

## 磁性流体界面解析における行列解法

北大大学院工学研究院 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Fac. of Engineering, Hokkaido Univ.

### 1 はじめに

磁性流体の界面では、任意形状の界面を通して磁場と流体が相互作用し、その結果、他に類を見ない界面現象が現れる。このような現象の理論解析では、通例、水平に近い界面の変位振幅は小さく、印加磁場は一様鉛直として、界面変位振幅に関する界面磁場・界面エネルギーなどの各べきを摂動法で求める弱非線形解析を用いる [1, 2]。これにより、分岐図式上に描いた分岐曲線から、臨界磁場強度以上で六角格子状界面が安定になることや界面形状間遷移の履歴現象が導かれている。

本研究では、このような解析を、界面形状の大きさや複雑さによる制限を受けることなく、できるだけ厳密に行うための汎用的な方法を構築してきた。磁場解析では、界面形状と印加磁場分布を任意として、界面がない状態の印加磁場分布に 3次元 Hilbert 変換演算子  $\hat{H}_I$  ( $I = X, Y, Z$ ) を作用させ、調和性と界面条件を満たす界面磁場を求める (汎用解析)[3]。Bernoulli 方程式と界面条件から界面力学方程式を導き、これに界面磁場から計算した磁気応力差を重力ポテンシャル・表面張力と共に用いて、印加磁場強度に応じて変化する界面形状パターン、特に Fig. 1(a) のような六角格子界面形状について、安定性解析を行った [4, 5]。安定性は、界面応力と界面振幅に関する勾配行列から求めた固有値 (非線形応答) の符号から判定する。それぞれの界面変位振幅  $\zeta_0$  で、非線形応答の符号が負となる波数領域が初めて現れる臨界磁場強度  $H_0 = H_c$  を求めると、印加磁場強度－界面変位振幅の分岐図式上に Fig. 1(b) のような分岐の枝を描くことができる。この際、Fig. 2 のように、非線形応答  $h$  の界面形状波数  $k$  への依存性を  $\zeta_0, H_0$  ごとに調べた。

ところで、Fig. 1(b) の分岐の枝には、磁性流体の透磁率比  $\mu_+/\mu_0$  への依存性がある。透磁率比 1.2, 1.3 の分岐の枝は、界面振幅を増やすにつれて亜臨

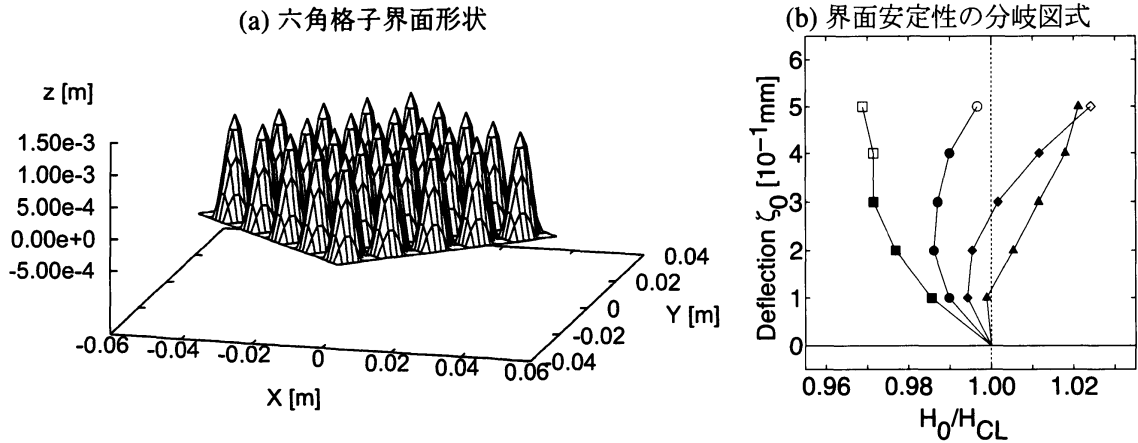


Fig. 1: 六角格子界面形状と分岐図式.  $\mu_+/\mu_0=1.1$  ( $\blacktriangle\triangle$ ),  $1.2$  ( $\blacklozenge\lozenge$ ),  $1.3$  ( $\bullet\circ$ ),  $1.4$  ( $\blacksquare\square$ ).

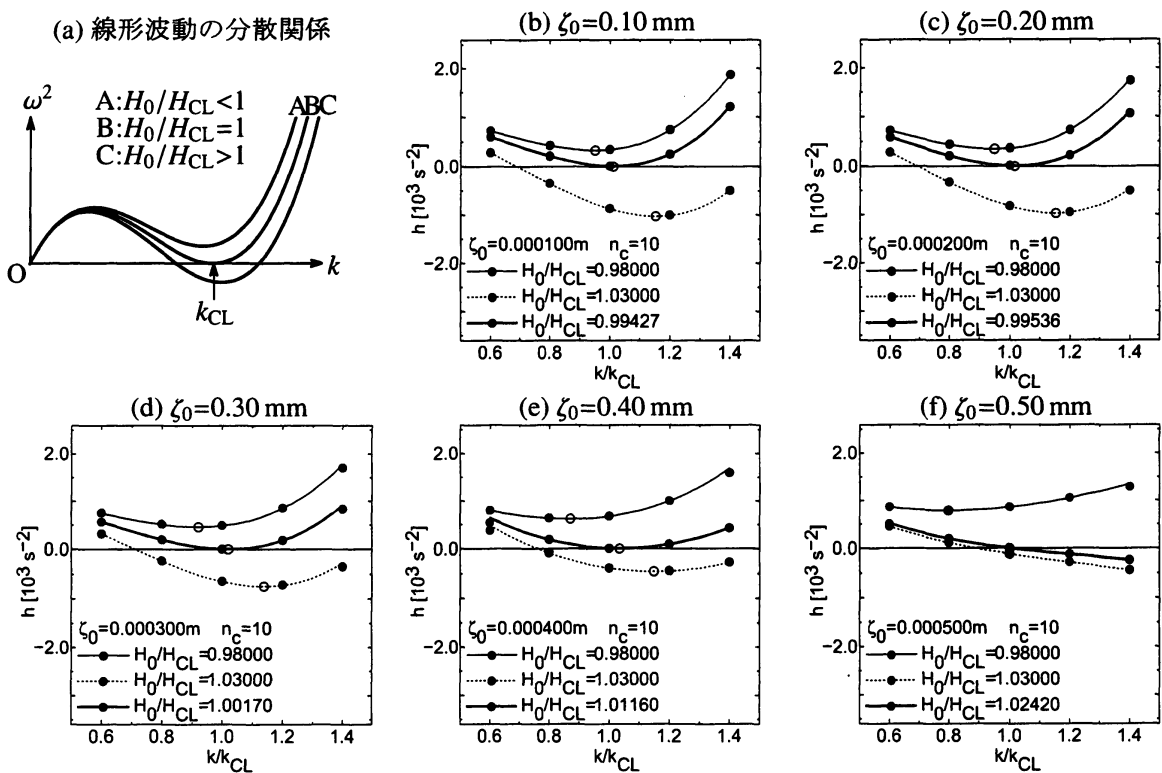


Fig. 2: 非線形応答の界面変位振幅・印加磁場強度依存性 ( $\mu_+/\mu_0=1.2$ )

界側から超臨界側に振れて弱非線形解析のように振る舞うが、透磁率比 1.4 の分岐の枝は、超臨界側に戻る前に臨界磁場強度を本来の定義どおりに決められなくなる。すなわち、Fig. 2 で  $\zeta_0$  が小さければ、 $H_0$  を増すにつれて減少する非線形応答が横軸に接する瞬間に臨界磁場強度  $H_c$ 、臨界波数  $k_c$  が決まるが、大きな  $\zeta_0$  では、非線形応答は高波数領域で負のまま単調減少する

ようになる。結果として、非線形応答に極小は現れず、ある波数以上の波数成分は全て不安定になる。図中の△◇○□は、 $h(k_{CL}) = 0$  ( $k_{CL}$  は線形臨界波数) とする印加磁場強度で、不安定性の目安に用いる。この場合はもちろん、 $k = k_{CL}$  で  $\partial h / \partial k = 0$  とならない。

高波数領域で非線形応答が単調減少する原因は、 $\zeta_0$  が大きくなるにつれて、負の磁気応力差に波数成分が新たに現れて正の表面張力を凌駕するためと考えられる。このようなことを念頭に置いて解析の正当性を確認するために、まず磁場解析において、弱非線形解析による界面磁場の表式を導き、これまでに構築してきた汎用解析との関係、界面変位振幅および透磁率差に関する高次の効果、を調べることにした。しかし、摂動法に基づく弱非線形解析の表式は、2次3次程度でも複雑で扱いにくい。本稿では、この煩雑さを避けて界面磁場の表式を求めるための行列解法について述べる。

## 2 汎用解析による界面磁場

磁性流体の界面現象は、磁場と流体の相互作用の結果として生じる。このとき、磁気応力差

$$T \equiv - [1/\mu_{\pm}] \{ \mu_+ \mu_- (h_x^2 + h_y^2) + b_z^2 \} / 2 \quad (1)$$

が磁場から流体への作用を表す。ここで、 $j=+$  を流体、 $j=-$  を真空として、 $\mu_{\pm}$  は各領域の透磁率である。また、界面を横切る値の跳び(真空-流体)を  $[\dots]$  と表した。 $h_{X,Y}$  と  $b_Z$  は界面上の接線磁場と法線磁束密度で、あわせて界面磁場とよぶ、これらは界面をはさんだ共通量で、界面近傍の磁場分布が調和性と界面条件を満たすように決める。

界面形状や印加磁場分布が任意でも、調和性と界面条件を満たす界面磁場を厳密に求められる汎用解析[3]を以下にまとめる。接線磁場  $h_{X,Y}$ 、法線磁束密度  $b_Z$  は、 $h_{X,Y} = h_{X,Y}^0 + h_{X,Y}^1$ 、 $b_Z = b_Z^0 + b_Z^1$  のように、基本場  $h_{X,Y}^0$ 、 $b_Z^0$  と誘導場  $h_{X,Y}^1$ 、 $b_Z^1$  に分ける。基本場は、既知の外部印加磁場  $\mathbf{h}^0$  および直交曲線座標系の接線単位ベクトル  $\mathbf{t}_{X,Y}$ 、法線単位ベクトル  $\mathbf{t}_Z$  により、 $h_{X,Y}^0 = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0$ 、 $b_Z^0 = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0 / P$  と直接定義できる ( $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+) / 2$ )。一方、基本場と合わ

せて界面磁場が調和性と界面条件を満たすようにするための誘導場は,

$$\begin{cases} h_X^1 = \hat{H}_X (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0, \\ h_Y^1 = \hat{H}_Y (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0, \\ b_Z^1 = \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0 \end{cases} \quad (2)$$

から決める. ここで,  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  を観測点とソース点の位置ベクトル,  $\psi$  を  $\mathbf{r}'$  の関数や微分,  $\psi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = -1/4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$  を 3次元 Poisson 方程式  $\Delta'\psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  の基本解,  $\iint dS'$  を界面上の  $\mathbf{r}'$  にわたる積分,  $g(\mathbf{R}')$  を任意の関数,  $\mathbf{R}' = (X', Y')$ ,  $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$  として,

$$\hat{H}[g(\mathbf{R}')] \equiv -2 \iint dS' \psi g(\mathbf{R}')$$

と置けば, 3次元 Hilbert 変換演算子  $\hat{H}_{X,Y,Z}$  は次のような積分演算子である.

$$\begin{cases} \hat{H}_X[g(\mathbf{R}')] = -M \hat{H}[t_X \cdot \nabla' g(\mathbf{R}')], \\ \hat{H}_Y[g(\mathbf{R}')] = -M \hat{H}[t_Y \cdot \nabla' g(\mathbf{R}')], \\ \hat{H}_Z[g(\mathbf{R}')] = -\frac{M}{P} \hat{H}[t_Z \cdot \nabla' g(\mathbf{R}')]. \end{cases} \quad (3)$$

(2)を用いると, 次のように, 法線磁束密度が  $\hat{H}_Z$  の繰り返し演算構造を持つことがわかる.

$$\begin{aligned} b_Z^0 + b_Z^1 &= b_Z^0 + \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0 = (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_Z^0 \\ &= (1 + \hat{H}_Z + \hat{H}_Z^2 + \hat{H}_Z^3 + \dots) b_Z^0. \end{aligned} \quad (4)$$

3.5節では, 弱非線形解析の方法でこれに相当する量を導き, やはり同じ構造を持つことを示す.

### 3 弱非線形解析による界面磁場

#### 3.1 界面条件と界面共通量

$\mathbf{r} = (x, y)$  を界面上の点の水平座標,  $\mathbf{k}_j = (k_{jx}, k_{jy})$  を  $j$  番目の波数ベクトルとして,  $f_j(x, y) = \cos \theta_j$  ( $\theta_j = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}$ ) のような周期関数の列により, 界面形状関数  $\zeta(x, y)$  と (磁場に対する) 磁気ポテンシャル  $\phi^\pm(x, y, z)$  を次のように展開する.

$$\zeta(x, y) = \sum_{j=1}^m f_j(x, y) \tilde{\zeta}_j, \quad (5)$$

$$\phi^\pm(x, y, z) = \text{const}^\pm + \mu_\mp P \phi^0(x, y, z) \pm \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j^\pm \exp(\pm k_j z) f_j(x, y). \quad (6)$$

ここで,  $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$  は流体領域 (+), 真空領域 (-) の透磁率  $\mu_\mp$  で定義したパラメータ,  $\phi^0$  は界面がないときの印加磁場分布である. 流体・真空

各領域で定義した磁気ポテンシャルは、 $k_j=|k_j|$  とすれば、このままでデカルト座標  $(x, y, z)$  での Laplace 方程式を満たす。展開係数  $\tilde{b}_j^\pm$  は、接線界面条件  $\phi^+(x, y, \zeta)=\phi^-(x, y, \zeta)$  と法線界面条件  $b_n^+(x, y, \zeta)=b_n^-(x, y, \zeta)$  を満たすように決める。ここで、界面上の法線磁束密度は、次のような法線微分から求める。

$$b_n^\pm(x, y, \zeta(x, y)) = \mu_\pm \partial \phi^\pm / \partial Z, \quad (7)$$

$$\partial / \partial Z = (1/|r_z|) (\partial / \partial z - \nabla \zeta \cdot \nabla)_{z=\zeta}, \quad |r_z| = \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}, \quad \nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y).$$

界面上  $z = \zeta(x, y)$  の磁気ポテンシャルと法線磁束密度を次のように表す。

$$\phi^\pm(x, y, \zeta(x, y)) = \text{const}^\pm + \mu_\mp P \phi^0(x, y, \zeta(x, y)) + \Phi^\pm(x, y, \zeta), \quad (8)$$

$$b_n^\pm(x, y, \zeta(x, y)) = \mu_+ \mu_- P \frac{\partial \phi^0}{\partial Z} + B^\pm(x, y, \zeta). \quad (9)$$

ただし、展開係数  $\tilde{b}_j^\pm$  を含む項を以下の  $\Phi^\pm(x, y, \zeta)$ ,  $B^\pm(x, y, \zeta)$  にまとめ、これらを (14), (15) の  $u_j^\pm(x, y, \zeta)$ ,  $v_j^\pm(x, y, \zeta)$  で表した。

$$\Phi^\pm(x, y, \zeta) \equiv \pm \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j^\pm \exp(\pm k_j \zeta) f_j(x, y) \quad (10)$$

$$= \pm \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j^\pm (f_j(x, y) + u_j^\pm(x, y, \zeta)), \quad (11)$$

$$B^\pm(x, y, \zeta) \equiv \frac{\mu_\pm}{|r_z|} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j^\pm \exp(\pm k_j \zeta) \{k_j f_j(x, y) \mp (\nabla \zeta \cdot \mathbf{k}_j) f_j'(x, y)\} \quad (12)$$

$$= \frac{\mu_\pm}{|r_z|} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j^\pm \{k_j (f_j(x, y) + u_j^\pm(x, y, \zeta)) \mp v_j^\pm(x, y, \zeta)\}, \quad (13)$$

$$u_j^\pm(x, y, \zeta) \equiv \{\exp(\pm k_j \zeta) - 1\} f_j(x, y), \quad (14)$$

$$v_j^\pm(x, y, \zeta) \equiv \exp(\pm k_j \zeta) (\nabla \zeta \cdot \mathbf{k}_j) f_j'(x, y), \quad (f_j'(x, y) = df_j/d\theta_j). \quad (15)$$

2節における接線磁場  $h_{x,y}$  は (8) の  $\phi^\pm$  の接線方向微分から求められ、法線磁束密度  $b_z$  は (9) の  $b_n^\pm$  そのものである。

(8), (9) により、接線界面条件と法線界面条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{const}^+ + \mu_- P \phi^0(x, y, \zeta) + \Phi^+(x, y, \zeta) \\ & = \text{const}^- + \mu_+ P \phi^0(x, y, \zeta) + \Phi^-(x, y, \zeta) \equiv \Phi(x, y, \zeta), \end{aligned} \quad (16)$$

$$B^+(x, y, \zeta) = B^-(x, y, \zeta) \equiv B(x, y, \zeta). \quad (17)$$

ここで、 $\Phi^\pm$ ,  $B^\pm$ ,  $\Phi$ ,  $B$  などを  $x, y$  の関数として、周期関数列で

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(x, y, \zeta) &= \sum_{i=1}^m f_i(x, y) \Phi_i^\pm, \quad \Phi(x, y, \zeta) = \sum_{i=1}^m f_i(x, y) \Phi_i, \quad u_j^\pm(x, y, \zeta) = \sum_{i=1}^m f_i(x, y) U_{ij}^\pm, \\ B^\pm(x, y, \zeta) &= \sum_{i=1}^m f_i(x, y) B_i^\pm, \quad B(x, y, \zeta) = \sum_{i=1}^m f_i(x, y) B_i, \quad v_j^\pm(x, y, \zeta) = \sum_{i=1}^m f_i(x, y) V_{ij}^\pm, \\ \phi^0(x, y, \zeta) &= \sum_{i=1}^m f_i(x, y) \phi_i^0 \end{aligned}$$

と展開すれば, (11),(13),(16),(17)から, 展開係数の間の次の関係が導かれる.

$$\Phi_i^\pm = \pm \sum_{j=1}^m (\delta_{ij} + U_{ij}^\pm) \tilde{b}_j^\pm = \pm \tilde{b}_i^\pm \pm \sum_{j=1}^m U_{ij}^\pm \tilde{b}_j^\pm, \quad (18)$$

$$B_i^\pm = \frac{\mu_\pm}{|r_z|} \sum_{j=1}^m \{(\delta_{ij} + U_{ij}^\pm) k_j \mp V_{ij}^\pm\} \tilde{b}_j^\pm = \frac{\mu_\pm}{|r_z|} \{k_i \tilde{b}_i^\pm + \sum_{j=1}^m (k_j U_{ij}^\pm \mp V_{ij}^\pm) \tilde{b}_j^\pm\}, \quad (19)$$

$$\Phi_i = \mu_- P \phi_i^0 + \Phi_i^+ = \mu_+ P \phi_i^0 + \Phi_i^-, \text{ または } 0 = (\mu_+ - \mu_-) P \phi_i^0 + \Phi_i^- - \Phi_i^+, \quad (20)$$

$$B_i = B_i^+ = B_i^-. \quad (21)$$

### 3.2 界面量のべき展開

界面量(8),(9)は(18),(19)の $\Phi_i^\pm, B_i^\pm$ から計算できるが, $\Phi_i^\pm, B_i^\pm$ を求めるには,(20),(21)を満たすように $\tilde{b}_j^\pm$ を決める必要がある。 $\tilde{b}_j^\pm$ は $U_{ij}^\pm, V_{ij}^\pm$ を通して界面形状 $\zeta$ に依存する。 $U_{ij}^\pm, V_{ij}^\pm$ は $\zeta$ およびその展開係数 $\tilde{\zeta}_i$ に関して非線形であるが, $\zeta$ を与えれば既知量として計算でき,弱非線形解析では $\zeta$ と共に1次以上の微小量である。そこで従来の弱非線形解析では, $\zeta$ を微小量として,(18),(19)で

$$\tilde{b}_i^\pm = \tilde{b}_i^{\pm(1)} + \tilde{b}_i^{\pm(2)} + \tilde{b}_i^{\pm(3)} + \dots, \quad (22)$$

$$U_{ij}^\pm = U_{ij}^{\pm(1)} + U_{ij}^{\pm(2)} + U_{ij}^{\pm(3)} + \dots, \quad (23)$$

$$V_{ij}^\pm = V_{ij}^{\pm(1)} + V_{ij}^{\pm(2)} + V_{ij}^{\pm(3)} + \dots \quad (24)$$

のように $\zeta$ のべき展開を行ってから(20),(21)に代入し,両辺のべき数がつりあった方程式を用いて, $\tilde{b}_i^{\pm(1)}, \tilde{b}_i^{\pm(2)}, \tilde{b}_i^{\pm(3)}, \dots$ を逐次的に決め,その後, $\Phi_i, B_i$ を求める[6].水平界面に鉛直一様磁場 $H_0$ を印加する場合の表式は,

$$\Phi_i \simeq H_0 \left( \tilde{\zeta}_i + \frac{M}{P} \hat{D}_{ij}^{(1)} \tilde{\zeta}_j + \frac{M^2}{P^2} \hat{D}_{ij}^{(1)} \hat{D}_{jl}^{(1)} \tilde{\zeta}_l \right), \quad (25)$$

$$B_i^\pm \simeq \frac{\mu_+ \mu_- P H_0}{|r_z|} k_i \frac{M}{P} \left( \tilde{\zeta}_i + \frac{M}{P} \hat{D}_{ij}^{(1)} \tilde{\zeta}_j + \frac{M^2}{P^2} \hat{D}_{ij}^{(1)} \hat{D}_{jl}^{(1)} \tilde{\zeta}_l + \hat{D}_{ij}^{(1)} \frac{1}{k_j} \hat{D}_{jl}^{(1B)} \tilde{\zeta}_l - \hat{D}_{ij}^{(2)} \tilde{\zeta}_j \right). \quad (26)$$

ここで以下の演算子は,その右にある量と共に総和を求める操作を含む.

$$\hat{D}_{ij}^{(1)} = \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^m \{ (k_i - k_j) U_{ij}^{+(1)} + V_{ij}^{+(1)} \}, \quad (27)$$

$$\hat{D}_{ij}^{(1B)} = \sum_{j=1}^m (U_{ij}^{+(1)} k_j - V_{ij}^{+(1)}), \quad (28)$$

$$\hat{D}_{ij}^{(2)} = \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^m \{ (k_i - k_j) U_{ij}^{+(2)} + V_{ij}^{+(2)} \}. \quad (29)$$

ここで, $\hat{D}_{ij}^{(1)}, \hat{D}_{ij}^{(1B)}$ は $\zeta$ に関して1次, $\hat{D}_{ij}^{(2)}$ は2次である。すなわち,(25),(26)には, $O((M/P)\zeta)$ である $(M/P)\hat{D}_{ij}^{(1)}$ の繰り返し演算構造が現れている。し

かし,  $B_i^\pm$  の場合, 括弧内最後の2項に  $M/P$  はかかっていない.

以上の導出で,  $\tilde{b}_i^{\pm(1)} = (M/P)\tilde{\zeta}_i$  ( $M \equiv (1/\mu_- - 1/\mu_+)/2$ ,  $P \equiv (1/\mu_- + 1/\mu_+)/2$ ) は容易に求められるが, 高次の項は  $\tilde{b}_i^{\pm(2)}$ ,  $\tilde{b}_i^{\pm(3)}$  でも複雑である. さらに, これらを用いて最終的には  $\Phi_i^\pm$ ,  $B_i^\pm$  を求めることを考えると, 必要な量をもつと簡便に求める方法が要請されることになる.

### 3.3 弱非線形解析における行列解法

$\Phi^\pm$ ,  $B^\pm$ ,  $\Phi$ ,  $B$ などを周期関数列で展開したときの展開係数を, 次のようなベクトルと行列に集める ( $1 \leq i, j \leq m$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\pm &= (\tilde{b}_i^\pm), & \Phi^\pm &= (\Phi_i^\pm), & \Phi &= (\Phi_i), & U^\pm &= (U_{ij}^\pm), & I &= (\delta_{ij}), \\ \phi^0 &= (\phi_i^0), & \mathbf{B}^\pm &= (B_i^\pm), & B &= (B_i), & V^\pm &= (V_{ij}^\pm), & K &= (\delta_{ij}k_j). \end{aligned}$$

これにより, (18),(19),(20),(21)は次のようになる.

$$\Phi^\pm = \pm T^\pm \mathbf{b}^\pm, \quad T^\pm \equiv I + U^\pm, \quad (30)$$

$$\mathbf{B}^\pm = \frac{\mu_\pm}{|r_z|} N^\pm K \mathbf{b}^\pm, \quad N^\pm K \equiv (I + U^\pm) K \mp V^\pm, \quad (31)$$

$$\Phi \equiv \mu_+ P \phi^0 + \Phi^\pm, \quad \text{または} \quad \mathbf{0} = (\mu_+ - \mu_-) P \phi^0 + \Phi^- - \Phi^+, \quad (32)$$

$$B \equiv B^- = B^+. \quad (33)$$

まず, (30),(31)の間で  $\mathbf{b}^\pm$  を消去すれば,

$$\mathbf{B}^\pm = (\mu_\pm / |r_z|) D^\pm \Phi^\pm, \quad D^\pm \equiv \pm N^\pm K (T^\pm)^{-1}, \quad (34)$$

$$\Phi^\pm = (|r_z| / \mu_\pm) A^\pm \mathbf{B}^\pm, \quad A^\pm \equiv \pm T^\pm K^{-1} (N^\pm)^{-1} = (D^\pm)^{-1}. \quad (35)$$

(33)に(34)を代入し, (32)を用いると,

$$\mathbf{0} = \frac{\mu_-}{|r_z|} D^- (\Phi - \mu_+ P \phi^0) - \frac{\mu_+}{|r_z|} D^+ (\Phi - \mu_- P \phi^0). \quad (36)$$

これを  $\Phi$  について解けば,

$$\Phi = \mu_+ \mu_- (\mu_- D^- - \mu_+ D^+)^{-1} (D^- - D^+) P \phi^0 = (I - G)^{-1} \phi^0 \quad (37)$$

が得られる. ただし, 次のように  $G$  を定義した.

$$G \equiv \frac{M}{P} (D^- - D^+)^{-1} (D^- + D^+). \quad (38)$$

次に, (32)の第2式に(35)を代入すれば,

$$\mathbf{0} = (\mu_+ - \mu_-) P \phi^0 + \left( \frac{|r_z|}{\mu_-} A^- B^- \right) - \left( \frac{|r_z|}{\mu_+} A^+ B^+ \right). \quad (39)$$

これを  $B$  について解けば,

$$B = \frac{2\mu_+\mu_-PM}{|r_z|} \left( \frac{A^+}{\mu_+} - \frac{A^-}{\mu_-} \right)^{-1} \phi^0 \quad (40)$$

$$= \frac{2\mu_+\mu_-PM}{|r_z|} D^+ \left( \frac{D^-}{\mu_+} - \frac{D^+}{\mu_-} \right)^{-1} D^- \phi^0 \quad (41)$$

が得られる. ここで, (40) から (41) へは, (35) の  $A^\pm = (D^\pm)^{-1}$  を用いた. さらに,  $1/\mu_\mp = P \pm M$  および  $f(A)A = Af(A)$  を用いると, (40) は (42) のように, (41) は (43) のように書き換えられる.

$$B = \frac{2\mu_+\mu_-P}{|r_z|} H (I - H)^{-1} (A^+ + A^-)^{-1} \phi^0 \quad (42)$$

$$= \frac{2\mu_+\mu_-M}{|r_z|} D^+ (I - G)^{-1} (D^- - D^+)^{-1} D^- \phi^0. \quad (43)$$

ただし, 次の  $H$  を定義した.

$$H \equiv \frac{M}{P} (A^+ - A^-)^{-1} (A^+ + A^-). \quad (44)$$

### 3.4 行列要素のべき展開

(23), (24) で述べたように,  $U_{ij}^\pm, V_{ij}^\pm$  を  $\zeta$  のべきで

$$U_{ij}^\pm = 2 \left\langle f_i(x, y) \left\{ \pm k_j \zeta + \frac{1}{2} (k_j \zeta)^2 + \dots \right\} f_j(x, y) \right\rangle, \quad (45)$$

$$V_{ij}^\pm = 2 \left\langle f_i(x, y) \left\{ 1 \pm k_j \zeta + \dots \right\} (\nabla \zeta \cdot \mathbf{k}_j) f_j'(x, y) \right\rangle \quad (46)$$

と展開する. ただし,  $\langle \dots \rangle$  は界面全体にわたる積分で,  $\langle f_i(x, y) f_j(x, y) \rangle = \delta_{ij}/2$  となる. これに合わせて,  $U^\pm, V^\pm, D^\pm$  も  $\zeta$  について 2 次までで

$$U^\pm = U^{\pm(1)} + U^{\pm(2)} + \dots, \quad (47)$$

$$V^\pm = V^{\pm(1)} + V^{\pm(2)} + \dots, \quad (48)$$

$$D^\pm = \pm (K \pm D^{\pm(1)} + D^{\pm(2)} + \dots) \quad (49)$$

と展開する. ここで,

$$D^{+(1)} \equiv U^{+(1)}K - KU^{+(1)} - V^{+(1)} \quad (50)$$

$$D^{+(2)} \equiv U^{+(2)}K - KU^{+(2)} - U^{+(1)}KU^{+(1)} + K(U^{+(1)})^2 - V^{+(2)} + V^{+(1)}U^{+(1)} \quad (51)$$

と置いた. これらには, 次の性質がある.

$$D^- - D^+ \simeq -2(K + D^{+(2)}), \quad D^- + D^+ \simeq 2D^{-(1)}. \quad (52)$$



したがって、(37),(38)は、元々あった $\zeta$ と合わせて $\zeta$ について3次までで、次のように近似される。

$$\Phi = (I - G)^{-1} \phi^0 \simeq (I + G + G^2) \phi^0, \quad (53)$$

$$G \simeq -\frac{M}{P} K^{-1} D^{+(1)}. \quad (54)$$

一方、(43)は、(49),(52)を代入した後、 $\zeta$ について3次の項までを残し、また(54)を参照すると、次のようになる。

$$B \simeq \frac{\mu_+ \mu_- M}{|r_z|} \{K(I + G + G^2) + D^{(12)}\} \phi^0. \quad (55)$$

$D^{(12)}$ は、(56)のように、 $D^{+(1)}$ 、 $D^{+(2)}$ で定義される量であるが、(50),(51)を用いると、(57)のように変形できる。

$$D^{(12)} \equiv D^{+(2)} - D^{+(1)} K^{-1} D^{+(1)} \quad (56)$$

$$= (-D^{+(1)}) K^{-1} (U^{+(1)} K - V^{+(1)}) - (K U^{+(2)} - U^{+(2)} K + V^{+(2)}). \quad (57)$$

(25),(26)は、(53),(55)の成分に当たる。そこで、(53),(55)に関する行列の要素を求めると、

$$(D^{+(1)})_{ij} = (U^{+(1)} K - K U^{+(1)} - V^{+(1)})_{ij} = -\{(k_i - k_j) U_{ij}^{+(1)} + V_{ij}^{+(1)}\}, \quad (58)$$

$$(G)_{ij} \simeq \left(-\frac{M}{P} K^{-1} D^{+(1)}\right)_{ij} = \frac{M}{P} \frac{1}{k_i} \{(k_i - k_j) U_{ij}^{+(1)} + V_{ij}^{+(1)}\}, \quad (59)$$

$$(D^{(12)})_{ij} = \sum_{l=1}^m (-D^{+(1)})_{il} \frac{1}{k_l} (U_{lj}^{+(1)} k_j - V_{lj}^{+(1)}) - \{(k_i - k_j) U_{ij}^{+(2)} + V_{ij}^{+(2)}\} \quad (60)$$

となり、

$$H_0 \tilde{\zeta}_j \leftrightarrow \phi_j^0, \quad \frac{M}{P} \hat{D}_{ij}^{(1)} \leftrightarrow (G)_{ij}, \quad \hat{D}_{ij}^{(1)} \frac{1}{k_j} \hat{D}_{jl}^{(1B)} \tilde{\zeta}_l - \hat{D}_{ij}^{(2)} \leftrightarrow (D^{(12)})_{ij}$$

と対応させれば、(25),(26)は(53),(55)による表式に一致する。ここで(53),(55)は、3.2節で述べた手順とは違い、磁気ポテンシャルの展開係数 $\tilde{b}_i^{\pm}$ を経ることなく、直接得ることができた。

### 3.5 法線磁束密度の繰り返し演算構造

前節では、行列解法で得られた3.3節の(43)を $\zeta$ で展開すると、その行列要素は、逐次的な方法による3.2節の結果に一致することを示した。ただし、(55)の $B$ に繰り返し演算でない $D^{(12)}$ という項が現れることは、2節(4)の法線磁束密度が繰り返し演算構造を持つことと一見矛盾する。しかし、(43)

の代わりに, (43) と同等な (42) の  $B$  を, (4) の法線磁束密度  $b_z^1$  と

$$(42): B = \frac{2\mu_+ \mu_- P}{|r_z|} H(1-H)^{-1} (A^+ + A^-)^{-1} \phi^0, \quad H \equiv \frac{M}{P} (A^+ - A^-)^{-1} (A^+ + A^-),$$

$$(4) : b_z^1 = \hat{H}_Z (1 - \hat{H}_Z)^{-1} b_z^0, \quad \hat{H}_Z [g(\mathbf{R}')] = -\frac{M}{P} \hat{H} [t_z \cdot \nabla' g(\mathbf{R}')] ]$$

のように較べてみると, これらは同じ繰り返し演算構造を持つことがわかる. そこで次節では, 調和場に対する Green の定理にまでさかのぼって, 汎用解析と弱非線形解析を調べ直してみたい.

### 3.6 汎用解析と弱非線形解析の比較

閉曲面を  $S$ , その内部を  $V$  とすれば, 関数  $\psi, \phi$  に対する Green の定理は

$$\iiint_V (\phi' \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi') dV' = \oint_S \phi' (\nabla' \psi \cdot d\mathbf{S}') - \oint_S \psi (\nabla' \phi' \cdot d\mathbf{S}') \quad (61)$$

である. ここで, 2 節と同様に,  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  を観測点とソース点の位置ベクトル,  $\nu$  を  $\mathbf{r}'$  に関する微分や  $\mathbf{r}'$  だけの関数として,  $\psi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = -1/4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$  を 3 次元 Poisson 方程式  $\Delta' \psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  の基本解,  $\phi'$  を流体 (+)・真空 (-) 各領域で Laplace 方程式  $\Delta' \phi' = 0$  を満たすポテンシャル  $\phi^{\pm'}$  とすれば,

$$\phi^{\pm} = \oint_S \phi^{\pm'} (\nabla' \psi \cdot d\mathbf{S}') - \oint_S \psi (\nabla' \phi^{\pm'} \cdot d\mathbf{S}'). \quad (62)$$

ここで, 汎用解析で誘導場を決めるための式 (2) について, 導出過程の概略を述べる [7, 8, 9]. (62) の両辺に  $\nabla$  を作用させると, 磁束密度ベクトルのような調和場  $\mathbf{f}_{\pm}^1 = \nabla \phi^{\pm}$  に対する, 次の 3 次元調和場方程式が導かれる.

$$\mathbf{0} = (t_z \pm \hat{G}) \times (\mathbf{f}_{\pm}^1 \times t_z) + (t_z \pm \hat{G})(\mathbf{f}_{\pm}^1 \cdot t_z), \quad (63)$$

$$\hat{G}F(X, Y) \equiv \mp 2 \iint_F dS' (\nabla' \psi) F(X', Y').$$

ただし,  $F(X, Y)$  は任意の関数, 複号の上/下は真空/流体に対応し, 面積分領域は界面  $F$  からの寄与だけとする. (63) は, 界面上で調和場が流体・真空領域に共通な誘導場  $h_{X,Y}^1, b_z^1$  で (したがって界面条件は自然に満たされている)

$$\mathbf{f}_{\pm}^1 \times t_z = -\mu_{\pm} (h_X^1 t_Y - h_Y^1 t_X), \quad \mathbf{f}_{\pm}^1 \cdot t_z = b_z^1 \pm \mu_{\pm} M b_z^0 \quad (64)$$

のように表されることを用いて, 3 次元界面磁場方程式

$$\begin{cases} (P + M \hat{G}_Z) b_z^1 = -M \hat{G}_Z b_z^0, \\ h_{X,Y}^1 + M \hat{G}_{X,Y} b_z^1 = -M \hat{G}_{X,Y} b_z^0 \end{cases} \quad (65)$$

に書き直すことができる. ただし,  $\hat{G}_I \equiv t_I \cdot \hat{G} (I=X, Y, Z)$  は積分演算子  $\hat{G}$  の  $I$

成分である。(65)の第1式を  $b_z^1$  について解き,  $\hat{H}_z \equiv -(M/P)\hat{G}_z$  と置けば, (2)の第3式になる。(2)の第1,2式は, (65)第2式の書き換えに他ならない。

次に, (62)と弱非線形解析の関係について述べる。(61)で,  $\phi$  は(62)と同じ  $\phi^{\pm'}$  とするが,  $\psi$  には Laplace 方程式  $\Delta'v^{\pm'} = 0$  の解  $v^{\pm'}$  を用いると,

$$0 = \oint_S \phi^{\pm'} (\nabla' v^{\pm'} \cdot dS') - \oint_S v^{\pm'} (\nabla' \phi^{\pm'} \cdot dS'). \quad (66)$$

これを(62)と辺々相加えれば,

$$\phi^{\pm} = \oint_S \phi^{\pm'} \{(\nabla'(\psi + v^{\pm'}) \cdot dS')\} - \oint_S (\psi + v^{\pm'}) (\nabla' \phi^{\pm'} \cdot dS'). \quad (67)$$

$G^{\pm} = \psi + v^{\pm'}$  と置き,  $S$  上で  $G^{\pm} = 0$  となるように  $v^{\pm'}$  を選ぶと,

$$\phi^{\pm} = \oint_S \phi^{\pm'} (\nabla' G \cdot dS') = \oint_S \phi^{\pm'} \frac{\partial G^{\pm}}{\partial Z'_{\pm}} dS' \equiv L[\phi^{\pm'}]. \quad (68)$$

(68)第3辺では, (7)の法線微分を用いて,  $dS' \cdot \nabla' = dS' t_z^{\pm'} \cdot \nabla' = dS' \partial / \partial Z'_{\pm}$  と書き換えた。 $Z'_{\pm}$  は, 流体(+) $\cdot$ 真空(-)各領域から外向きを正とするソース点の法線座標なので, 鉛直上方を正とする座標を  $Z'$  とすれば,  $Z'_{\pm} = \pm Z'$  である。 $G^{\pm}$  は  $\Delta G^{\pm} = 0$  を満たす Green 関数になる。したがって  $L[\dots]$  は, 任意の関数を  $u(\mathbf{r}')$  とすれば,  $u(\mathbf{r}')$  から Laplace 方程式の解を生成する演算子となる。もし  $u(\mathbf{r}')$  が既に調和場であれば, (68)第4辺が示すとおり, 演算結果は元の  $u(\mathbf{r})$  にもどる。

(68)より, 磁気ポテンシャル  $\phi^{\pm}$  と法線磁束密度  $b_z^{\pm}$  の間の関係が導かれる。

$$b_z^{\pm} = \mu_{\pm} \frac{\partial \phi^{\pm}}{\partial Z'_{\pm}} = \pm \mu_{\pm} \frac{\partial}{\partial Z'} L[\phi^{\pm'}], \quad (69)$$

$$\phi^{\pm} = \frac{1}{\mu_{\pm}} L \left[ \int_{-\infty}^0 b_z^{\pm'} dZ'_{\pm} \right] = \pm \frac{1}{\mu_{\pm}} L \left[ \int_{\mp\infty}^0 b_z^{\pm'} dZ' \right]. \quad (70)$$

(70)は  $Z'_{\pm} \rightarrow -\infty$  で  $\phi^{\pm'} \rightarrow 0$  として, (69)の微分を積分に逆転した。これらにより, 界面条件は次のように表される。

$$0 = -b_z^- - b_z^+ = \mu_- \frac{\partial}{\partial Z} L[\phi^{-'}] - \mu_+ \frac{\partial}{\partial Z} L[\phi^{+'}], \quad (71)$$

$$0 = \phi^- - \phi^+ = -\frac{1}{\mu_-} L \left[ \int_{\infty}^0 b_z^{-'} dZ' \right] - \frac{1}{\mu_+} L \left[ \int_{-\infty}^0 b_z^{+'} dZ' \right]. \quad (72)$$

(71),(72)は,  $\pm b_z^{\pm}, \phi^{\pm}$  が(6)式右辺第3項の  $\exp(\pm k_j \zeta(x, y)) f_j(x, y)$  から生じる部分で, それらを周期関数列で展開したときの展開係数が行列  $\mathbf{B}, \Phi$  に集められたとすれば, 弱非線形解析の(36),(39)に対応する。このとき,  $\partial / \partial Z_{\pm}$  に

は  $D^\pm/|r_z|$  が,  $\int_{-\infty}^0 dz'_\pm$  には  $|r_z|A^\pm$  が相当する. (6)式右辺第3項は, このままの形で Laplace 方程式を満たしている. したがって, 上記の(69),(70),(71),(72)においては, 演算子  $L[\dots]$  を外すことができる.

#### 4 まとめ

磁性流体界面現象の解析では, 任意形状の界面上で界面磁場を求める手続が必要となる. これまで, 調和性と界面条件を満たす界面磁場を求めるための汎用解析を構築してきたが, 本稿では, 汎用解析を従来の弱非線形解析と比較しやすくするため, 主に弱非線形解析の手続の見直しを行った.

弱非線形解析は界面変位の振幅が微小であることを前提に, 界面量を界面振幅のべき展開の形で逐次的に求めるが, 各べきの表式が煩雑になることは避けられない. これに対して, 本論文では, 磁気ポテンシャル・法線磁束密度などを周期関数列で展開したときの展開係数を集めた行列間の演算から,  $b^\pm$  のような中間量を経ることなく, 界面量の展開係数を(37)の  $\Phi$ , (42),(43)の  $B$  のように直接求めた. これらは, 界面振幅・流体-真空間の透磁率差いづれについてもべき展開などは行っていない表式である(したがって, 非線形解析の名は外すことができる). しかし, 敢えて界面振幅についてべき展開を行ってみると, 3次の項までは, 従来の弱非線形解析のように逐次的に求めたものに一致する. 特に法線磁束密度の表式には, 汎用解析と同様に, 界面振幅と透磁率差のべきとなる繰り返し演算構造が現れる.

調和場に対する Green の定理の立場から, 汎用解析と弱非線形解析を調べ直した. ポテンシャルは, Green 関数を求めたり積分方程式を解くことで, 境界上あるいは内部の値が決まるが, 汎用解析では, これらの煩雑な手続を経ることなく, 既知の印加磁場分布への積分演算子の作用に基づいて, 界面磁場を求める. 一方弱非線形解析では, そのままで Laplace 方程式の解の形になっている磁気ポテンシャルを採用して, やはり Green 関数を求める手続を回避している.

## 参考文献

- [1] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field; *J. Fluid Mech.*, **82**(3), p.401 (1977).
- [2] E.E.Twombly and J.W.Thomas: Bifurcating instability of the free surface of a ferrofluid; *SIAM J. Math. Anal.*, **14**(4), p.736 (1983).
- [3] Y.Mizuta: Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid; *Magnetohydrodynamics*, **44**(2), p.155 (2008).
- [4] Y.Mizuta: Stability analysis on the free surface phenomena of a magnetic fluid for general use; *J. Magn. Magn. Mater.*, **323**(10), p.1354 (2011).
- [5] 水田 洋: 磁性流体界面形状解析における非線形応答; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の多様性と普遍性」, **1761**, p.163 (2011).
- [6] 水田 洋: 磁性流体界面安定性解析における弱非線形近似の汎用解析を用いた検討; 第60回理論応用力学講演会講演論文集, GS04-01 (2011).
- [7] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析における3次元界面磁場方程式; 日本流体力学会年会2005講演論文集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai/cd-rom/paper/>), AM05-16-014 (2005).
- [8] 水田 洋: 複雑界面における調和場解析の次元間対応; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1483**, p.175 (2006).
- [9] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析への3次元Hilbert変換の適用; 日本流体力学会年会2006講演要旨集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai2006/ronbun.html>), AM06-16-003 (2006).