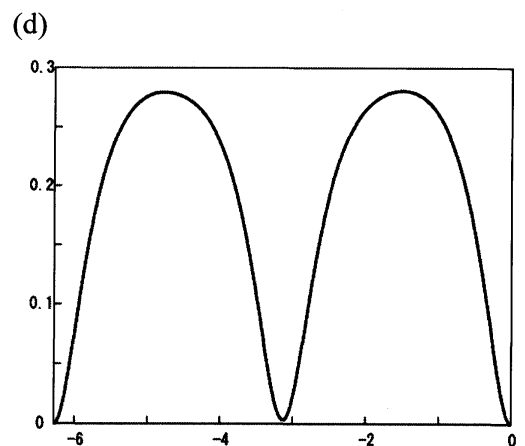
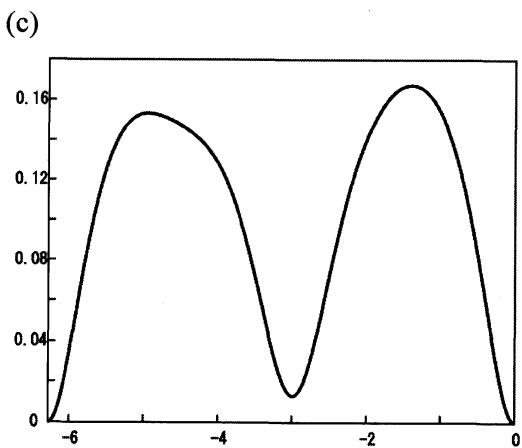
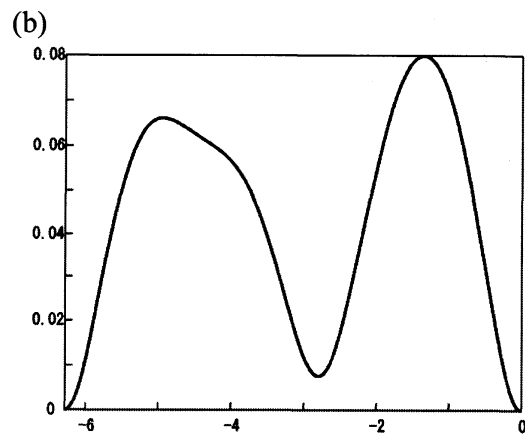
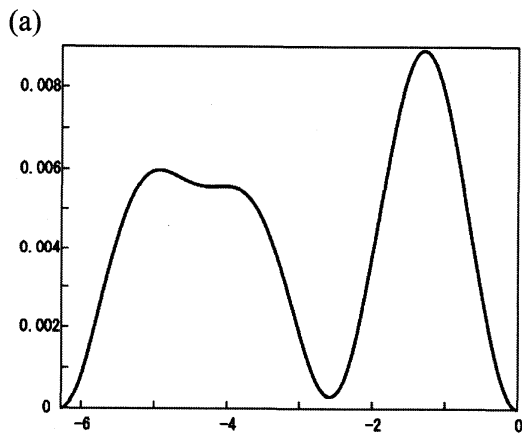
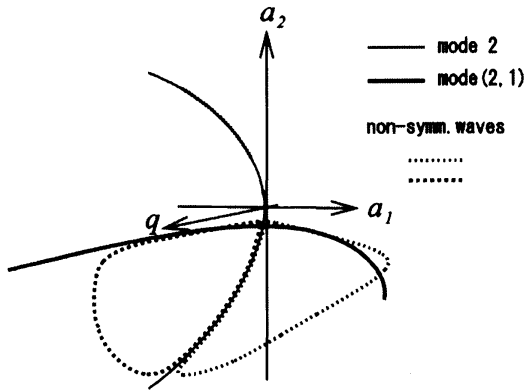
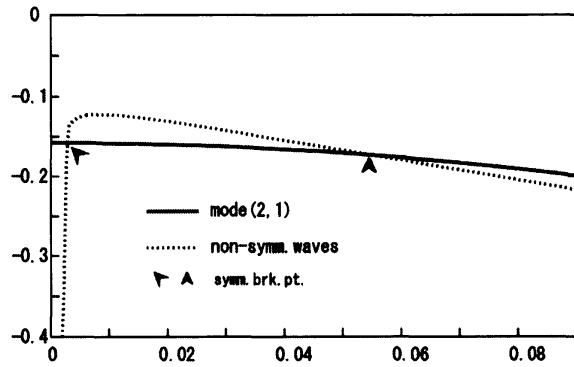


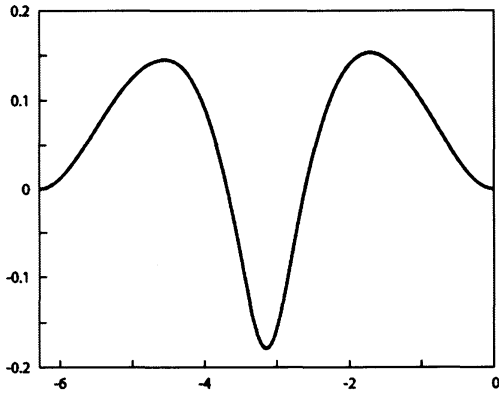
図6 $p=1.200033$ のとき、モード2の1次分岐枝から非対称解の分岐が起こる。



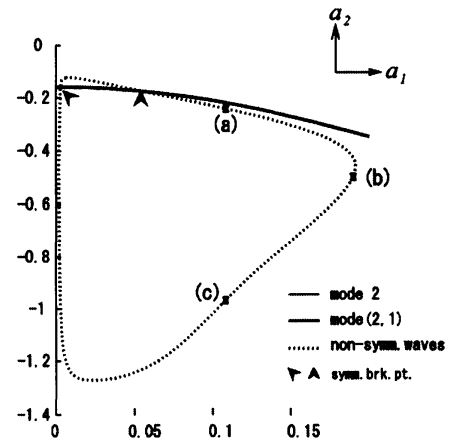
(A) モード(2,1)の2次分岐枝 (実線) と交差する非対称解の枝 (破線).



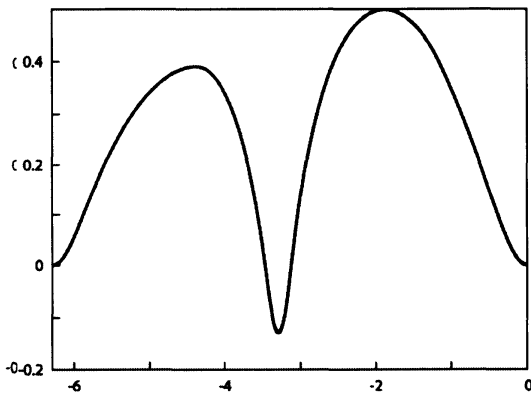
(B) 非対称解点付近の拡大図。矢印が対称性破壊点を指す。



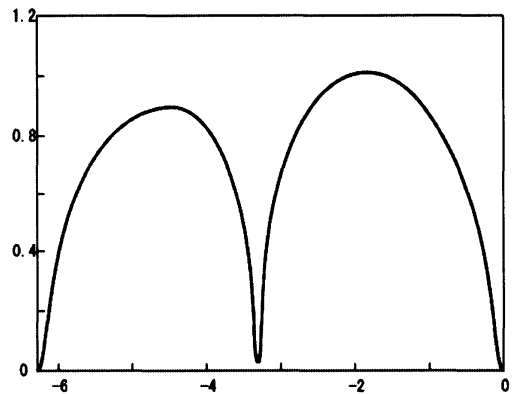
(a)



(C) 非対称解の分岐枝 (破線)



(b)



(c)

図7 $p=0.913$ のとき、モード(2,1)の2次分岐枝から非対称解の分岐が起こる。

最後に、 p を減少させたとき2つの山を持つ非対称解の分岐枝がどうなるかを示したものが図8である。(A)はモード2からの分岐、(B)はモード(2,1)からの分岐の図である。どちらの場合も p が小さくなると非対称解の分岐枝のループは小さくなり、対称波の分岐枝とは離れて孤立したループになる。 p をさらに小さくするとループはいずれ消滅する。

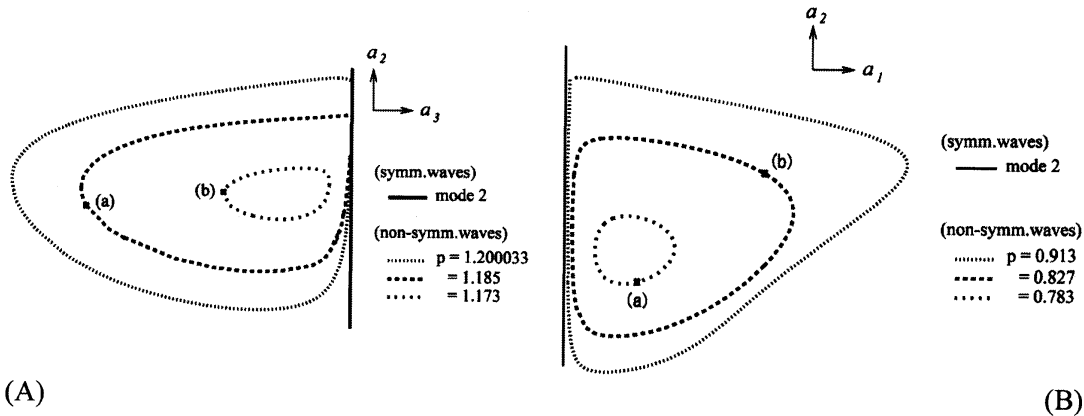


図8 p を小さくした時、非対称解の分岐枝（破線）の変化を示す図。(A)はモード2からの分岐の場合、(B)はモード(2,1)からの分岐の場合。いずれの場合も内側の破線が小さい p に対応する。さらに p を小さくするとループは消滅する。

6. まとめと考察

水の波の分岐問題に関する非対称解について、Zufiria が数値解を計算して以来20年以上も新たな研究結果が無いままであった。本研究では、Zufiria とはまったく異なる定式化・数値計算法を用いてその数値解を検証した。また新たに別種の非対称解を見つけることができた。そして、それらの分岐構造も調べることができた。

興味深い結果としては、以下のことが挙げられる。まず、研究に着手した当初、もし非対称解が Zufiria の得たもの以外に存在するとすれば、山が6個以上の波形の解であろう、と予測していた。したがって2つの山の非対称解が得られたことは、我々にとって些か意外な結果であった。また、対称解の分岐枝と離れて非対称解だけが孤立した分岐枝として存在する、ことが分かった点も興味深い結果である。我々が計算した限りでは、 p を0に近づけていくと非対称解はすべて消滅することが分かった。このことは、H. Okamoto & M. Shōji [7] で対称波の分岐解に対し予測した事実⁷に対し、

⁷ 対称波の分岐構造は p を0に近づけるにつれて、高次分岐は消滅してシンプルになっていく。結果 $p=0$ では自明解と自明解からの1次分岐解以外には解は存在しないであろう、という予測。

非対称解においてもひとつの裏付けを与えた, もの考える.

参考文献

1. G. D. Crapper, An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude, *J. Fluid Mech.*, vol. **2**, 532--540 (1957)
2. P. R. Garabedian, Surface waves of finite depth, *J. d'Anal. Math.*, vol. **14**, pp. 161--169 (1965)
3. H. B. Keller, *Lectures on Numerical Methods in Bifurcation Theory* (Tata Institute of Fundamental Research No. 79), Springer Verlag, (1987)
4. T. Levi-Civita, Détermination rigoureuse de ondes permanentes d'ampleur finie, *Math. Ann.*, vol. **93**, 264--314 (1925)
5. H. Okamoto and M. Shōji, Nonexistence of bifurcation from Crapper's pure capillary waves, *Res. Inst. Math. Sci. Kokyuroku, Kyoto Univ.*, 745, 21--38 (1991)
6. H. Okamoto and M. Shōji, *The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves*, World Scientific (2001)
7. H. Okamoto and M. Shōji, The resonance of modes in the problem of two-dimensional capillary-gravity waves, *Physica D*, vol. **95**, 336--350 (1996)
8. C. Shimizu and M. Shōji, Appearance and disappearance of non-symmetric progressive capillary-gravity waves of deep water, *JJIAM* に投稿中
9. J. A. Zufiria, Weakly nonlinear non-symmetric gravity waves on water of finite depth, *J. Fluid Mech.*, **180**, 371--385 (1987)
10. J. A. Zufiria, Non-symmetric gravity waves on water of infinite depth, *J. Fluid Mech.*, **181**, 17--39 (1987)
11. J. A. Zufiria, Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth, *J. Fluid Mech.*, **191**, 341--372 (1987)