

# 非線形アルフヴェン波の可積分性と特異的挙動の解析

東京大学・新領域創成科学研究科

江本 伸悟 (Shingo Emoto), 吉田善章 (Zensho Yoshida)

Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

## 概要

We analyze d'Alambert solutions (propagating waves) of a nonlinear wave equations that describe amplitude and pitch modulations of one-dimensional Alfvén waves propagating on a dispersive nonlinear plasma. We observe a singular waveform repeating local modulations irregularly.

## 1 Introduction

プラズマは流れや圧力勾配を伴った多様な平衡構造を持つ. その中でも特に重要なものとして, curl 作用素の固有関数であるベルトラミ渦 [1] が挙げられる. このベルトラミ渦を軸に, 多数のプラズマ現象の理解が進んでいる.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \quad (1)$$

Woltjer[2] は局所磁気ヘリシティを束縛した上で磁気エネルギーを最小化することによって (1) 式を導出している. この式を緩和理論の文脈に位置づけたのは Taylor[3] であった. 彼は, 現実的な状況においては散逸によって局所における磁気ヘリシティの拘束は解けると考え, プラズマ体積全体での大域的なヘリシティを束縛した上で, 磁気エネルギーを最小化することによって (1) 式を導出した. ベルトラミ渦はヘリシティ (磁力線の絡み数) を保存した上でのプラズマの緩和状態として位置づけられることになる. こうした緩和状態は, 渦方程式の観点から言えば, 渦と流れを平行に配置するベルトラミ条件と, エネルギー密度を空間一定とするベルヌーイ条件とを満たす定常状態として表現される. プラズマの 2 流体描像を記述する Hall Magnetohydrodynamics(Hall MHD) では, 密度一定なる条件のもとで, ベルトラミ-ベルヌーイ条件からダブルベルトラミ方程式 [4] が得られる.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \alpha \nabla \times \mathbf{B} + \beta \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

この方程式の一般解は 2 つのベルトラミ渦の線形結合で与えられる [5]. これによって単独のベルトラミ渦だけでは捉えきれなかった問題, 例えばプラズマのマクロ構造とマイクロ構造がどのように連結するかといったスケール階層の問題に対しても, ベルトラミ渦の観点から解析の光が当てられるようになった [6]. このようなベルトラミ渦の結合を可能としているのは (2) 式の第 1 項であり, これは Hall 項に由来している. これをプラズマの 1 流体描像を記述する Ideal Magnetohydrodynamics(MHD) から見ると, Hall 項が特異摂動として働いていることになる.

近年ではベルトラミ渦をガリレイブーストすることによってアルフヴェン波の再導出がなされ, アルフヴェン波の持つ特性が, ベルトラミ方程式の枠組みから理解されるようになった [7]. Ideal Magnetohydrodynamics(MHD) で記述される 1 流体プラズマでは, アルフヴェン波が一様背景磁場中を任意振幅の任意波形を保って伝わるということが知られている. 一方, Hall Magneto Hydrodynamics(HMHD) で記述される 2 流体プラズマは分散性を持つため [8], 任意波形のアルフヴェン波が波形を保ったまま伝わるということとはなくなる. しかしこの HMHD においても, 任意振幅を取ることができる非線形アルフヴェン波が厳密解として得られる [9]. MHD においてアルフヴェン波が任意波形を取りうるのは, ベルトラミ方程式の持つ特異点に由来しており, Hall MHD では Hall 項が特異摂動となって特異性を解消するために, アルフヴェン波はもはや任意の波形を取りえなくなる.

本報告では, HMHD プラズマ中を伝わる 1 次元アルフヴェン波の, 圧縮運動によってもたらされる非線形変調について述べる. 定常進行波の波形は可積分な構造を持つことが示される. また同時に, アルフヴェン波が音速で伝搬するさいに, 方程式のリブシツ連続性が崩れ, この影響によって波の時空間構造に不規則性 (解の一意性の破れ) が生じることが示される.

## 2 Nonlinear Beltrami fields and modulated waves

この節では, 先ず Hall MHD におけるダブルベルトラミ場とアルフヴェン波の関係を示し, 続いて圧縮運動を扱えるように一般化されたベルトラミ-ベルヌーイ条件について紹介する [7]. 最後に, この一般化されたベルトラミ-ベルヌーイ条件を通減摂動することで非線形アルフヴェン-ベルトラミ方程式を得る.

### 2.1 Beltrami field and Alfvén wave

以下の Hall MHD について考える.

$$\partial_t (\mathbf{V} + \mathbf{A}) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}) = -\nabla (\phi + h_i + V^2/2) \quad (3)$$

$$\partial_t \mathbf{A} - (\mathbf{V} - n^{-1} \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla (\phi - h_e) \quad (4)$$

$$\partial_t n + \nabla \cdot (\mathbf{V} n) = 0 \quad (5)$$

ここで  $n$  は数密度,  $\mathbf{V}$  はイオン流速,  $\mathbf{B}$  は磁場,  $\mathbf{A}$  は磁場のベクトルポテンシャル,  $\phi$  は電荷密度,  $h_i$  と  $h_e$  はイオンと電子のエンタルピーである. 各変数はアルフヴェンユニットによって規格化され, システム長はイオンスキン長にとっている.

正準運動量  $\mathbf{P}_j$ , 渦度  $\boldsymbol{\Omega}_j := \nabla \times \mathbf{P}_j$ , 流れ  $U_j$ , エネルギー密度  $\phi_j$  を

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{V} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{P}_e = \mathbf{A}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\Omega}_e = \mathbf{B}, \quad (7)$$

$$U_i = \mathbf{V}, \quad U_e = \mathbf{V} - n^{-1} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

$$\phi_i = \phi + h_i + V^2/2, \quad \phi_e = \phi - h_e, \quad (9)$$

と定義することによって, 運動方程式 (3), (4) を

$$\partial_t \mathbf{P}_j - U_j \times \boldsymbol{\Omega}_j = -\nabla \phi_j \quad (10)$$

という対称的な形に書きなおすことができる. ベルトラミ条件

$$U_j = \mu_j \boldsymbol{\Omega}_j \quad (j = i, e) \quad (11)$$

とベルヌーイ条件

$$\nabla \phi_j = 0 \quad (j = i, e) \quad (12)$$

とを満たすベルトラミ平衡解について考えよう. 密度を定数 ( $n = 1$ ) に取ることで, ベルトラミ条件は線形の方程式

$$\mathbf{V} = \mu_i (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}) \quad (13)$$

$$\mathbf{V} - \nabla \times \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{B} \quad (14)$$

となる. (13) と (14) とを組み合わせることで,  $\mathbf{u} = \mathbf{B}, \mathbf{V}$  を定める方程式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + (\mu_e - \mu_i) \nabla \times \mathbf{u} + (1 - \mu_e/\mu_i) \mathbf{u} = 0 \quad (15)$$

を得る. この方程式は

$$(\text{curl} - \lambda_0)(\text{curl} - \lambda_1) \mathbf{u} = 0 \quad (16)$$

と書き換えることができる. ここで,  $\text{curl}$  作用素の固有値  $\lambda_0, \lambda_1$  は

$$\lambda_0 + \lambda_1 = \mu_i^{-1} - \mu_e, \quad \lambda_0 \lambda_1 = 1 - \mu_e / \mu_i \quad (17)$$

によって定まる. (16) の一般解は, 2つのベルトラミ渦の線形結合によって得られる [5].  $(\text{curl} - \lambda_l) \mathbf{G}_l = 0$  であるような  $\mathbf{G}_l$  と任意定数  $a_l (l = 0, 1)$  を用いて

$$\mathbf{B} = a_0 \mathbf{G}_0 + a_1 \mathbf{G}_1 \quad (18)$$

$$\mathbf{V} = a_0 (\lambda_0 + \mu_e) \mathbf{G}_0 + a_1 (\lambda_1 + \mu_e) \mathbf{G}_1 \quad (19)$$

となる.

特に, 一方の固有値をゼロ ( $\lambda_0 = 0$ ) としたときのダブルベルトラミ場をガリレイブーストすることで, 円偏光アルフヴェン波が得られる. ゼロ固有値に対応するベルトラミ固有関数は定数ベクトル場となる. この定数ベクトル場を背景場とすることで, もう一方の場を, この背景場を伝わる波動場と見なすことができる. (17) より,  $\lambda_0 = 0$  であるとき

$$\mu_e = \mu_i (= \mu) \quad (20)$$

となることがわかる. このとき, もう一方の固有値は  $\lambda_1 = \mu^{-1} - \mu$  となる. どのように波動場が伝搬するかを確かめよう.  $\lambda_0 = 0, \mathbf{G}_0 = \mathbf{e}_z, a_0 = 1$  とする. (つまり, これは  $\mathbf{B}$  を背景磁場によって規格化したことになる.) 対応する背景流れは  $\mathbf{V}_0 = \mu \mathbf{e}_z$  となる. ここで座標系をガリレイブーストする.

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z) := (x, y, z - \mu t) \quad (21)$$

この座標系では, 流れ場は

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0 = a_1 (\lambda_1 + \mu_e) \mathbf{G}_1 \quad (22)$$

として現れる. これは  $\mathbf{V}$  の波動成分に他ならない. つまり私たちは, 元の座標系は波と一緒に動く座標系であって, それ故に波動成分が止まり, 一方でプラズマが速度  $\mathbf{V}_0$  で流れていたのだと翻訳するのである. 位相速度は  $\mu$  で与えられ, これはベルトラミ固有値  $\lambda_1 = \mu^{-1} - \mu$  の関数

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 + 4} \right) \quad (23)$$

として記述できる.  $\lambda_1$  を波数として捉えると, (23) は円偏光アルフヴェン波の分散関係 [9] として解釈することができる. 実際, 固有値  $\lambda_1$  に対応するベルトラミ固有関数は

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1 z) \\ \cos(\lambda_1 z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

となる.

## 2.2 Generalized Beltrami-Bernoulli conditions in 1D system

圧縮運動を扱えるように一般化されたベルトラミ-ベルヌーイ条件について説明する. 以下では1次元のシステムを考えており, 全ての場は  $z$  と  $t$  のみに依存する関数であるとする. また  $\mathbf{B}$  を以下のように仮定する.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp(z, t) + \mathbf{e}_z \quad (25)$$

非線形変調に着目するために, 一般化されたベルトラミ条件

$$\mathbf{V} = \mu_i (\nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{B}) + u \mathbf{e}_z \quad (26)$$

$$\mathbf{V} - n^{-1} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{B} + u \mathbf{e}_z \quad (27)$$

を考える。ただし  $\mu_i, \mu_e$  は定数,  $u$  はスカラー関数である。すぐに分かる通り  $\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_z u$  であり,  $u$  の非一様性がプラズマ流速の圧縮をもたらし, それに伴ってアルフヴェン波の変調が生じる。この一般化されたペルトラミ条件の  $z$  成分からは

$$V_z = \mu + u \quad (\mu := \mu_i = \mu_e) \quad (28)$$

が得られる。また (26) と (27) から  $B$  を消去することで

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_\perp + (n\mu - \mu^{-1}) \nabla \times \mathbf{V}_\perp = 0 \quad (29)$$

が得られる。

一般化されたペルトラミ条件 (26), (27) を運動方程式 (10) に代入することで

$$\partial_t \mathbf{P}_j - u \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\Omega}_j = -\nabla \varphi_j \quad (30)$$

を得る。(30) の  $x-y$  成分は, (30) の curl を取って得られる渦方程式

$$\partial_t \boldsymbol{\Omega}_j - \nabla \times (u \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\Omega}_j) = 0 \quad (31)$$

と等価である。(30) の  $z$  成分は一般化されたベルヌーイ条件

$$\partial_t V_z + V_z \partial_z (V_z n) = -\nabla (h + V^2/2) \quad (32)$$

となる。一般化されたペルトラミ条件の  $z$  成分 (28), 一般化されたベルヌーイ条件 (32) に, 質量保存則

$$\partial_t n + \partial_z (V_z n) = 0 \quad (33)$$

とポアソン方程式

$$(1/c)^2 \nabla^2 \phi = \exp(\phi/T_e) - n \quad (34)$$

を付け加えたものが決定方程式となる。

## 2.3 Reductive Perturbation

上述の方程式系 (28), (29), (32), (33), (34) を通減摂動する。従属変数を

$$\begin{cases} n = 1 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \dots \\ u = 0 + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots \\ V_z = V_0 + \varepsilon V_z^{(1)} + \varepsilon^2 V_z^{(2)} + \dots \\ h = \phi = 0 + \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \\ \mathbf{V}_\perp = 0 + \varepsilon \mathbf{V}_\perp^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{V}_\perp^{(2)} + \dots \end{cases} \quad (35)$$

として展開する。また同時に独立変数を

$$\begin{cases} \tilde{z} = \varepsilon z \\ \tilde{t} = \varepsilon^2 t \end{cases} \quad (36)$$

と変換する。

(28) の  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$  オーダーからそれぞれ

$$V_0 = \mu, \quad V_z^{(1)} = u^{(1)}, \quad V_z^{(2)} = u^{(2)} \quad (37)$$

が得られる。ペルトラミ条件 (29) の  $\varepsilon^2$  オーダーからは

$$(\mu - \mu^{-1}) \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} = 0 \quad (38)$$

が得られる。非自明な  $\mathbf{V}_\perp^{(1)}$  を得るために

$$\mu^{-1} - \mu = \varepsilon \lambda, \quad \mu \sim 1 \quad (39)$$

とすることで、この項を  $\varepsilon^3$  オーダーへと送り込む。そうすると  $\varepsilon^3$  オーダーからは

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} + (-\lambda + \mu n^{(1)}) \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} = 0, \quad (40)$$

が得られる。続いて質量保存則 (33) について確かめる。 $\varepsilon^2$  オーダーからは

$$V_0 n^{(1)} + V_z^{(1)} = 0 \quad (41)$$

が得られる。 $\varepsilon^3$  オーダーからは

$$\partial_t n^{(1)} + \partial_z (n^{(1)} V_z^{(1)} + V_z^{(2)} + V_0 n^{(2)}) = 0 \quad (42)$$

が得られる。ベルヌーイ条件 (32) の  $\varepsilon^2$  オーダーからは

$$V_0 V_z^{(1)} + \phi^{(1)} = 0 \quad (43)$$

が得られる。 $\varepsilon^3$  オーダーからは

$$\partial_t V_z^{(1)} + V_z^{(1)} \partial_z V_z^{(1)} + \partial_z (V_0 V_z^{(2)} + \phi^{(2)} + \frac{1}{2} \|V_\perp^{(1)}\|^2) = 0 \quad (44)$$

が得られる。ポアソン方程式 (34) の  $\varepsilon^1$  オーダーからは

$$\phi^{(1)} / T_e = n^{(1)}, \quad (45)$$

$\varepsilon^2$  オーダーからは

$$\phi^{(2)} / T_e + \frac{1}{2} (\phi^{(1)} / T_e)^2 - n^{(2)} = 0 \quad (46)$$

が得られる。渦方程式 (31) からは  $\varepsilon^4$  オーダー以上の項しかでてこないことを注意しておく。

(41), (43), (45) を満たすために、

$$V_0 = \mu = c_s := \sqrt{T_e} \quad (47)$$

とする。このとき (37), (41), (43) は

$$V_z^{(1)} = u^{(1)} = -c_s n^{(1)} = -c_s^{-1} \phi^{(1)} \quad (48)$$

となる。(42) に  $-c_s$  を掛けたもの、(44), (46) に  $c_s^2$  を掛けたものを足しあわせ、(47) と (48) を用いることで

$$\partial_t V_z^{(1)} + \partial_z \left\{ \frac{1}{2} (V_z^{(1)})^2 + \frac{1}{4} |V_\perp^{(1)}|^2 \right\} = 0 \quad (49)$$

を得る。この発展方程式とベルトラミ方程式

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} - (\lambda + V_z^{(1)}) \tilde{\nabla} \times \mathbf{V}_\perp^{(1)} = 0 \quad (50)$$

を同時に解いていく必要がある。

### 3 Analysis of the nonlinear Beltrami waves

逓減摂動によって得られた連立方程式 (49), (50) の  $^{(1)}$  や  $\tilde{\cdot}$  を省略して表記を簡略化する。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_\perp - (\lambda + V_z) \nabla \times \mathbf{V}_\perp = 0 \quad (51)$$

$$\partial_t V_z + \partial_z \left( \frac{1}{2} V_z^2 + \frac{1}{4} |V_\perp|^2 \right) = 0 \quad (52)$$

この節では、この方程式の定常解について解析する。定常解として得られるベルトラミ渦をガリレイブースト ( $z \rightarrow z - \mu t$ ) することによって定常進行する非線形アルフヴェン波を得る。従ってこの解析は、アルフヴェン波の波形を調べることに他ならない。

定常解  $f(z)$  を仮定すると, (52) の x-y 成分からは

$$\frac{d^2}{dz^2} V_x - (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_y = 0, \quad (53)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} V_y + (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_x = 0. \quad (54)$$

が得られる. (51) からは

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} V_z^2 + \frac{1}{4} V_\perp^2 \right) = 0 \quad (55)$$

が得られる.

以下ではまず, この連立常微分方程式の第一積分を求める. 続いてそれらの第一積分を用いて, 方程式を変数分離する. 最後に, 変数分離された方程式が持つ特異点と, それに伴う特異的な変調について述べる.

### 3.1 First integrals

(53), (54), (55) は三つの第一積分を持つ. (55) を  $z$  に関して積分することによって, 一つ目の第一積分

$$\frac{1}{2} V_z^2 + \frac{1}{4} V_\perp^2 = H_0 \quad (56)$$

を得る. ここで  $H_0$  は積分定数である. (53) に  $dV_x/dz$  を掛けたものと, (54) に  $dV_y/dz$  を掛けたものを足し合わせることで二つ目の第一積分

$$\left( \frac{d}{dz} V_x \right)^2 + \left( \frac{d}{dz} V_y \right)^2 = 4H_0 w_0, \quad (57)$$

が得られる. ここで,  $w_0$  は正の積分定数である. この方程式はエンストロフィー密度  $|\nabla \times \mathbf{V}_\perp|^2$  の一様性を示している.

(53) に  $dV_y/dz$  を掛けたものから, (54) に  $dV_x/dz$  を掛けたものを引くことで,

$$V_y \frac{d^2}{dz^2} V_x - V_x \frac{d^2}{dz^2} V_y - (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} V_\perp^2 \right) = 0 \quad (58)$$

が得られる. ここで (56) を用いて

$$V_y \frac{d^2}{dz^2} V_x - V_x \frac{d^2}{dz^2} V_y + (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_z^2 = 0 \quad (59)$$

となる. これは

$$\frac{d}{dz} \left( V_y \frac{d}{dz} V_x - V_x \frac{d}{dz} V_y \right) + (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_z^2 = 0 \quad (60)$$

と書き換えることができるので, これを両辺積分して三つ目の第一積分

$$V_y \frac{d}{dz} V_x - V_x \frac{d}{dz} V_y + \int \left\{ (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_z^2 \right\} dz = 4H_0 l_0 \quad (61)$$

を得る.  $l_0$  は積分定数である. 関数

$$L(V_z^2) := 2H_0 l_0 - \int \left\{ (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_z^2 \right\} dz = 4H_0 l_0 - \lambda V_z^2 - \frac{2}{3} V_z^3 \quad (62)$$

を定義して, この方程式を

$$V_y \frac{d}{dz} V_x - V_x \frac{d}{dz} V_y = L(V_z^2), \quad (63)$$

と変形しておく. ここで

$$V_x(z) = r(z) \cos \theta(z), \quad V_y(z) = r(z) \sin \theta(z) \quad (64)$$

と置くと, これは

$$\frac{d}{dz} \theta = -\frac{L(V_z^2)}{r^2} \quad (65)$$

となる. 従って  $V_z^2$  が定まれば, (56), (65) によって  $V_x, V_y$  も定まることが分かる.

### 3.2 Sagdeev potential

これらの第一積分を用いて,  $V_z^2$  の空間構造を定める Sagdeev potential を求める. (55) を用いて  $V_z^2$  を  $z$  に関する二回微分が

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dz^2} V_z^2 &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} V_{\perp}^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (V_x^2 + V_y^2) \\
 &= -\frac{d}{dz} \left( V_x \frac{dV_x}{dz} + V_y \frac{dV_y}{dz} \right) \\
 &= -\left\{ \left( \frac{dV_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dV_y}{dz} \right)^2 + V_x \frac{d^2 V_x}{dz^2} + V_y \frac{d^2 V_y}{dz^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{66}$$

と計算される. ここで (53), (54) を用いて右辺第 3 項, 第 4 項を変形すると

$$\frac{d^2}{dz^2} V_z^2 = -\left\{ \left( \frac{dV_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dV_y}{dz} \right)^2 \right\} + (\lambda + V_z) \left( -V_x \frac{dV_y}{dz} + V_y \frac{dV_x}{dz} \right) \tag{67}$$

が得られる. 更に, (53), (54) が成り立つ時には (57), (63) も成り立つので, これを用いて右辺の変形を進めると

$$\frac{d^2}{dz^2} V_z^2 = -4H_0 w_0 + (\lambda + V_z) L(V_z^2) \tag{68}$$

となる. (62) を代入して計算すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dz^2} V_z^2 &= -4H_0 w_0 + (\lambda + V_z) \left( 4H_0 l_0 - \lambda V_z^2 - \frac{2}{3} V_z^3 \right) \\
 &= -\left\{ 4H_0 (w_0 - \lambda l_0) - 4H_0 l_0 V_z + \lambda^2 V_z^2 - \frac{5}{3} \lambda V_z^3 + \frac{2}{3} V_z^4 \right\} \\
 &= -\frac{d}{dV_z^2} \left\{ 8H_0^2 (l_0^2 - w_0) + 4H_0 (w_0 - \lambda l_0) V_z^2 - \frac{8}{3} H_0 l_0 V_z^3 + \frac{1}{2} \lambda^2 V_z^4 + \frac{2}{3} \lambda V_z^5 + \frac{2}{9} V_z^6 \right\}
 \end{aligned} \tag{69}$$

となる. 従って Sagdeev potential  $U(V_z^2)$  を

$$U(V_z^2) := 8H_0^2 (l_0^2 - w_0) + 4H_0 (w_0 - \lambda l_0) V_z^2 - \frac{8}{3} H_0 l_0 V_z^3 + \frac{1}{2} \lambda^2 V_z^4 + \frac{2}{3} \lambda V_z^5 + \frac{2}{9} V_z^6 \tag{70}$$

と定義することによって, 方程式

$$\frac{d^2}{dz^2} V_z^2 = -\frac{d}{dV_z^2} U(V_z^2), \tag{71}$$

が得られ, ポテンシャル曲面上の質点運動として  $V_z^2$  の波形を表現できる. (71) から得られる第一積分

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dz} V_z^2 \right)^2 + U(V_z^2) = E_0 \tag{72}$$

は  $w_0, l_0$  に従属しており,  $E_0 = 0$  となるようにポテンシャル  $U(V_z^2)$  の積分定数を定めていることを注意しておく.

### 3.3 Singularity and Irregular modulation

積分定数  $l_0, w_0$  が  $l_0 = \lambda, w_0 = \lambda^2$  という値を取るとき, Sagdeev potential  $U(V_z^2)$  は

$$U(V_z^2) = -\frac{8}{3}H_0\lambda V_z^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 V_z^4 + \frac{2}{3}\lambda V_z^5 + \frac{2}{9}V_z^6 \quad (73)$$

となる. このポテンシャルは

$$U(0) = 0, \quad \frac{dU}{dV_z^2}(0) = 0 \quad (74)$$

を満たし原点に接する.  $\lambda = 2, H_0 = 2/3$  とした場合の  $U(V_z^2)$  のグラフを図 1 に記す. 一見このポテンシヤ

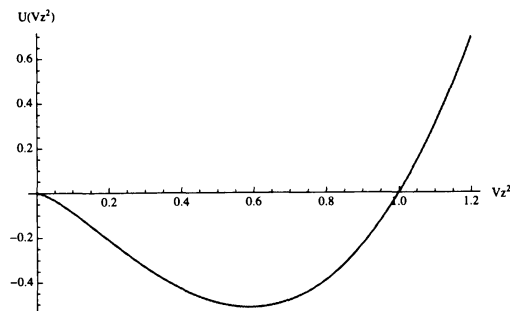


図 1 Potential surface governing the development of the square amplitude(  $c_s^{-1}=v=w_0=1, l_0=-1, H_0=2/3$  )

ル曲線からはソリトン型の変調が生じるように思える. しかしポテンシャル頂点  $z = 0$  において, ポテンシャル力  $-dU/dV_z^2$  に含まれる  $4H_0\lambda V_z = 4H_0\lambda(V_z^2)^{1/2}$  なる項のリプシッツ連続性が崩れ, 特異点となっていることに注意しなければならない. この特異点におけるリプシッツ連続性の破れが影響して, 通常とは異なる種類の変調が生じる. 特異点付近での変調の振舞いを調べよう. 特異点付近でのポテンシャルの主要項を  $U_\epsilon(V_z^2)$  とすると

$$U_\epsilon(V_z^2) = -\frac{8}{3}H_0\lambda(V_z^2)^{3/2} \quad (75)$$

となる. これを用いて, 特異点付近での二乗振幅の発展方程式を

$$\frac{d^2}{dz^2} V_z^2 = -\frac{d}{dV_z^2} U_\epsilon(V_z^2) = 4H_0\lambda(V_z^2)^{1/2} \quad (76)$$

と書くと, この方程式は以下のような解を持つ.

$$V_z^2(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}H_0^2\lambda^2(z_0 - z)^4 & (z < z_0) \\ 0 & (z_0 \leq z \leq z_1) \\ \frac{1}{3}H_0^2\lambda^2(z - z_1)^4 & (z_1 < z) \end{cases} \quad (77)$$

ここで  $z_0 < z_1$  は任意の定数である. この解をポテンシャル上の質点運動の観点から解釈すると, ポテンシャル頂点 (特異点) に向かう質点が  $z = z_0$  でピタリと頂点に静止し,  $z_0 \leq z \leq z_1$  の間は頂点に留まり,  $z = z_1$  から再び頂点を下り始める運動を表す.  $z_0, z_1$  は任意に選べるため, 頂点での滞在時間も任意に選ぶことができる. 頂点 (特異点) 付近でのこのような振舞いと, Fig1 に示されるようなポテンシャル形状とを考慮すると, ポテンシャル上の質点は, 頂上での静止と谷の往復とを不規則に繰り返すということが分かる. 結局, 二乗振幅は Fig.2 に示されるように, 振幅  $V_z^2 = 2H_0\lambda$  の周りで局所的な変調を不規則に繰り返すことになる. Fig. 3 は, このような変調を起こすベルトラミ渦の模式図である.



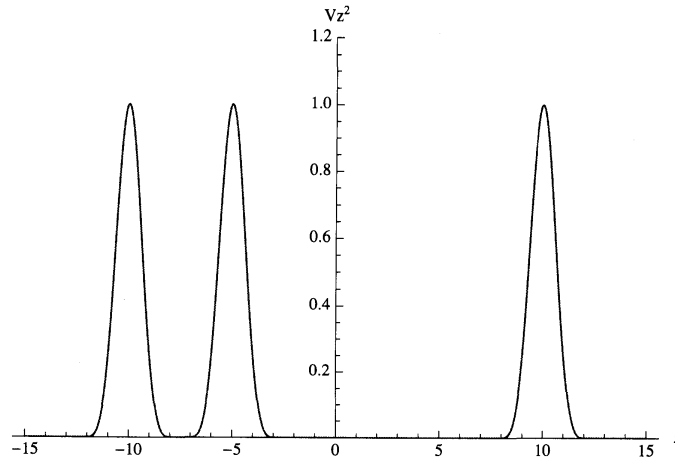


図2 Irregular modulation of the square amplitude

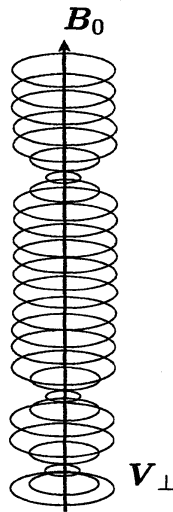


図3 Image of the irregular modulation

この特異性の物理的な意味をはっきりさせるために、逡減摂動以前のスケールに戻って、このベルトラミ渦の無変調部分をガリレイブーストして得られるアルフヴェン波を眺めてみよう。

$$\mathbf{V} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sin \{ \varepsilon \lambda (z - c_s t) \} \\ \cos \{ \varepsilon \lambda (z - c_s t) \} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

ここで  $z, t$  は逡減摂動以前の意味で用いており、 $z^{(1)}, t^{(1)}$  の意味ではないことに注意されたい。これはつまり、長波長小振幅の円偏光アルフヴェン波が音速  $c_s$  で伝わるときに特異性が発現し、上述のような不規則な変調を起こしうることを示している。

## 4 Conclusion

圧縮運動を扱えるように一般化されたベルトラミ-ベルヌーイ条件を解析することによって、1次元アルフヴェン波の非線形変調について調べた。逡減摂動法によって、長波長小振幅のアルフヴェン波が定常進行するさいの波形構造を定める方程式を導出した。この方程式は、円偏光アルフヴェン波の位相速度が音速に等しくなる点でリブシツ連続性が崩れる。それに伴いソリトン型の変調がランダムな箇所で生じる不規則

変調が得られる。これはある意味で任意性を持った波形であり、これが MHD において生じる任意波形アルフヴェン波となんらかの関わりを持つのかについては、今後の考察を必要とする。

## 付録 A Applicable scope of Sagdeev potential

連立方程式 (53), (54), (55) から Sagdeev potential を導く過程では、いくつかの不可逆な操作を行なっている。そのため、Sagdeev potential を用いて得られた解が、元の連立方程式を満たすかどうかについては検討の必要がある。ここでは、常に  $V_{\perp}^2 \neq 0$  であるような解については、元の連立方程式を満たすことを示す。

前述のことを示すために、方程式系 (57), (63), (69) を満たし、常に  $V_{\perp}^2 := V_x^2 + V_y^2 \neq 0$  であるような解  $V_x, V_y$  を仮定し、これを方程式系 (53), (54) の左辺に直接代入して、右辺の 0 に等しくなることを示す。今後の計算の見通しを良くするために関数  $G(V_{\perp}^2)$  を以下のように定義する。

$$V_x \frac{dV_x}{dz} + V_y \frac{dV_y}{dz} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} V_{\perp}^2 := G(V_{\perp}^2) \quad (79)$$

(79) と (63) を用いて、 $\frac{d}{dz} V_x$  と  $\frac{d}{dz} V_y$  を、 $V_x, V_y, V_{\perp}^2$  の関数として表すことができる。(79)× $V_x$ +(63)× $V_y$  を計算し、両辺を  $V_{\perp}^2 (\neq 0)$  で割ることで

$$\frac{dV_x}{dz} = \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_x G(V_{\perp}^2) + V_y L(V_z^2)) \quad (80)$$

を得る。同様に、(79)× $V_y$ -(63)× $V_x$  を計算し、両辺を  $V_{\perp}^2 (\neq 0)$  で割ることで

$$\frac{dV_y}{dz} = \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_y G(V_{\perp}^2) - V_x L(V_z^2)) \quad (81)$$

を得る。次に、後ほどの計算に必要な  $dG/dz, dL/dz, G^2$  を予め計算しておく。 $dG/dz$  は

$$\frac{d}{dz} G(V_{\perp}^2) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} V_{\perp}^2 = -\frac{d^2}{dz^2} V_z^2 = 4H_0 w_0 - (\lambda + V_z) L(V_z^2) \quad (82)$$

と計算できる。2つ目の等式で (56), 3つ目の等式で (68) を用いている。 $dL/dz$  は

$$\frac{d}{dz} L(V_z^2) = -(\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_z^2 = -(\lambda + V_z) \left( -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} V_z^2 \right) = (\lambda + V_z) G(V_{\perp}^2) \quad (83)$$

と計算される。始めの変形には  $L(V_z^2)$  の定義 (62), 2つ目の変形は (56), 3つ目の変形は  $G(V_{\perp}^2)$  の定義 (79) を用いている。続いて  $G^2$  を計算する。

$$\begin{aligned} G(V_{\perp}^2)^2 &= \left( V_x \frac{dV_x}{dz} + V_y \frac{dV_y}{dz} \right)^2 \\ &= V_x^2 \left( \frac{dV_x}{dz} \right)^2 + V_y^2 \left( \frac{dV_y}{dz} \right)^2 + 2V_x V_y \frac{dV_x}{dz} \frac{dV_y}{dz} \\ &= (V_x^2 + V_y^2) \left\{ \left( \frac{dV_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dV_y}{dz} \right)^2 \right\} - V_x^2 \left( \frac{dV_y}{dz} \right)^2 - V_y^2 \left( \frac{dV_x}{dz} \right)^2 + 2V_x V_y \frac{dV_x}{dz} \frac{dV_y}{dz} \\ &= V_{\perp}^2 \left\{ \left( \frac{dV_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dV_y}{dz} \right)^2 \right\} - \left\{ V_y \left( \frac{dV_x}{dz} \right) - V_x \left( \frac{dV_y}{dz} \right) \right\}^2 \\ &= 4H_0 w_0 V_{\perp}^2 - L(V_z^2)^2 \end{aligned}$$

最後の変形で (57), (63) を用いている。(80)~(84) を用いて、(53) の左辺を計算し、右辺の 0 に等しくなることを示す。

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dz^2} V_x - (\lambda + V_z) \frac{d}{dz} V_y \\ &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_x G + V_y L) \right\} - (\lambda + V_z) \left\{ \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_y G - V_x L) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{V_{\perp}^4} \left( \frac{d}{dz} V_{\perp}^2 \right) (V_x G + V_y L) \\
&\quad + \frac{1}{V_{\perp}^2} \left( \frac{dV_x}{dz} G + V_x \frac{dG}{dz} + \frac{dV_y}{dz} L + V_y \frac{dL}{dz} \right) - (\lambda + V_z) \left\{ \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_y G - V_x L) \right\} \\
&= -\frac{1}{V_{\perp}^4} (2G) (V_x G + V_y L) + \frac{1}{V_{\perp}^2} \left[ \left\{ \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_x G + V_y L) \right\} G + V_x \{4H_0 w_0 - (\lambda + V_z) L\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_y G - V_x L) \right\} L + V_y (\lambda + V_z) G \right] - (\lambda + V_z) \left\{ \frac{1}{V_{\perp}^2} (V_y G - V_x L) \right\} \\
&= -\frac{V_x}{V_{\perp}^4} (G^2 + L^2) + 4H_0 w_0 \frac{V_x}{V_{\perp}^2} \\
&= -\frac{V_x}{V_{\perp}^4} (4H_0 w_0 V_{\perp}^2) + 4H_0 w_0 \frac{V_x}{V_{\perp}^2} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{84}$$

二行目の変形で (80), (81) を, 四行目の変形で (79), (80), (81), (82), (83) を, 六行目の変形で (84) を用いている。これより, (53) が成り立つことが分かる。(54) が成り立つことも同様の計算で示される。

## 参考文献

- [1] Z. Yoshida, Y. Giga. Remarks on spectra of operator rot. *Math Z* 1990;204:235-45.
- [2] L. Woltjer. A theorem on Force-Free magnetic fields. *Proc Natl Acad Sci USA* 1958; 44:489-491.
- [3] J.B. Taylor. Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields. *Phys Rev Lett* 1974;33:1139-1141.
- [4] S. M. Mahajan, Z. Yoshida, Double Curl Beltrami Flow: Diamagnetic Structures. *Phys Rev Lett* 1998;81:4863-6.
- [5] Z. Yoshida, S. M. Mahajan. Simultaneous Beltrami conditions in coupled vortex dynamics. *J Math Phys* 1999;40:5080-91.
- [6] Yoshida Z, Mahajan SM, Ohsaki S. Scale hierarchy created in plasma flow. *Phys Plasma* 2004; 11:3660-4
- [7] Z. Yoshida . Nonlinear Alfvén/Beltrami waves-An integrable structure built around the Casimir. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2011.
- [8] S. Ohsaki and S. M. Mahajan. Hall current and Alfvén wave. *Phys Plasma* 2004;3:898
- [9] S. M. Mahajan, V. Krishan. Exact solution of the incompressible hall magnetohydrodynamics. *Mon Not Roy Astron Soc* 2005;359:L27-29