数理解析研究所講究録
第 1800 巻 2012 年 49-61

数学史から見た Navier-Stokes 方程式の微視的記述関数の論争に見る物理的構成と数学的記述

流体数理古典理論研究所 増田 茂

E-mail: hj9s-msd@asahi-net.or.jp

Abstract

[1] One of the Poisson's themes is the reducibility of sum into integral, namely, how to calculate the microscopically descriptive function of attraction and repulsion for formulation of fluid equations. In 1819, Poisson discussed the so-called *'Poisson equations'* in *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques* [17].

Since these earlier papers of these sort of issues, he discusses ([18, 19, 20]) with Navier ([14, 15, 16]), and introduces [26], in which he developes his new ideas of these problems between the integral and sum in the additional note, (§7, "*Notes et Additions*" [26, pp.264-300]) immediately after issuing his main theories of fluid [23, 25].

This note may be one of the last descriptions on these issues. We couldn't follow Navier's comments whether Navier gave his opinion against it or not. Navier passed away after 5 years since Poisson's thesis [26] in 1836, and moreover, Poisson in 1840. We think this is the last counterargument by Poisson to Navier. We introduce these scientific disputes between Poisson and Navier, and other book reviewers. We show below our translation of the French narrations in Japanese, and of our own in English. In the all citations below of original, $fr, \varphi r, Fr, etc.$ mean the function of distance : r, viz. $f(r), \varphi(r), F(r), etc.$, sic respectively, except for rR in $\sum rR$. [2]

§1. Introduction [3] We begin with the discussion about Poisson's integral methods of partial differencial fluid equations before and after he issues the microscopically-descriptive [MD] equations of fluid dynamics [18, 21, 23, 25, 26]. In 1819, Poisson introduced the so-called *'Poisson equations'* in [17], which was the only paper relating to fluid before MD fluid equations. And in which, he proposes the transforming methods from sum into integral to solve the partial differential equations, saying :

> A défaut de méthodes générales, dont nous manquerons avait être encore long-temps, il m'a semblé que ce qu'il y avait de mieux à faire, c'état de chercher à intégrer isolément les équations aux différences partiellles les plus importantes par la nature des questions de mécanique et de physique qui y conduisent. C'est la l'objet que je me suis proposé dans ce nouveau mémoire. [17, p.123]

> 「普遍的諸方式が恐らくなおしばらく出来ないなら、取るべき最良のものがあった、即ち、それは個別に積分するのに、偏微分方程式を導出した力学や物理の性質によって最も重要なものを探す事であったように思える。これがこの新しい論文で私の言う積もりだった目的である。」[17, p.123]

He considers that it is the best to integrate separately each term of partial differential equations. By using this principle, Poisson [17] explains various methods of integral corresponding to the equations such as : (1) general kinetic equations of fluid / (2) distribute equations of the heat in the solid corps. (heat equations) / (3) equations of vibrating surface. (wave equation) / (4) second-order linear equations with two variable (Laplace equations) (5) general remarks on the linear equations with constant coefficients. (including Poisson equations). About ten years later, he changes his principle to describe the general MD equations of elastic solid and elastic fluid, owing to continuum theory.

§2. Separate integration of the elastic fluid equations before MD Poisson remarks in the section "*Remarques géenéerales sur éequations linéeaires à coëfficients constants*", about the followin two equations with $\sum$ and $\int$. [4] He expresses φ transforming the sum of paticular solutions satisfying the partial equations respectively : p, p', p'', $\cdots$ into the integral separately.

> L'equation qui déterminara p sera d'un degré égal à l'indice de la plus haute difference partielle, relative à t, qui soit contenue dans l'équation proposée; en désignant ses par p, p', p'', $\cdots$, on pourra les emplyer succivement dans la valeur de φ; on pourra aussi changer arbitrarement les quantitée A, g, h, $\cdots$, et prendre pour φ la somme des valeurs particulières qui résulteront de ces changements; ce qui donnera

[1] 01/16/2012
[2] If over one parameter, they express it as $f(r, \cdots)$.
[3] To establish a time line of these contributor, we list for easy reference the year of their birth and death: Euler(1707-1783), d'Alembert(1717-1783), Lagrange(1736-1813), Laplace(1749-1827), Fourier(1768-1830), Gauss(1777-1855), Navier(1785-1836), Poisson(1781-1840), Cauchy(1789-1857), Stokes(1819-1903).
[4] Here, we should write integral symbol as $\int\int\cdots\int\int$, however, Poisson uses a single sign $\int$.

$$\varphi = \sum Ae^{(tp+gx+hy+\cdots)} + \sum Ae^{(tp'+gx+hy+\cdots)} + \cdots \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \int e^{(tp+gx+hy+\cdots)} f(g,h,\cdots)dg\ dh\cdots + \int e^{(tp'+gx+hy+\cdots)} f'(g,h,\cdots)dg\ dh\cdots + \cdots \quad (2)$$

Les limits de ces intégrales resteron indéterminées; en sorte qu'elles ne son pas des intégrales définies. La substitution de la charactéristique $\sum$, n'a pas changé de nature, la valeur de φ : cette dérnière expression est toujours une série d'exponentiellés multipliées par des coëfficients arbitrairea, dont chaque terme satisfait isolément à l'equation aux différences partielles proposées; et les fonctions $f,\ f',\ \cdots$, étant arbitraires, et pourvant ètre discontinues, ces deux expressions (1) et (2) sont équivaléntes l'une à l'autre. [17, pp.171-2]

「記号$\sum$の置き換えは本来的に、φの値を変えていない：つまり、最後の式(2)が常に任意の係数の掛かるある指数の級数で、各項は出された偏微分方程式を個別に満たしている；関数$f, f'\cdots$が任意で、しかも不連続になり得るのに、これらの二つの式(1)と(2)は互いに等価である。」 [17, p.172]

He explains the separating integration of the following example equations of wave as the same with (2). ([17, pp.173-6])

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\Big(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\Big) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \sum Ae^{(atp+gx+hy+kz)} + \sum A'e^{(-atp+gx+hy+kz)}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2\pi}\sum Bpe^{(g(x+x')}e^{(h(y+y')}e^{(k(z+z')} \equiv f(x+x', y+y', z+z'), \\ \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\sum B'e^{(g(x+x')}e^{(h(y+y')}e^{(k(z+z')} \equiv F(x+x', y+y', z+z') \end{cases}$$

$$x' = at\cos u, \quad y' = at\sin u\sin v, \quad z' = at\sin u\cos v$$

$$\begin{aligned} \cdots \quad \Rightarrow \quad \varphi = & \iint f(x+x', y+y', z+z')\ t\ \sin u\ du\ dv + \frac{d}{dt}\iint F(x+x', y+y', z+z')\ t\ \sin u\ du\ dv \\ = & \iint f(x+at\cos u, y+at\sin u\ \sin v, z+at\sin u\cos v)\ t\ \sin u\ du\ dv \\ + & \frac{d}{dt}\iint F(x+at\cos u, y+at\sin u\ \sin v, z+at\sin u\cos v)\ t\ \sin u\ du\ dv \end{aligned}$$

In 1829, moreover, Poisson improved this superficial method of integral of wave equations in [22].

Today, we can use the method of MAC, SMAC, or etc., as the solvers of Poisson-equation for the computer, however, Poisson's integral was one of the best superficial computations we could want without the computer.

§3. MD equations of elastic solid and fluid by sum instead of integral Poisson [18, 21] uses two functions fr and $\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ to calculate three elements of force. Here, fr means $f(r)$, and r is the radius of sphere of a molecular activity.

$$r^2 = \phi^2 + \psi^2 + \theta^2, \quad (r')^2 = (\phi+\phi')^2 + (\psi+\psi')^2 + (\theta+\theta')^2, \quad r^2 = x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \zeta_1)^2,$$

Poisson says : 'at the same degree of approximation', we get the differential form :

$$r' = r + \frac{1}{r}(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta') \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r'}fr' = \frac{1}{r}fr + (\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{d.\frac{1}{r}fr}{rdr}$$

He gets the three elements of force $P,\ Q,\ R$ by $\sum$ instead of $\int$ respectively : if we put $F \equiv \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$, then

$$(1)_{P*} \quad \begin{cases} P = \sum\frac{(\phi+\phi')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \sum(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\phi\zeta}{\alpha^3 r}F, \\ Q = \sum\frac{(\psi+\psi')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \sum(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\psi\zeta}{\alpha^3 r}F, \\ R = \sum\frac{(\theta+\theta')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \sum(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\theta\zeta}{\alpha^3 r}F, \end{cases} \quad (3)$$

Poisson [25] uses two same functions with (8) : fr and $\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ to calculate three elements of force : P, Q, R by $\sum$.

§4. Capillary action with ordinary description Poisson described previously this theme in the article no.31 of text. We cite this paragraphs itemizing and comparing two items as follows : Poisson doesn't use at all of sum except for $\sum R$, $\frac{1}{h}\sum rR$ [26, pp.30-31] and $\sum R'$ [26, p.68], in which he explains the mathematical exceptions, as well as in *The Note*, however, in the parent part to *The Note* [26], he isn't necessary for using of sum instead of integral, and uses the ordinary deduction from the hydrostatic equations.

§5. Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle Poisson [18, 21, 23, 25] expresses two elastic constants of molecular forces defined in the sphare of an arbitary molecular activity of M with sum as follows :

$$\frac{2\pi}{3}\sum\frac{r^3}{\alpha^5}fr \equiv K, \quad \frac{2\pi}{15}\sum\frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr} \equiv k. \tag{4}$$

These endless disputes started with Navier's reply [14] to Poisson's critical descriptions [18, 21] about Navier's calculus by integral, which we can summarize as *'Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle'* in (*Fig.*1). J.M.C.D., a book reviwer, [5] speaks for Poisson, summarising the issues of our problem :

Poisson が Navier の理論を拒否するには二つの理由がある。総和法 (sum) は積分による十分な近似式でも置き換える事に同意出来ないこと、　こうした納得の行く数式変換を想定しても物体の自然状態の中で、任意の二つの分子間活動がゼロになるという仮説を受け入れられないこと、である。(J27)[6]

J.M.C.D. points out the theory of continuum from the viewpoint of scientific history :

- ある物体が堅いものであれ固体であれ、それを構成する部分の分離に抗する力はゼロか我々が論じているその状態では存在しない。我々がこの分離を実行する事を求める時にしか、また、分子間距離を少しでも変更しようとする事しか生じ始めない。即ち、もし、この力を積分で表すならば、物体が自然状態の中で値がゼロとなって、分子間距離で何らかの変位が生じた後でもなお、言わば、物体がその部分が分離していても何らの抵抗にも抗しない事が生じるようになる。これはちょっとへんな事になる。(J4-2)
- Navier が 1821 年に分子の活動に論及し連続体として物体を見なす事を報告していたのと同じ方程式を Poisson もつかんでいた事は後程説明しよう。　この分子のアクションを考察する手法は Laplace が元々毛細管現象の理論を導出するのに使っていたものだ。Navier はその後で弾性体の理論にこの手法を導入するのに好都合な考え方を得たのだ。　しかし、全ての学者は連続体の分子を想定していた。そして、Poisson が計算において物体の実際上の構造と一致した最初だ。(J5-1)
- 付言すれば、連続体の仮説は現実的には全く不正確であるが、科学の中では大きな足跡を果たし、Laplace の理論は学者達からその果たした役割から賞賛の目で迎えられた。　分子活動についてのこの考察は、大量の特殊問題において、就中、弾性体理論において果たさねばならなかった全ての特別の仮説を取り除くのに計り知れない利点があった。(J5-2)

Another book reviewer, Cournot [4] introduces Navier [12]'s physical theory and mathematical principle as the 'consumption'[7] in his conclusion : 「(Navier の) この応用は間違いなく、分析するだけの彼の相当な素質を示しているが、ある物理的理論の価値や、ある原理の真理に関しては沢山の蓄積された近似の後で分かるのではないか? 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、(これまでの) 経験主義から流体の振舞いと (時間と頭の) 浪費についての科学にしてくれたのか? 我々はある似たような問題を解決するために過大評価してはならない。せめて興味のある応用分野の全ての方々にこの論文の一読をお薦めするしかない。」

Ces applications montrent sans doute un grand talent pour manier l'analyse; mais peut-on prononcer avec certitude sur la valeur d'une théorie physique et la vérité d'un principe après tant d'approximations accumlées ? En un mot, la nouvelle théorie de M.Navier rendra-t-elle moins empirique la science de la conduite et de la dépense des fluides? Nous ne présumerons pas assez de nous pour résoudre une semblable question, et nous ne pouvons que recommander la lecture de mémoire à tous ceux que ce genre d'applications intéresse.　A.C.　[4, pp.13-14]

---

[5] We haven't identified this person in *BSM*(**11**) until now. The authors use usually the anonym in *BSM*. As the same example, Cournot [4] issues the book review on Navier [12] over the signature of A.C. in the same *BSM*(**10**).

[6] We put the paragraph number of each disputers. This "J27" is the 27-th paragraph by J.M.C.D.[9]. By the same way, we mean A:Arago [1], N:Navier [16], Note: Poisson[26]. In bellow, we call this note *The Note*.

[7] We mean the 'consumption' of time or all sort of resouces including intellectual activities, etc.

Fig.1. Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle

Poisson (including by J.M.C.D.)		Navier
この力を積分で表すならば係数 a^2 がゼロになる。cf. (7) この力を積分で表せない事は証明している。	$\Longleftrightarrow$	物体の自然状態で常に相殺されている。即ち、力 : P が 通常ゼロであるか、または、力はゼロでないが、それらの 差し引きではゼロである。(N9)
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
アクションを分離した分子についてのある級数 の総和で表す $\sum$ は定積分で表すことは出来ない。 それは全ての分子のアクションを表す距離の関数の性質を 保持するものであり、ゼロでは矛盾する。		これらの力 (attraction と repulsion) の合力を積分で 表す事が出来る。
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
Poisson は反対に２つの分子が積み重ねて自然状態の中でも 何らかのアクションを呈すると想定する。 そして、この状態を可能とするために、 彼は条件 : $\sum r^3 f(r) = 0$ を導いた。 しかし、この条件は積分記号を使わないので $\sum r^5 d[\frac{1}{r} f(r)] = 0$ とはならずに済み、 各項は Poisson の式からは消滅しない。(J26) 条件 : $\int r^3 f(r) dr = 0$ と、方程式の各項から必然的に 出て来る消滅の必要性を結論づけている。(J27)		Poisson が分子のアクションの成分を表す総和 (sum) が 積分で取り替えられないという事を言い張ることの根拠は 「もし、部分積分によると、$f(r)$ は両極値でゼロである 事に注意すれば、$k = -K$ となる」事だ。 まず、「もし $r^4 f(r)$ が両極値でゼロとすれば」とある点。 次に $r^4 f(r) = 0$ に対応する極値としてゼロになる事を 受け入れなければならない義務はない点である。 関数 $f(r)$ として採用出来る無数の形式が存在する事、 このため、この状況が成立しなくなる事である。(N23)
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
Navier も私と同じ方程式を出した。これを積分でやったのが Navier の係数 ε だ。Navier は否定しているが、 私の係数 a^2 と Navier の ε は同じだ。(cf. Table 1, no.1,4)	$\Longleftrightarrow$	私の係数 ε と Poisson の係数 a^2 とは同じものではない。
....	...... $\Downarrow$	....
• こうなれば、Navier にどうしたら自然界で物質の全ての 個所で積み重ねたアクション無しで、物体の構成を 理解させる事が出来るか考えるしかないのだ。(A3)		• 私の式はその特別な場合 (Navier の式で弾性が色々な 方向で同じ時) 当て嵌る。(Cauchy[3])
• 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、経験主義から流体の 振舞いと浪費についての科学にしたのか? (Cournot[4])		• 同じ方程式は非圧縮流体の場合で Navier が得ているが 私のものは Poisson がやったものに近い。(Stokes[27])

We start with citing Poisson's explanation of result using sum instead of integral from (4) as follows :

• § 14. Cette équation donne lieu de faire une remarque importante ; c'est que les sommes $\sum$ du no.6, que représentent *les lettres K et k, ne peuvent être changées en des intégrales,* quoique la variable r croisse dans chacune d'elles par de très-petites différences égales à α ; car si cette transformation était possible, k serait zéro en même temps que K ; d'où il résulterait qu'après le changement de forme du corps, les forces P, Q, R, seraient nulles comme auparavant, et que des forces données qui agiraient sur le corps ne pourraient se faire équilibre, ce qui est inadmissible. Pour faire voir que k s'évanouirait au même temps que K, observons qu'on aurait

$$K = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} frdr, \quad k = \frac{2\pi}{15} \int_0^\infty \frac{r^5}{\alpha^6} d.\frac{1}{r} fr, \tag{5}$$

en multipliant sous les signes $\sum$ par $\frac{dr}{\alpha}$, et remplaçant ces signes par ceux de l'intégration. Or, si l'on intègre par partie, et si l'on fait attention que fr est nulle aux deux limites, il en résultera

$$k = -\frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} frdr = -K \tag{6}$$

ce qui montre que la quantité K étant nulle, on aurait aussi $k = 0$. [18, pp.398-399, §14]

• § 16. Je substitute, en outre, dans les équations $(3)_{P^e}$ à la place de P, Q, etc., leurs valeurs, et je suppose le corps homogène; en observant que $K = 0$, il vient

$$(6)_{P^e} \quad \begin{cases} X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0, \\ Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdy} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\right) = 0, \\ Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydz} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\right) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

a^2 étant un coefficient, égal à $\frac{3k}{\rho}$. Ces équations ont la même forme que celles qui ont été données par M.Navier[8], et qu'il a obtenues en partant de l'hypothèse que les molécules du corps, après son changement de forme, s'attirent proportionnellement aux accroissements de leurs distances mutuelles; et en admettant, de plus, que les résultantes de ces forces peuvent s'exprimer *par des intégrales, ce qui rendrait nul le coefficient* a^2, ainsi qu'on l'a vu plus haut. Les équations relatives à la surface, formées de la même manière, se trouvent aussi dans le Mémoire de M.Navier. [18, pp.403-4, §16]

Our issue is about (5) of the elastic body, which paper is previous to the fluid. (cf. In Table 1, the entry no. 1,3 and 4 discuss elastic body.) Poisson says his consistency between physics and mathematics on the expression (5) and (7) :

こうして、それらの attraction と熱による分子の相互のアクションしか作用されない自然状態と見られる物体の状態の中で、分子を分離している区間ではこの方程式が物体の全ての個所で成り立っている事等が存在せねばならない。もし、熱の新たな量をそこに取り入れれば、同じ距離を保って repulsive force が attractive force で出来る量を変えずに増大する。分子の区間がこの方程式が存在し続けるように増大する必要がある。 そして、関数 $f(r)$ がそこでは同じでない事から、それからの熱の膨張、物質的な違いの中で差異が生じる。この式は重要な事を喚起する原因となる。それは No.6 での総和 Σ は K と k がそれで表わされているが、これを積分へ変更出来ない事だ。ここに、変数 r は α と同様に極めて微小な差異で表す個々のそれの中で増大する。しかるにもしこの変換が可能ならば、k は K と同時にゼロとなる。ここから物体の変形による力の要素 P, Q, R は変形しても以前と同じゼロとなり、物体に作用する加えられた力は平衡状態とは成り得ないという結果が生じる。これは受け入れられない事だ。

According to J.M.C.D., Poisson's physical conception are as follows :

•Poisson は反対に２つの分子が積み重ねて自然状態の中で何らかのアクションを呈すると想定する。そして、この状態を可能とするために、彼は条件： Σ r3 f(r) = 0 を導いた。しかし、この条件は積分記号を使わないので $\sum r^5 d[\frac{1}{r}f(r)] = 0$ とはならずに済み、各項は Poisson の式からは消滅しない。(J26)

• 条件 ： $\int r^3 f(r) dr = 0$ と、方程式の各項から必然的に出て来る消滅の必要性を結論づけている。(J27)

Navier explains null of molecular activity in his last paper [16] as follows :

• 弾性固体は極めて微小な距離に置かれた分子の集合体として認識されている。これらの分子は積み重ねて、２つの相反するアクション、即ち attraction からなる固有力と熱の原理で齎される repulsion に影響を及ぼす。ある分子 M と近くにある任意の分子 M' の間には、この２つの力 (attraction と repulsion) の差である P が存在し、物体の自然状態ではトータルなアクションである P は分子 M が平衡状態であるからゼロ即ち相互に相殺される。 物体の形状が変更されればアクション P は異なる差の値Πとなり、全ての力：Π と物体に働く力の間で平衡状態となり、それによって形状の変位が生じる。(N7-1)

• どれも２つの部分 π と π' に分かれる Π があると常に理解してよい。 最初の π はもし、単独で存在すると想定すれば、全ての力：π の中で平衡状態となり、 同様の方法から、物体の自然状態では全ての力：P の中で平衡状態になる。 力：π はこうして相互に相殺されるので、平衡状態は残った π' と物体に作用する力との間で存在することが必要となろう。(N7-2)

• こう仮定すれば、ここで原理として、もう一つの力 π' が任意の MM' にある２つの物質の分子の間で物体の形状の変化によって生成されるという事を得る。 そしてこれがこの１つだけを物体に作用する力と平衡状態にするものであり、それぞれに（微小と想定する）形状の変化が２つの分子間の距離 MM' を変えた量に比例している。(N7-3)

• この力 Π' は距離 MM' が増大すれば attraction になり、減小すれば repulsion になる。それに、分子の力を非常に接近した分子間にしか存在しないもの、そして急減少する値を持ち、両者がますます遠ざかる分子に対して未知の法則に従うものと看做す。(N7-4)

Arago が強調し、コメントしている語句を見てみよう。物体の自然状態ではトータルなアクション P はゼロか相互に相殺される。この語句は排他的ではない。トータルなアクション P は物体の各点で消滅するか、あるいは差し引きの結果がゼロ。この言い回しでは明らかに読者に次の二者択一を任せられている。即ち、全ての力：P がゼロ。あるいは 力はゼロでないがそれらの差し引きではゼロ。私はこの問題を曖昧のままにしていた。計算の設定には全く依存しないこの点について説明するのは必要でなかったからである。(N9)

• この点について説明することは決して不必要ではないと思う。事実、アクション：P が混同される事を避けた事に注意願いたい。アクション：P は

• 物体の自然界で存在し、

[8]By Poisson's footnote : Tome VII de ces Mémoires, which is Navier[11].

- 個々の分子に対して物体の変位状態の中で成立する新たなアクションΠの部分である π と平衡状態になる。
- 個々の分子に対してこの状態で同様に平衡状態となろうとする。(N10-1)

このように区別をすることによって読者は力：P を随意に、有限の値やゼロに想定する事ができる。(読者には）力：π を想定する自由があるので、力：π は私の説明によって、個々の分子が相殺するのに都合の良い値を持った、力：P とは別のものであり、私が提唱する原理は常に存続する。(N10-2)

私の Arago への手紙（ACP,1829 年 1 月号 103 頁）で

- 数学的問題をまだ設定しないのに、物質の構成に関して抱いている考えを説明する事、
- Poisson のそれとの違いを明確にする事、
- 私は２者択一をして、物体の自然状態では任意の２つの分子間の attraction と repulsion が相互に消滅する事、即ち、これらの分子間で存在するアクション（これを P とする）がゼロである事

を受け入れたと述べた。Arago は「２つの同じ分子が違った方法で積み重ねて作用していて、物体が外力からのアクションを受ける受けないに拘らず、この作用を受けるという事からこういう結果になった」と判断している。以上が実際に私の考えている所だ。(N11)

Arago は「物理学者は恐らく（Navier の）この仮説に難を呈するだろう。それがため大きな困難がもたらされ、どうしたら私が物質の全ての点が、積み重ねてアクションがない自然界の中で、物体の構成を理解出来るか示すしかない」と付け加えている。　私はこの話には私の意見に対抗できるどんな根拠も見つけられない。もし何方かがこの問題に関してもっと説明して欲しいと望むならば私はこう言うであろう：「自然界で２つの分子 M, M' の attraction は距離の MM' がどうであれ熱の存在による repulsion によって正確に相殺されることが認識できる」と。(N12)

At last, Navier may mend and correct his ideas of null which is attacked from all the physical disputer.

§6. "*Notes and Additions*" to [26]

¶6.1 Purposes of his new theory Poisson criticises both Laplace and Gauss on the paper of capillary action.

- On a vu que je m'ecarte aussi de la *Méchanique céleste*, en ce qui concerne l'explication des phénomènes qui ont lieu quand le liquide atteint l'extrémité supérieure du tube. La démonstration que Laplace avait donnée de l'invariabilité de l'angles compris entre les normales à la surface du liquide et à celle du tube, menées par chaque point situé à une distance insensible de leur commune intersection, n'a pas paru satisfaisante ;
- et M. Gauss en a donné une autre très élégante, et qui ne laisse rien à désirer, lorsqu'on fait abstraction de la variation de densité du liquide prés de sa surface et prés de celle du tube.

Poisson tells his selling point :

> En eyant égard à cette variation, dont la loi est inconnu, j'ai démonstré la même proposition, dans le chapitre III,[9] d'une maniére qui, je crois, ne peut laisser aucun doute.

Poisson insists his new theory :

- La considération de cet angle i est également indispensable, lorsqu'on veut déterminer le poids nécessaire pour détacher un disque solide de la surface d'un liquide, l'une des questions *les plus intéressantes des cette théorie*, que l'on n'avait pas, ce me semble, considérée sous son véritable point de vue.
- En effet, le disque et le liquide étant soulevés graduellement par un poids qui croit par pétites parties, ce poides et la hanteur correspondantes du liquides sont, à chaque instant, des fonctions de l'angle i qui représente l'inclination de la normale à la surface de l'arète du disque sur un plan horizontal ;
- c'est lorsque ces fonctions atteiguent leur *maximum* par rapport à i, que le disque se détache du liquide ;
- et il en résulte la condition d'aprés laquelle on détermine la grandeur du poids propre à opérer la séparation du disque et du liquide.

[9] Équation relative au contour de la surface capillaire. [26, pp.77-97]

¶6.2 Essential constitution of corps, and paticularly of fluid ; nature of the molecular forces
Poisson explains two sorts of mutual action consisted of atrraction and molecular force, and moreover the latter includes attraction and repulsion :

> Toutes les parties de la matière sont soumises à deux sortes d'actions mutuelles.
>
> - L'une de ces forces est attractive, indépendante de la nature des corps ou de leurs molécules, proportionnelle au produit des masses, et en raison inverse du carré des distances ; elle s'etend indéfiniment dans l'espace, et produit la pesanteur universelle et tous les phénoménes qui sont du ressort de la mécanique céleste.
> - L'autre est en partie attractive et en partie répulsive ; elle dépend de la nature des molécules et des leur quantité de calorique. On attribue la partie attractive à la matiére pondérable, et la partie répulsive au calorique ; et, en effet, celle-ci change d'intensité, quoique le poids des molécules n'ait pas changé.
> - L'excés de l'une sur l'autre est ce qu'on appele proprement la *force moléculaire.*
> - Elle tend à rapprocher ou à écarte les molécules, selon que l'action de la matiére pondérable est plus grande ou moindre que l'action calorifique.
> - Son intensité décroit très rapidement quand la distance des molécules augmente, et devient tout-à-fait insensible, des que cette distance a acquis une grandeur sensible.

Poisson explains attraction and repulsion :

> Ainsi, tous les mouvenens que nous obserbons, nous devons les attribuer à des forces d'attraction ou de répulsion, pour lequelles l'action est égale à la réaction, et qui varient avec les distances, suivant une des deux lois précédentes. Les vibrations des corps élastiques et la communication du mouvement, soit par le choc, soit par la pression, résultent de la force qui n'est sensible qu'à des distances insensibles, c'est-à-dir de la moléculaire.
>
> - Soient m et m' les masses de deux molécules voisines, c et c' leurs quantités de calorique, M et M' leurs centres de gravité, et r la distance MM';
> - et considérons l'action mutuelle de ces deux molécules.
> - Supposons d'abord leurs dimmensions très petites par rapport à l'intervalle qui les sépare.
> - L'action dont il s'agit se réduira alors à une force unique, dirigée suivant la droit MM', et dont l'intensité sera une fonction de r, que nous représenterons par R ;
> - en même temps, leur répulsion mutuelle sera proportionelle au produit de c et c', et leur attraction au produit de m et m'.
> - En considérant la *force R comme positive ou comme négative*, selon qu'elle tendra à augmenter ou à diminer la distance r, sa valeur sera l'excès de la répulsion sur l'attraction ;
> - et si l'on suppose que l'attraction réciproque de la matière pondérable et du calorique, qui retient celui-ci dans chaque molécule, s'étend au-dehors, il faudra retrancher de cet excès l'attraction du calorique attaché à m' sur la matière de m, et celle de la matiére de m' sur le calorique attaché à m, lesquelles forces seront proportionelles, la première au produit mc'.
> - De cette matière, la valeur complète de R sera
>
> $$R = cc'\gamma - mm'\alpha - mc'\beta - m'c\beta' \tag{8}$$
>
> les coefficiens γ, α, β, β', étant des quantités *positives.*
>
> - Le premier sera indépéndent de la nature de m et de celle de m', le seconde dépendra de l'une et de l'autre, le triosiéme ne dépendra que de la nature de m, et le quatriéme de celle de m'.

Poisson reduces the last three terms of (8) to one term :

> - En réunissante ces trois derniers termes en un seul, on pourra écrire la valeur de R sous la forme :
>
> $$R = Fr - fr$$
>
> - Chacune des deux fonctions Fr et fr n'aura que des *positives* ;
> - et si l'on fait abstraction de l'attraction en raison inverse du carré des distances, qui n'aucune influence sensible sur les phénomènes dépendans de la force moleculaire proprement dite, ces valeurs décroitront très rapidement et sans alternative, à mesure que la variable r augmentera, et elles deviendront insensibles pour toute valeur sensible de r.

- Pour une certaine valeur de cette distance, on pourra avoir $Fr = fr$ et $R = 0$;
- le signe de R sera différent en-deçà et audelà, soit que la répulsion Fr l'emporte d'abord sur l'attraction fr, soit que le contraire ait lieu à l'égard de ces deux forces.

[26, pp.269-271]

¶6.3 Reducibility from sum into integral on a function made with attraction and/or repulsion We discuss whether the sum is reducible into integral or not. Poisson points out this problem. We use the expressions : $\varphi 0 \equiv \varphi(0)$, $\varphi\varepsilon \equiv \varphi(\varepsilon)$, $\varphi 2\varepsilon \equiv \varphi(2\varepsilon)$, $\cdots$ below according to the then generally descriptive style. Poisson expresses the sum of the function φx as follows :

> Soit φx une fonction donnée de la variable x. Faisons croitre x par des différences constantes dont la grateur sera représentée par ε; supposons que p les valeurs de x s'etendent depuis $x = \varepsilon$ jusqu'a $x = \infty$; et par p la somme des valeurs correspondantes de φx.

$$p = \sum_{x=i\varepsilon,\ i\in\mathbb{N}}^{\infty} \varphi x = \varphi\varepsilon + \varphi 2\varepsilon + \varphi 3\varepsilon + \varphi 4\varepsilon + \cdots .$$

Here, using the integral of the function φx, Poisson says,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi 0$$

will become an approximate value of sum of the function φx, which is expressed in (11).

$$\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]\varphi x dx$$

We think here is the point of Poisson's *Note*, then we cite from his original :

> L'intégrale $\int_0^\infty \varphi x dx$, divisée par ε et diminuée de $\frac{1}{2}\varphi 0$, sera une valeur approachée de la somme p; et l'on a vu, dans mon Mémoire sur *Calcul numérique des Intégrales défines*[10], que la différence de ces deux quantités peut s'exprimer par une autre intégrale définie, de sorte que l'on aura exactement (9). [26, p.278]

> ε で割った積分値 $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ から $\frac{1}{2}\varphi(0)$ を引いた値は総和 p の近似値となる。これについては私の論文" *Calcul*$\cdots$ "(footnote 10) に書いたが、これらの二つの値の差が別の定積分で表される、そのため正確に (9) 式となる。 [26, p.278]

We show the <u>difference</u> of integral from sum as following :

$$p = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi 0 + \frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]\varphi x dx. \tag{9}$$

Here, $\frac{2}{\varepsilon}$ is necessary for adjustment of the series (11). We use a known result :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$a \equiv \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{1}{12}, \quad a' \equiv \frac{1}{8\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4} = \frac{1}{720}, \quad a'' \equiv \frac{1}{32\pi^6}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^6} = \frac{1}{30240}, \quad \cdots . \quad i \in \mathbb{N}$$

Here, we consider the following description :

$$p = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi - a\varepsilon\varphi' + a'\varepsilon^3\varphi''' - a''\varepsilon^5\varphi''''' + \cdots . \tag{10}$$

where by applying integration by parts to the second integral in (9), we get the series of terms having both even power of ε and odd differential of φx. This means that according to Poisson :

> Par le procédé de l'intégration par partie, on réduira la second intégrale contenue cette formule, en une série ordonnée suivant les puissances paires de ε, dont les coefficiens renfermeront les différentielles impaires de φx, relatives aux deux values extrémes de x.

[10] Tome VI des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1827, pp.571-604.

Namely, if mod $(i,2)=1$, $(i\in\mathbb{N})$, for $\cos\frac{1}{2}i\pi=0$, then the second integral in (9) is developed as follows :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty\Big[\sum_{i=1}^\infty\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]\varphi x dx &= \frac{2}{\varepsilon}\Big[\frac{\varepsilon}{2i\pi x}\sum\sin\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi x\Big]_0^\infty-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty\frac{\varepsilon}{2i\pi x}\sum\sin\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi' x dx\\
&= \frac{2}{\varepsilon}\Big[\big(\frac{\varepsilon}{2i\pi x}\big)^2\sum\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi' x\Big]_0^\infty-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty\big(\frac{\varepsilon}{2i\pi x}\big)^2\sum\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi'' x dx\\
&= \cdots\\
&= \frac{2}{\varepsilon}\Big(-\frac{\varepsilon^2\varphi'}{(2\pi)^2}\sum\frac{1}{i^2}+\frac{\varepsilon^4\varphi''}{(2\pi)^4}\sum\frac{1}{i^4}-\frac{\varepsilon^6\varphi'''''}{(2\pi)^6}\sum\frac{1}{i^6}+\cdots\Big)\\
&= -a\varepsilon\varphi'+a'\varepsilon^3\varphi'''-a''\varepsilon^5\varphi'''''+\cdots.
\end{aligned}\tag{11}$$

where a, a', a'' are the same coefficients as (10). In the two limit value $x=\infty$ and $x=0$, it reserves only the term at lower limit $x=0$ of the third terms in (10). Because

- this function φx and all the differential coefficients evaporate at $x=\infty$
- φ, φ', φ'', $\cdots$ are the values of φx, $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, $\cdots$ which correspond to that at $x=0$.

In this paper, Poisson asserted that in a singular case using integral, all the terms in (10) evaporate except for top two terms, then we must use sum (9) as follows :

> De plus, à quelque terme que l'on arrête la série (10), le reste qu'il y faudra ajouter pour avoir la valeur exacte de p, sera exprimé par une intégrale définie, dont la valeur changera généralement d'un terme à l'autre, et dont on pourra assigner des limites qui feront connaître si la série est convergente. Dans le Mémoire cité, j'ai examiné en détail le cas singulier où le rest est constant, et où les termes de la série (10) s'evanouissent tous, excepté les deux premiers; ce qui oblige de recourir à l'équation (9) pour calculer la valeuer de p.

Poisson asserted also that :

> - En général, si l'on prend pour φx une fonction du genre de celles qui varient très rapidment et sont insensibles dés que la variable a aquis une grandeur sensible, les quantités : φx, $x\frac{d\varphi x}{dx}$, $x^2\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, $x^3\frac{d^3\varphi x}{dx^3}$, $\cdots$ seront toutes du même ordre de grandeur;
> - pour que la série des produits : φ, $\varepsilon\varphi'$, $\varepsilon^2\varphi''$, $\varepsilon^3\varphi'''$, $\cdots$, et, à plus forte raison, la série (10), soient très rapidment décroissantes, il suffira donc que ε soit très petite, eu égard à l'etendue des valeurs sensibles de φx;
> - et, dans cette hypothèese, la seconde integrale que contient la formule (9) sera toujours une quantité extrêmement petite,
>   - soit qu'elle se développe en série suivant les puissances de ε,
>   - soit que ce développement n'ait pas lieu, à cause que toutes les quantitée φ', φ'', φ''', $\cdots$, sont égales à zero.

¶6.4 Reducible examples of sum transformable into integral We suppose $c, c', \alpha, \alpha', \cdots$ are *positive* constants.

- $\varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} \quad \Rightarrow$

by putting $\varepsilon\equiv\beta\alpha$, then (10) becomes

$$p=c\Big(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2}+a\beta-a'\beta^3+a''\beta^5-\cdots.\Big)\tag{12}$$

and supposing that β were an infinitesimal fraction, then

$$p=\frac{c}{\beta}=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty\varphi x dx\tag{13}$$

$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty\varphi x dx$ is the first term of (12), then sum equals to integral.

- $\varphi x = ce^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad\Rightarrow (\varphi x)'=c\Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\quad\Rightarrow\varphi'=0,$

$$(\varphi x)''=c\Big[-\frac{2}{\alpha^2}+\Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^2\Big]e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\quad\Rightarrow\varphi''=-c\Big(\frac{2}{\alpha^2}\Big),$$

$$(\varphi x)''' = c\Big[\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)\Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big) + \Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^3\Big]e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \Rightarrow \varphi''' = 0,$$

$$(\varphi x)^{(4)} = c\Big[\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)^2 + 3\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)\Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^2 + \Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^4\Big]e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \Rightarrow \varphi^{(4)} = c\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)^2$$

Then, in general :

$$\begin{cases} \bmod (n,2) = 0, \ (n \in \mathbb{N}) & \varphi^{(n)} = c\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)^{(n-2)} \\ \bmod (n,2) = 1, \ (n \in \mathbb{N}) & \varphi^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Thus, all the derivatives of odd times become $(\varphi x)' = (\varphi x)''' = (\varphi x)^{(5)} = 0$, we can't get the developing series of sum by second integral in (9), into the series of the power of ε, however, (Poisson descrived simply) if we put

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}dx \equiv \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\pi}e^{-\left(\frac{2i\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^2}$$

Correctly, according to (9),

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]dx \equiv \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\pi}e^{-\left(\frac{2i\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^2}$$

then, by putting $\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \equiv \gamma$, (9) becomes as following :

$$\begin{aligned} p = {} & c\Big(\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\big(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}\big)e^{-\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\big(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}\big)e^{-4(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\big(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}\big)e^{-9(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})^3} - \cdots\Big) \\ = {} & \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\Big(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\pi} + \gamma e^{-\gamma} - \gamma^{-4\gamma^2} + \gamma e^{-9\gamma^3} - \cdots\Big) \end{aligned} \tag{14}$$

As γ is a big number in the hypothesis of ε very small in comparison with α, this series will converge extremely, all after the third terms are completely insensible. By the comparison of the first term with the second : $\frac{c}{2}(\frac{\sqrt{\pi}\alpha}{\varepsilon} - 1) >> 0$, we can neglect the second term, then

$$p = \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\frac{2\pi\alpha}{2\varepsilon} = \frac{c\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx$$

$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx$ is the <u>first term</u> of (14), then sum equals to integral.

Here, Poisson summerizes these two examples :

> Ces deux examples suffisent pour montre que quand on supposose l'intervalle ε des valeurs successives de x extrèment petit par rapport à l'étendue des valeurs sensibles des φx, la somme p se transformera en une intégrale divisée par ε, touts les fois que φx ne sera composé que une d'un seul terme, ou de plusieurs terms de même sign; mais cela n'aura par toujours lieu, lorsque cette fonction sera composée de deux parties, des contraires.

¶6.5 Irreducible examples of sum intransformable into integral Poisson puts the cases of the irreducible functions as followings :

- the φx is not composed of only one term
- the φx is composed of the plural terms having inverse signes

At first, we consider the first pair of φx with term having inverse signes.

- $\varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}} \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'}{\varepsilon}, \quad \varphi = c - c'$

Because the value of φx were comparable and more than $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx$, (10) does not reduce into the <u>first term</u>.

Next, if φx <u>evaporates</u> with x, then

- $\varphi x = \Big(ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}}\Big)x \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha^2}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'^2}{\varepsilon}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = c - c'$

Poisson says : this sample function may be the third term of (10), viz., $-ae\varphi'$, which will become comparable or superior to the first term, while the coefficients c and c' are almost in the ratio of the inverse squared of $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ and $\frac{\alpha'}{\varepsilon}$.

At last, we consider more complicated pair of φx with term having inverse signes. We suppose b is a cofficient capable of becoming greater than we expect.

- $\varphi x = b\Big(\frac{\varepsilon}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\alpha'}e^{-\frac{x}{\alpha'}}\Big) \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = b(1-1) = 0$

The series (10) reduces to the second term, $\frac{1}{2}\varphi$.

- $\varphi x = bx\Big(\frac{\varepsilon}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\alpha'}e^{-\frac{x}{\alpha'}}\Big) \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = b(1-1) = 0$

The series (10) does not reduce, because all the terms are not comparable with the first term, then sum does not equal to integral. These examples are also irreducible types from sum into integral. How would Navier think this reason, if he had read this note ?

¶6.6 Conclusions by Poisson Poisson concludes the difference of reducibility to integral between φx and $x\varphi x$ as follows :

> Je conclus de là, conformément à ce qui a été dit dans le no.13,[11] que
>
> - quand la somme des valeurs d'une fonction de la nature de φx n'est pas réductible à une intégrale définie,
> - il n'est point à craindre que la somme des valeurs de $x\varphi x$ tombe en même temps dans ce cas d'exception. [26, p.282]

Poisson described previously this theme in the article no.31 of text. We cite this paragraphs itemizing and comparing two items as follows :

> Mais cette nouvelle difficulté n'a plus lieu, si, comme on l'a dit tout à l'heure, l'action moléculaire provient de deux forces contraires, dont chacune est extrémement grand, eu égard à leur différence; circonstance qui peut rendre la guantité $\frac{1}{h}\sum rR$ comparable et même supérieure à $\sum R$.
> Toutefois,
>
> - la somme $\sum R$ étant irréductible, d'après cette circonstance même, à une intégrale,
> - il n'en faut pas conclure que la même chose aura également lieu pour la somme $\sum rR$.
>
> On se convaincra sans peine du contraire par des exemples auxquels on appliquera la formule d'Euler, relative à ce genre de réductions, et qui montreront que
>
> - si la premiere somme est irréductible par nature de la fonction R,
> - et malgré la petitesse des différences de r, la second ne le sera pas en générel.
>
> ...
>
> Quant à la somme d'où dépend la pression sur la plan, et qui fait exception à la règle générale, c'est-à-dire qui n'est pas réductible à une intégrale, il nous suffira d'-avoir expliqué comment elle peut varier, suivant un rapport quelconque, pour des variations très petite dans les intervalles moléculaires, provenant du degré de condensation du liquide. [26, pp.30-31]

Here, Poisson's conclusions are two points as followings : $\sum R$ is irreducible into integral, however, $\sum rR$ is reducible into integral, although the differential of r is small, because the nature of function R, which express the microscopically descriptive actions of molecules, such as attraction and/or repulsion.

§7. Conclusions Navier describes about what he really means of null of molecular action in nature in N9−12. Poisson summarizes his idea from the mathematical viewpoint as follows :

• 級数 (10) を打ち切るいずれかの項で p の正確な値を得るために加える剰余項は定積分で表せる。この定積分の値は一般的に項によって変化するし、その級数が収束しているかどうかを知る極限を割り当てることが出来るものである。 この論文では、p の計算で • 剰余が定数になる場合や、• 級数 (10) が最初の２項を除いてゼロになる場合等の特異な場合を詳細に調べた。これには、p の値を得るために式 (10) に訴えねばならない。(*The Note*)

• これらの２つの例は $\varphi(x)$ の大きな値の範囲に比べて極めて微小な x の連続した値の区間 ε を想定する時、• $\varphi(x)$ が単項だけで出来ている、• $\varphi(x)$ が同じ符号を持つ多項からなっている等の時はいつでも総和 p が ε で割ったある積分に変換される事を示すのに十分である。 しかし、これはこの関数が逆の符号を持つ２つの部分で出来

[11] [26, pp.30-31]

Table 1: The kinetic equations of the hydrodynamics until the "Navier-Stokes equations" were fixed. (Rem. HD : hydrodynamics, N under entry-no : non-linear, gr.dv : grad.div, E : $\frac{\Delta}{gr.dv}$ in elastic, F : $\frac{\Delta}{gr.dv}$ in fluid. The group of entry 5,6 and 7 show $F = 3$ in fluid. Δ : tensor function with the main axis (the normal stress) of the Laplacian.)

no	name/prob	the kinetic equations	Δ	gr.dv	E	F
1	Navier (1827)[11] elastic solid	(6-1)$_{N^e}$ $\begin{cases} \frac{\Pi}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon\left(3\frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2x}{db^2} + \frac{d^2x}{dc^2} + 2\frac{d^2y}{dbda} + 2\frac{d^2z}{dcda}\right), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\left(\frac{d^2y}{da^2} + 3\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadb} + 2\frac{d^2z}{dcdb}\right), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\left(\frac{d^2z}{da^2} + \frac{d^2z}{db^2} + 3\frac{d^2z}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadc} + 2\frac{d^2y}{dbdc}\right) \end{cases}$ where Π is density of the solid, g is acceleration of gravity.	ε	2ε	$\frac{1}{2}$	
2 N	Navier (1827)[12] fluid	$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \varepsilon\left(3\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + 2\frac{d^2v}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dxdz}\right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx}\cdot u - \frac{du}{dy}\cdot v - \frac{du}{dz}\cdot w\ ; \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dydz}\right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx}\cdot u - \frac{dv}{dy}\cdot v - \frac{dv}{dz}\cdot w\ ; \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + 3\frac{d^2w}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz} + 2\frac{d^2v}{dydz}\right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx}\cdot u - \frac{dw}{dy}\cdot v - \frac{dw}{dz}\cdot w\ ; \end{cases}$	ε	2ε		$\frac{1}{2}$
3	Cauchy (1828)[3] system of particles in elastic solid and fluid	$\begin{cases} (L+G)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + (R+H)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + (Q+I)\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + 2R\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + 2Q\frac{\partial^2\zeta}{\partial z\partial x} + X = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ (R+G)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + (M+H)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + (P+I)\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + 2P\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z} + 2R\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + Y = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ (Q+G)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + (P+H)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + (N+I)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + 2Q\frac{\partial^2\xi}{\partial z\partial x} + 2P\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial z} + Z = \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}, \end{cases}$ $G = H = I,\quad L = M = N,\quad P = Q = R,\quad L = 3R$	$R+G$	$2R$	if $G = 0$ $\frac{1}{2}$	if $G = 0$ $\frac{1}{2}$
4	Poisson (1831)[25] elastic solid defined in general equations	$\begin{cases} X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dz^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}, \\ Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdy} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2v}{dy^2}, \\ Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydz} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2w}{dz^2}, \end{cases}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{2a^2}{3}$	$\frac{1}{2}$	
5	Poisson (1831)[25] fluid defined in general equations	$\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) + \frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) + \frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \rho(X - \frac{d^2x}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dx} + \beta(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}), \\ \rho(Y - \frac{d^2y}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dy} + \beta(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}), \\ \rho(Z - \frac{d^2z}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dz} + \beta(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}) \end{cases}$ where $\varpi \equiv p - \alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta+\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt},\quad \beta \equiv \alpha(K+k)$	β	$\frac{\beta}{3}$		3
6	Stokes (1849)[27] fluid	(12)$_S$ $\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} - \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} - \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} - \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0. \end{cases}$	μ	$\frac{\mu}{3}$		3
7 N	Prandtl (1934) HD	$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$ for incompressible, it is simplified as follows : div $\mathbf{w} = 0$, $\frac{D\mathbf{w}}{dt} = g - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p + \nu\Delta\mathbf{w}$	ν	$\frac{\nu}{3}$		3

ている場合は常には成り立たない。(*The Note*)

Poisson doesn't use at all of sum except for $\sum R, \frac{1}{h}\sum rR$ [26, pp.30-31] and $\sum R'$ [26, p.68], in which he explains the mathematical exceptions, as well as in *The Note*, however, in the parent part to *The Note* [26], he isn't necessary for using of sum instead of integral, and uses the ordinary deduction of the hydrostatic equations as follows :

> Quant à la somme d'où dépend la pression sur un plan, et qui fait exception à la règle générale, c'est-à-dire qui n'est pas réducible à une intégrale, il nous suffira d'avoir expliqué comment elle peut varier, suivant un rapport quelconque, pour des variations très petites dans les intervalles moléculaires, provenant du degré de condensation du liquide. Nous n'aurons pas besoin d'en calculer *à propri* la valuer; elle dépendra de la pression extérieure, de la pesanteur et des autres forces données qui agissent sur le liquide; et son expression en fonction des coordinées d'un point quelconque, se déduira, comme de coutourne, des équations de l'Hydrostatique.[26, p.31,¶13.]

In a word, we can conclude that Poisson choices sum or integral as the case may be of the material, after enough alternative. Navier passesd away in 1836, and we don't know whether he had checked Poisson's *Note*, which was issued in 1831. Poisson passed away in 1840. The Navier-Stokes equations was fixed until 1934, which is cited by a textbook by Prandtl. (cf. Table 1, entry no. 7. For further particulars, cf. [10].) There are disputes of sorts such as with Navier [14, 15, 16], with Fresnel, or about the application of algebraic root to transcendental equations with Fourier [24, 6, 7, 8], however, at any rate, we should evaluate his uniqueness and rigorousness of integral method.

References

[1] D.F.J.Arago, *Note du Rédacteur*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 107-110. (This is following with Navier[13], 99-107).

[2] D.H.Arnold, *The mécanique physique of Siméon Denis Poisson : The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840) I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX,X*, Arch. Hist. Exact Sci. **28-3**(1983) I:II:267-287, III:289-297, IV:299-320, V:321-342, VI:343-367, **29-1**(1983VII:37-51, VIII:53-72, IX: 73-94, **29-4**(1984) X:287-307.

[3] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercises de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.

[4] A.Cournot, (Book review) *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides ; par M.Navier. (Mém. de l'Acad. des Science ; Tom. VI, p. 389)*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **10**(1828), 11-14. (The title number : No.10.)

[5] G.Darboux, *Œuvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Premier, Paris, 1888, Tome Secund, Paris, 1890.

[6] J.-B.-J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur. Deuxiéme Édition*, Paris, 1822. (This is available by G.Darboux [5] (Tome Premier) with comments).

[7] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébraique aux équations transcendentes qui dépendendent de la théorie de la chaleur*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **7**(1827), 605-624. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227

[8] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **8**(1829), 581-622. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[9] J.M.C.D., (Book review) *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques ; par M.Poisson*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 98-111. (The title number : No.35.)

[10] S.Masuda, *Historical development of classical fluid dynamics*, Dissertation for a degree of Doctor of Science, Tokyo Metropolitan Univ., 2011. → http://hdl.handle.net/10748/4129

[11] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu: 14/mai/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227, 375-393.

[12] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. (Lu: 18/mar/1822.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x, 389-440.

[13] C.L.M.H.Navier, *Note relative à l'article intitulè : Mémoire sur les équilibre et le mouvement des Corps élastiques, page 337 du tome précédent*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 304-314.

[14] C.L.M.H.Navier, *Remarques sur l'Article de M.Poisson, insére dans le Cahier d'août, page 435*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 145-151.

[15] C.L.M.H.Navier, *Lettre de M.Navier à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 99-107. (This is followed by) *Note du Rédacteur*, 107-110.

[16] C.L.M.H.Navier, *Note relative à la question de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 249-253. (The title number : No.142.)

[17] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, 1818, 121-176. (Lu : 19/juillet/1819.)

[18] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, **37**(1828), 337-355. (Lu : 14/apr/1828. This is an extract from [21])

[19] S.D.Poisson, *Résponse à une Note de M.Navier insérée dans le dernier Cahier de ce Journal*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 435-440.

[20] S.D.Poisson, *Lettre de M.Poisson à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1828), 204-211.

[21] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **8**(1829), 357-570, (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[22] S.D.Poisson, *Addition au Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps, inséré dans ce volume*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **8**(1829), 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[23] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre fluides*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **9**(1830), 1-88. (Lu : 24/nov/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v

[24] S.D.Poisson, *Note sur les racines des équations transcendentes*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **9**(1830), 89-95. (Lu : 2/mars/1829.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v

[25] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équiblibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)

[26] S.D.Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, Bachelier Pére et Fils, Paris, 1831. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1103201

[27] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, *Mathematical and physical papers* **1**, 1966, 75-129, Cambridge.

Remark: we use *Lu* (: in French) in the bibliography meaning "read" date by the referees of the journals, for example MAS.