

数学史から見た数学教育

斎藤 憲*

1 はじめに

報告後に本稿を準備していて、数理研の講究録に一松信氏の「数学史をいかに数学教育に活かすか？」(1998)という短い論文があることにはじめて気がついた。「随想と提言」という副題があるので一松氏は論文などという気負ったものと考えておられなかったようだが、短いながら要を得ていて、筆者の報告のかなりの部分を不要にする内容である。ネットから簡単にダウンロードできるのでご覧いただきたい。

2 問題提起

数学史の存在意義の一つとして、数学史が数学教育に役立つということが、しばしば語られる。数学史の研究者として¹、その存在意義が認められ、研究成果が利用されることは有り難いことだが、ここであえて疑問を提示してみたい。数学史は本当に数学教育において有益なのだろうか。

そもそも数学教育で数学史が役立つと言われるとき、どういうことを意味しているのだろうか。数学史を利用すると、効率があがって同じ内容を短時間で教えることが出来る、ということに直接意味しているわけではないことは明らかであろう。そもそも学校のカリキュラムは限られた時間で最大限の成果を得ることを目標に組み立てられている。そこに改

*大阪府立大学人間社会学部

¹本稿での「数学史研究者」「歴史研究者」などの言葉は「数学史家」「歴史家」という言葉に置き換えて読んでいただいてもよい。筆者が日本語の「数学史家」「歴史家」といった言葉を避けるのは、ある事情からそこに権威主義的な響きを感じるからである。筆者の個人的経験を共有しない読者には煩雑さをお詫びしたい。

善の余地は常にあるにせよ、教えようとする内容と異なる要素を持ち込むことで、効率が上がるとしたらかえって不思議なことと言えよう。

そうすると、数学史の効用は、(1) 退屈になりがちな授業に、時折別の要素を持ち込んで生徒に興味を持たせること（高木貞治の「数学史わさび説」）、(2) 生徒が別の視点から学んだ内容を見て、より深い理解を得ること（直接点数に現れないにしても）、といったことになるのだろう。ここではこの二点に絞って考察してみたい。

数学史の研究者に言わせれば、(1) は大した効用でないうえに過去の事実を歪曲する危険があるし、(2) は実現すれば素晴らしいが、言うほど容易なことではない。以下、もう少し詳しく考えていこう。

3 最大の誤解：過去の数学は易しい

具体的な議論に入る前にまず、はっきりさせておくべきことがある。それは、数学史を数学教育に役立てようという議論について回る誤解である。その誤解とは過去の数学は（そして古い数学であるほど）易しい、というものである。これはまったく事実と反する。あらゆる時代において、少なくとも意図的に保存された文献で現代に伝わるほどの数学は、当時の最高の知性の最大限の努力の成果であり、決して易しくない²。過去の数学は、多かれ少なかれ、数学教育で扱うにはあまりに複雑過ぎるものなのである。

当然、数学教育で数学史を扱うときは、このような複雑な部分を正面から紹介したりはしない。そもそも数学史を数学教育に持ち込む人自身が、数学史の研究者ではなく、原典でなく二番煎じのマニュアルを頼りにして、このような過去の数学の複雑さを理解していない場合も少なくない。数学史が数学教育に役立つと単純に言う人は、数学史を本当には理解していないのかもしれない。

このような指摘に対する、教育関係者の反応はだいたい決まっている。教育のためだから仕方がない、あるいは自分は数学史の専門家でない（のだから大目に見てほしい？）というものである。しかしこのような一見もっともな反応を、教育は大事なことから専門家にしか関係のない細か

²その一例として、報告中では『原論』第十巻の基本的な問題を紹介した。本稿では配布したレジュメを資料として添付する。これは単純な問題から出発した議論が、いかに複雑なものになりうるかということの、やや極端な例である。その詳細は近く『エウクレイデス全集』第2巻（東京大学出版会）で紹介できる予定である。

いことは犠牲にしてもいいのだという傲慢や、あるいは自分は面倒な研究をしたくないという怠慢から、区別することはそう簡単ではない。

たとえば数学史的なトピックを少し不正確な形でいいから授業で使うと、眼に見えて教育効果が上がって生徒の理解が大きく向上するというのなら、歴史研究者の異議が黙殺されても仕方がないだろう。しかしすでに述べたようにそのような効果があるとは思われない。単に退屈になりがちな授業の目先を変えるために数学史を取り上げるなら、このような歪曲を正当化することは難しい。仮に数学史をとりあげることが、教育上大きな効果をもたらすとしても、歴史的正確さをできるだけ犠牲にしない努力が必要であろう。

また、過去の数学を単純化して提示することには、昔の人は頭が悪いという誤解を招きかねないという弊害がある。最初に引用した一松氏の論考にもこの問題の指摘がある。一松氏は「私は逆に『昔の人はものすごく偉かった』という印象を持つことが多い」と述べておられるが、生徒が最終的にそういう印象を得るならば数学史を教えた甲斐があったことになろうが、そのためには昔の数学の、現在では不要になった難しさをきちんと扱う必要がある。こういうわけで、いずれにせよ、過去の数学は現代の数学に劣らず難しいという認識を持つことがまず必要である。

4 数学史のもたらす効用(1)：過去の困難を知る

最初にとりあげた数学教育における数学史の有用性のうち、最初の(1)は要するに「数学史わさび説」であり、ここではとりあげない。数学史にそういう効用があることは否定しないが、数学史研究者から積極的に「売り込む」ようなものではないだろう。むしろ過去の数学の複雑さ、難しさを積極的に利用することによって、(2)を目指すほうが建設的である。過去の数学は、現在では克服された困難の歴史でもある。深入りはしないが簡単に例をあげよう。球の表面がその大円の4倍であること、また球(の体積)が、その外接円柱の3分の2であることはアルキメデスが発見し、証明したことである。彼の著作の一つ、『球と円柱について』の第1巻は、この事実の証明(および球を平面で切断した切片に対する同様の結果)のために四十個ほどの命題を費やしている³。ところが今日では球、

³アルキメデス『球と円柱について』伊東俊太郎編、佐藤徹訳、朝日出版社、1981。に第一巻の全訳と解説がある(エウトキオスによる注釈を含む)。アルキメデスの議論の概略は、斎藤憲『よみがえる天才アルキメデス：無限との闘い』岩波書店、2006を参照。

あるいはその切片の体積は二次関数の積分の簡単な応用であり、微積分の初歩の練習問題の一つでしかない。これはもちろん、現代の高校生がアルキメデスより頭がいいということの意味するのではなく、微積分がいかに強力なツールであるかを示している。さらに微積分が可能になる背景には、球のような幾何学的図形に含まれる量的関係を、図形そのものから切り離して $y^2 = a^2 - x^2$ のように表現する代数学（とその応用としての解析幾何）がある。中学校から執拗に教えられる式の計算は、微積分をその目標の一つとしているわけであり、アルキメデスの議論を知ることによって、微積分という理論が「数量的関係の図形からの切り離し」と密接に結びついていることが理解でき、さらに数学における抽象化の必要性を理解することが期待できる。（この後者は高校までより大学における数学教育で有用かもしれない）

一方、教師にとっては、アルキメデスのような大数学者でも、図形から量的関係を切り離して議論することは容易でなかったという事実を知ることが有益であろう。代数式の扱いとは、「まだ何であるか分からないものを扱い、計算する」ことであり、それに心理的抵抗を感じ、うまく学べないとしても、いわば当然のことなのである。決して成績がぱっとしない生徒に特有なことではない。高校までの数学でこのような大きな概念的飛躍を要求する内容は、代数式の他には、小学校初年の位取り記数法くらいのもかもしれないが、教師にとってすでに当たり前の内容が、人間の自然な思考から見て当たり前とは限らないことを意識させる効用を数学史に期待してもいいかもしれない。

もちろんそのためには、過去の数学の成果を「教育用」に単純化しただけでは何の役にも立たない（ここでの例で言えば「アルキメデスが球の体積を求めました」では意味がない）。過去の数学の、現代では不要になった複雑さを知ることこそ意味がある。

5 数学史のもたらす効用(2):文化史の一環として

文化史の一環として科学史・数学史をとらえるべきだという主張はいまさら繰り返す必要もないほどよく聞かれる。実際、古代ギリシャ人だけが証明という概念を発明できた（他の文明圏の数学での「証明」はギリシャから学んだものである）ということは、ギリシャ（特にアテネ）の民主政下で論争・説得の技術が発展したこととの結びつきで理解するのがよいし、天文・暦法上の必要が、多くの場面で数学の内容やその担い

手に影響を与えたことも知る価値があろう。しかし、個々のトピックを紹介するならともかく、この視点で意義ある全体的記述をすることは非常に難しい。歴史や哲学史の記述を丸写しして数学史の記述と並べても（ここでそういう本をいちいちあげることはしないが）、議論が拡散するだけで読者には得るところが少ない。

むしろ、数学史（一般には科学史）は、文化史に分類される他の学芸の歴史、たとえば文学史や美術史とどう違うのかを考えることが必要なのかもしれない。最大の相違は、昔の数学は易しいという誤解に典型的に現れる、進歩の概念であろう。ホメーロスの詩は古いから易しいとか、ルネサンスの絵画より現代絵画のほうが進歩しているという話は聞いたことがないが（描画のテクニックはともかく、絵画全体として）、数学や科学に関しては同様のことが当然のこととして主張される。その主張に全面的に与するわけにはいかないが、やはりそれなりの理由はあると言わざるをえない⁴。

簡単に言えば、数学史は美術史に劣らず必要である、と数学史研究者としては主張している。しかし数学史が美術史と同じでないことに目をつぶるわけにもいかない。数学に進歩という名で呼ばれる要素があり、現在と過去をまったく対等に扱うことができないことは否定できない。特に、数学や科学の「進歩」というものが、技術を通して現代の我々の生活を、半ば不可逆的に大きく変えているのだからなおさらである。

しかし、ここまでくると、この議論は大学での科学史の授業が目指してきた壮大な目標そのものであり（それがどこまで実現できたかの評価は差し控えるが、筆者は楽観的でない）、ここで論じるには大きすぎるテーマであろう⁵。

⁴これは科学史全般にあてはまることだが、数学史にはさらに特殊な面がある。科学史では、過去の理論は今日の科学から見て間違いである場合が多く、過去の科学に意義を与えるためには、自然観の相違といった議論が不可欠である。ところが数学の場合、ほとんどの過去の結果は現在も正しい。それだけに過去の数学は単に現在の数学の劣ったサブセットであるという見方に陥りがちである。

⁵この研究集会では、情報処理教育に関連して、データマイニングなどの発展を熱狂的に語る報告もあった。そこでは、この種の発展が自由で公正な社会にとって大変危険なものにもなりうるという視点が（少なくとも限られた時間での報告の中では）全く欠如していた。筆者の持った印象は、たまたまマッチを持って火薬庫に迷い込んだ子供が何も知らずに火遊びをしている、というものである。この印象が杞憂であることを願う。

科学は人類の幸福に役立たねばならないが、そのように科学をコントロールすることは可能だろうか、という懸念は常に表明されてきた。しかし21世紀の科学者の脳裏には人類の幸福などという大層な目標は最初からないのかもしれない。

(参考資料：当日配布したハンドアウトに補足したもの)
 古代の難しい数学の例：『原論』X巻の無比量の議論 (*alogos magnitude*)

1. (共測—commensurable—の定義) 2つの magnitude (直線または平面図形) a, b に対して a と b が commensurable (共測) とは, $a = mc, b = nc$ となる magnitude の c と, 自然数 m, n が存在することと定義し, $a \sim b$ とかく. また a を一辺とする正方形を $q(a)$, a, b を 2 辺とする長方形を $r(a, b)$ とかく.
2. (表現可能—expressible—の定義) さらに, 基準となる直線 e を定めたとき, $q(e) \sim q(a)$ のとき, 直線 a および正方形 $q(a)$ は expressible であるという. またこのとき, $q(a)$ に等しい領域 (実際には長方形) も expressible であるという. また expressible でない直線・領域は *alogos* (無比) と呼ばれる.

注意：領域は基準となる領域 $q(e)$ と commensurable のときに限って expressible であるが, 直線 a は, 基準となる直線 e と commensurable でなくても, $q(a)$ と $q(e)$ が commensurable であれば expressible である.

3. (binomial, apotome の定義)

直線 a, b が expressible で, かつ $a \neq b$ のとき, $a \pm b$ は無比直線である, すなわち $q(a \pm b)$ が e と commensurable でない. このとき $a + b$ を binomial (双名直線), $a - b$ を apotome (切断直線) と呼ばれる.

4. (第 X 巻が扱う唯一の問題)

binomial, apotome 上の正方形 $q(a \pm b)$ を, expressible な直線 r を一辺とする長方形に変形しよう (r 上に付置—apply—すると言う). すると他方の辺はそれぞれ binomial, apotome になる. それではこの逆は成立するか, すなわち一辺が expressible, 他の一辺が binomial または apotome の長方形を正方形に変形すると, その辺は binomial または apotome になるか?

答え：一般的には成り立たない. もとの長方形の第 2 の辺が binomial または apotome である場合, 正方形の辺はそれぞれ 6 種類の場合に分類される. 正方形の辺が再び binomial または apotome になるのはその 1 つの場合に過ぎない. 他の場合の正方形の辺にそれぞれ名前がつけられるので, 新たに 10 種類, 合計 12 種類の無比直線が得られることになる. なお, 正方形の辺としてどの無比直線が得られるかに応じて, binomial, apotome もそれぞれ 6 種類に細分して分類される. 詳細は『エウクレイデス全集』第 2 巻 (東京大学出版会：近刊) を参照されたい.