数理解析研究所講究録
第1801巻 2012年 44-47

理工系（非数学）学生のための教育数学

東京大学　大学総合教育研究センター　藤原毅夫　(Takeo Fujiwara)
Center for Research and Development of Higher Education,
The University of Tokyo

数学には三つの顔があるといわれる．道具としての数学，言語としての数学，そして自立した対象としての数学である． 45年にわたる筆者自身の固体物理学の研究においては，道具としまた言語としての数学は不可欠のものである．また筆者は7年間の筑波大学勤務をはさんで大半を東京大学工学部・工学系研究科教員として過ごし，そこでは工学部全体の学生を対象とする道具としての，また共通言語としての数学の教育に携わった．

1. (東京大学）工学部の数学教育：工学を志す者に必要な数学

東京大学では最初の2年間は，教養学部で広い分野を学ぶ．この間，解析学，線形代数，多変数の微積分を学ぶのが標準的な理科1類学生である．２年次の夏に工学部進学とそれぞれの学科が決まり，２年次の後半 10 月から一部の工学部専門科目がスタートし，数学では常微分方程式，変分法，ベクトル解析を学ぶ．工学部に進学した3年次の春から半年の間に，複素関数論，フーリエ解析を学ぶ．これが標準的メニューであり，工学部全体の70%前後の学生はここまで学ぶ．その後，偏微分方程式や有限要素法，最適化の数理，確率・統計などが数学特論1，2として用意されており，これらを学ぶのは20%程度である．

私たちは，永年，これらが工学部の標準的メニューであろうと考えてきた．数学特論のメニューを近年，わずかに変更したが，他は私が学生であったころ，あるいはそれ以前からほとんど変わっていない．日本のほとんどの理工学部でも，これが標準メニューとなっている．

従来のメニューには，一つの数学観が後ろに横たわっている．すなわち，数学は自然に関する数式モデルである，工学の基本は自然への働きかけである，という考えである．しかし最近の工学は，人工物を設計し創る、あるいはさらに社会システムやマネージメントを解析し，新たな社会システムを創るという側面が大きい．それに伴い，今日の新しい数学（数理工学）は「社会とのかかわり」としての色彩も強い．新しい数学の創生のきっかけや対象も「社会」であることが多い．それらを考えて，東大工学部の数学メニューに数学特論「最適化の数理」を加えた．

2. 何のための数学教育か

数学あるいは数学教育がこのように（僅かずつではあるが）形を変えつつある一方で，社会や中等教育の分野で、あるいは学生にも十分理解され受け入れられてはいない．理由をいくつか挙げよう．

- 「新しい数学」の対象が，目新しい（高校まででは全く学んでいなかった）ものばかりであり，学生には馴染みが薄い．
- 中等教育において数学教育に携わる教員にとっても，「新しい数学」は全く未知のものである．そのためこのような数学が高校生に紹介されることがない．
- 「新しい数学」が創られる領域が個別の色彩が強いため，問題意識の共有が難しい．
- 学生の基礎学力が乏しく，カリキュラムの上で「新しい数学」が始まるころには息切れがしている．
- 大学の数学教育カリキュラムの変化をリードする主体がない．

等々である．

外国語教育は，文学教育や，言語学教育，外国文化教育ではなくなっている．特に近年では，外国語を用いてコミュニケーションを如何に図るか、その能力をどのように身に着けたらよいかが大きな問題となっている．同様に，多くの数学非専門領域における数学教育は「数学」それ自身の教育ではなくなっている．数学を，共通言語として，あるいはそれぞれの専門分野における有力な道具として習得することが求められている．

3. 理工学系一般向けの教育数学　―複素関数論―

3－1　いくつかの理工系向けの数学教科書

それでは理工系のこれまでの数学教育に代わって、「新しい数学」を教えればよいのだろうか．「新しい数学」を一般的に教えることの困難はしばしば指摘される．理由の一つは，それぞれの新しい数学が理工系全体に共通した課題では必ずしもない点にある．この点に対する私たちなりの答えが「最適化の数理」を加えることであり、それ以上は現時点では困難であるとの結論である．同時に現在のカリキュラムにある数学のどれかを捨てることも困難であると考えた．

既存の教育カリキュラムのなかで，理工系に適した体系化は不可能なのだろうか．これまでもそのような一般向けの標準的な数学書は書かれてきた．高木貞二先生の「数学概論」はその緒言にあるように「時代に順応した一般向けの解析学予修書」として書かれている．「数学概論」は，解析学の専門書ではなく、理科生一般に向けて書かれた解析学のテキストと位置づけられる（出版は高木先生の東大停年後となっている）．非数学者の立場から見ても，決して内容的に難しいとはいえない．微積分の初歩から多変数の微積分、複素関数など、上のカリキュラムに即していえば東京大学

工学部 3 年生までの解析学をほぼカバーしている．ただし，現在の大学 1 年生が手にした時に，1 学期間というスケールで眺めて辟易とするといったことはあるかもしれない．

また理工学一般向けにまとめられた数学テキストとして名高いのはV.I.スミルノフの「高等数学教程」である．「高等数学教程」は旧ソ連の物理学科（狭い意味の物理学科ではなく、もっと広い意味の基礎理工学分野と理解すべきであろうが）の学生が想定されている．全 5 巻（12 冊）という大部であるが、最後のルベーク積分の部分を除けば、おおよそ我々が想定する大学理工学部の 3 年間の課程をカバーしている．特徴は，定理・証明という形をとっていないことと，多くの例に触れていて詳細にわたる点である．これを読んだとき，妙に「戦争と平和」（L．トルストイ）や「静かなるドン」（M．ショーロホフ）と共通していて，世の中の急激な変化から離れてゆったりとしたロシアの大地を感じさせると思ったものである．今考えるとこの感想はソビエト連邦を好意的に受け止めていた時代（1960 年代）の空気を反映したものである．いずれにしても，内容と記述はまさに教育を目的とした教程というにふさわしい．ついでに云えば，ランダウ・リフシッツの理論物理学教程とも共通した（今はない）ソビエト連邦の教育に対する力の入れ方を感じる．

3−2　教育数学としての複素関数論

それでは，教育のための数学としてどのようなものが好ましいのであろうか．スミルノフのようなものを作ることが理想であるかもしれない．しかし，現在の日本における学生の状況あるいは多くの大学の現状では，それは大変困難である．ここでは一般の理工系向けに数学の教科書を書くというのではなく，複素関数論を考えてみたい．結論を先に述べれば，筆者は理工系向け「教育（のための）数学」として，複素関数論が適していると考えている．

理由を列挙してみよう．

- シナリオと完結性：複素関数論がある種の完結性を持っているのが理由の一つである．筆者が言いたいのは、「教育のための数学」には「シナリオと完結性」が必要で、それを複素関数論は備えているということである．
- 具体例に基づく理解：実際的な面からの理由として，解析学の一般論の講義を聞いて，多くの学生は，高校までの数学との違いに大いに戸惑っている．本来はこのような問題はその講義の中で解決すべきである．それが困難であることを前提に考えると，収束や連続の概念に関しての「具体例にもとづく復習」という要素が複素関数論の学習の中にある点を挙げたい．
- 多様な話題への広がり：複素関数論を経由して多くの話題に広がっていく．例えばフーリエ解析などはよい例であるが，これも理由の一つであり．フーリエ級数論の中で述べられる「ギッブス現象」は，具体的に示されれば大変身近に感じることのできる問題であり，同時に一様収束という概念を理解するための大変良い

実例でもある．

- 概念の拡張：指数関数，三角関数，対数関数等の例に見るように，関数の性質を理解するためには，実数から複素数まで領域を拡張することにより，格段に豊かになる．それを具体例を持って理解することができる．
- 学生の能力に応じた工夫：講義の中で各事項の配置の仕方には大いに工夫をする余地がある．私は，（講義の最後で解析接続を述べるが，）リーマン面についてはかなり早い段階，多価関数を議論するところで出すようにしている．また関数の特異性を理解するためには，さっさと級数展開を与えてしまったほうが理解しやすいと考えている．さらに対数関数の多価性については，$1/(z-a)$の原点周りの周回積分をいろいろ考えてみることにより本当のことが納得できるので，このような例は繰り返し述べるようにしている．シュワルツークリストッフェルの公式なども楽しい話題なので，実用性は少ないかもしれないが述べるようにしている．

4 終わりに

これまで理工系のための教育数学について私見を述べた．一つは数学の性格，二つ目は「新しい数学」について，三つ目は教育数学としての複素関数論に付いてである．複素関数論は歴史的に物理数学の入口として位置づけられる．そのため，今日の基礎科学軽視（あるいはすぐ社会に役立つことが基礎分野にも要求される）の社会的空気の中で，軽視されている．何でもかでも基礎を重視しろという気は毛頭ないが，基礎をしっかり学ばなくてはならない時期というものがある．ちょうど二十歳前後の時期がそれである．この時期に基礎をしっかり学ばないと一生学ぶことができない，あるいは学び方が習得できない．そもそも大学で学ぶべきことは学門分野の全体像であって個別学問はそのあとに来るものであろう．複素解析は解析学を一度まとめ直すという意味で大変優れた分野であると，主張したい．

多くの学生は，中等教育の中で「論理」というものに関する教育を受ける機会を逸しているように思う．論理を学ぶというのが，数学を学ぶ意味の一つであろう．そのため大学の数学では，それまでの講義の仕方と大きく異なるものとなっている．数学の講義は，カルチャーショックを与えるところから始まるということを聞いたことがある．しかし一方で学生たちは、学問の構築の過程は学校で学ぶ順序とは異なることを理解しなくてはならないし，数学の講義の中でこのことを学生に思い返させる必要がある．これまでの数学教育では論理構成が重要視されていて，概念形成の順序・構造というものは軽視されているように思う．

物理学では，少数の例外（ランダウ・リフシッツの理論物理学教程がその典型である）を除いて，ハミルトンの運動方程式，ラグランジュ方程式から力学を始めることはない．むしろ多くは，多少の差はあっても，歴史をなぞった形で教科書が書かれ，講義が行われる．力学から物理の講義が始まるのは，理由が有ることであり，概念の構成の順序が結果的に歴史的発展に沿った形で行われるからである．